UNIVERSAL LIBRARY

TIGHT BINDING BOOK

Müller-Pouillets

Lehrbuch der Physik

11. Auflage

Unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter herausgegeben von

A. Eucken   O. Lummer †   E. Waetzmann

In fünf Bänden:

I. Mechanik und Akustik   II. Lehre von der strahlenden Energie (Optik)

III. Wärmelehre   IV. Elektrizität und Magnetismus

V. Physik der Erde und des Kosmos (einschl. Relativitätstheorie)

Band I: Mechanik und Akustik

Erster Teil: Mechanik punktförmiger Massen und starrer Körper

Zweiter Teil: Elastizität und Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Dritter Teil: Akustik

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.

Braunschweig

Müller-Pouillets

Lehrbuch der Physik

11. Auflage

Erster Band – Zweiter Teil

Elastizität und Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Unter Mitwirkung von



P. P. Ewald, Stuttgart; Th. Pöschl, Karlsruhe
L. Prandtl, Göttingen; H. Senftleben, Breslau

herausgegeben von

Erich Waetzmann
Breslau



Mit 398 Figuren im Text und auf 2 Tafeln

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
Braunschweig 1929

INHALTSVERZEICHNIS ZUM ERSTEN BANDE
(ZWEITER TEIL).

Elastizität und Mechanik der Flüssigkeiten und Gase.

Siebentes Kapitel.

Mechanik der nichtstarren Körper.

Von Th. Pöschl in Karlsruhe.

Achtes Kapitel.

Reibung fester Körper.

Von Th. Pöschl in Karlsruhe.

Neuntes Kapitel.

Der mechanische Aufbau des festen Körpers in atomistischer Betrachtung.

Von P. P. Ewald in Stuttgart.

Einleitung.

I. Die Gittertheorie der polaren Kristalle.

II. Die mechanischen Eigenschaften der Metallkristalle.

III. Gegenüberstellung der mechanischen Eigenschaften bei Metallen und Nichtmetallen. Schlußbemerkungen.

Dritter Abschnitt.

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Von L. Prandtl in Göttingen.

Zehntes Kapitel.

Gleichgewicht von Flüssigkeiten und Gasen.

Elftes Kapitel.

Strömende Bewegung der Flüssigkeiten und Gase. I.

Kinematik; Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit.

1. Kinematik.

2. Dynamik der „idealen" reibungsfreien Flüssigkeit.

Zwölftes Kapitel.

Strömende Bewegung der Flüssigkeiten und Gase. II.

Bewegung zäher Flüssigkeiten; Turbulenz; Widerstände; technische Anwendungen.

Dreizehntes Kapitel.

Methoden zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes und der Dichte.

Von H. Senftleben in Breslau.

Vierzehntes Kapitel.

Sonderausführungen über Luftpumpen und Apparate zur Druckmessung (Manometer und Barometer).

Von H. Senftleben in Breslau.

I. Luftpumpen.

II. Apparate zur Druckmessung.

a) Manometer.

b) Barometer.

Siebentes Kapitel.

Mechanik der nichtstarren Körper[1]).

§ 1. Vorbemerkungen. Bis vor wenigen Jahren nahm in den meisten Lehrbüchern der Physik die Mechanik der nichtstarren Körper oder die Elastizitäts- und Festigkeitslehre, wie dieser Gegenstand bei vorherrschenden technischen Gesichtspunkten genannt wird, nur einen geringen Raum ein. Handelte es sich doch um ein Wissensgebiet, das aus den praktischen Bedürfnissen der Technik hervorgegangen ist und das dem Physiker nur wenig Anregungen zu bieten schien. In der letzten Zeit ist jedoch die Einstellung diesem Gegenstand gegenüber eine grundsätzlich andere geworden. Die letzte Entwicklung hat vielmehr gezeigt, daß die Lehre von den Kräften, die den inneren Zusammenhang der Körper herstellen, für die gesamte Physik von größtem Interesse ist, und daß für die Untersuchung der Beschaffenheit der kleinen, kristallinischen Teile der Körper, ihres Gefüges und dessen Veränderung unter dem Einfluß von äußeren Kräften und ihrer kleinsten Teile — der Moleküle und Atome — die Methoden der modernen Physik — man kann sagen: in ihrem ganzen Umfang — zur Verwertung gelangen. Aus diesem Grunde ist eine eingehendere Behandlung der Grundfragen dieses Gebietes, an dessen Ausbau die moderne Physik voraussichtlich auch fernerhin in hervorragender Weise beteiligt sein wird, auch in einem elementaren Lehrbuche heute sehr wohl am Platze.

Für den Zweck, den diese einführende Darstellung verfolgt, kann es sich freilich nicht darum handeln, Aussagen über die soeben kurz gekennzeichneten Probleme aus gewissen mechanischen oder elektrischen Fundamentalgesetzen, die sich auf die kleinsten Bausteine der Körper, die Moleküle und Atome, beziehen, herzuleiten — eine Aufgabe, die übrigens zurzeit noch keineswegs in einer Form gelöst ist, die den Anforderungen der praktischen Physiker oder der Ingenieure zu genügen vermöchte. Wir werden vielmehr den umgekehrten Weg gehen, den man als den induktiven oder phänomenologischen bezeichnet, der auf Grund direkter Beobachtungen Aussagen über den gesetzmäßigen Verlauf der Erscheinungen zu erschließen strebt, und wollen die einfacheren dieser Tatsachen aus gewissen Eigenschaften der kleinen und kleinsten Teile verstehen lernen. Die Bedeutung des induktiven Verfahrens für die Gewinnung wirklichkeitstreuer Bilder der Natur tritt übrigens in wenigen Teilen der Physik stärker hervor als gerade hier.

[1]) Bearbeitet von Prof. Dr. Th. Pöschl in Karlsruhe.

Die Kenntnis der Eigenschaften der nichtstarren, im gewöhnlichen Sinne **festen** Körper ist außer für die Fragen des täglichen Lebens, bei denen die **Festigkeit** der Körper eine Rolle spielt, vor allem für die **Technik** von höchster Wichtigkeit, die eine genaue Einsicht in das physikalische Verhalten der sogenannten „Baustoffe" fordert; in ihrer neueren Entwicklung sind diese Wissenszweige zu den umfangreichen Sonderdisziplinen der **Stoffkunde** und des **Materialprüfungswesens** ausgebildet worden. Für die neuzeitliche Technik liegt in der genauen Kenntnis der Eigenschaften der Baustoffe ein wirtschaftliches Moment von größter Bedeutung, da mit den Festigkeitseigenschaften die Abmessungen zusammenhängen, die den einzelnen Teilen irgend einer Konstruktion, sei dies nun eine Brücke, ein Flugzeug, eine Maschine, oder irgend ein anderes technisches Werk, zu geben sind. Je genauer diese Eigenschaften der Stoffe bekannt sind, um so geringer können — im allgemeinen — die Abmessungen gemacht werden, weil man keine überflüssige, oft in der ungenauen Kenntnis der Eigenschaften des verwendeten Materials begründete Überdimensionierung vorzusehen braucht. Es kommen dabei allerdings noch andere Umstände in Frage, die hier nur erwähnt werden können: die genaue Kenntnis des Kräftespiels in allen Teilen der Konstruktion, die Gleichförmigkeit (Homogenität) des Baustoffes, die Art und Weise seiner Herstellung u. dgl.

Darüber hinaus sind aber noch andere Zweige der Naturwissenschaften an den Fragestellungen interessiert, die in der Mechanik der nichtstarren Körper behandelt werden: so z. B. die moderne **Geologie**, soweit sie sich mit der Entstehung und den Veränderungen der Gebirge beschäftigt, wobei für das Verhalten der Gesteine die natürlichen Bedingungen maßgebend sind, die im Innern der Gebirge obwalten; und auch die **Biologie**, die über die Fragen der Festigkeit des tierischen und pflanzlichen Körpers und deren Veränderung während der verschiedenen Entwicklungsperioden grundsätzliche Aufschlüsse verlangt.

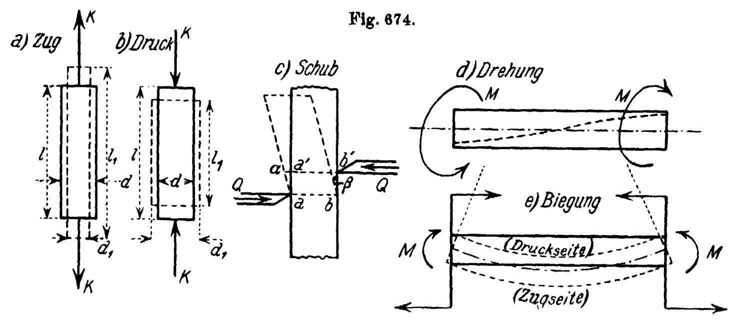
In dieser Übersicht soll nicht unerwähnt bleiben, daß die Festigkeitseigenschaften der Körper auch durch Kräfte nicht-mechanischer Art in Anspruch genommen werden können, wie dies z. B. bei der Frage der Durchschlagfestigkeit eines Dielektrikums durch elektrische Spannungsdifferenzen hervortritt. In diesem Kapitel wird jedoch nur das Verhalten der Körper bei rein mechanischer Beanspruchung, d. h. bei Beanspruchungen durch mechanische Kräfte, behandelt [1]).

---

[1]) Auf besondere Literaturnachweise ist in diesem Kapitel wegen seiner einführenden Beschaffenheit verzichtet worden. Bezüglich näherer Einzelheiten der behandelten Fragen sei hier zusammenfassend — aus der großen Literatur über diesen Gegenstand — nur auf die folgenden Werke aufmerksam gemacht: C. v. **Bach** und R. **Baumann**, Elastizität und Festigkeit, 9. Auflage, Berlin 1924. — A. **Föppl**, Vorlesungen über technische Mechanik, 6 Bde. Leipzig. — A. u. L. **Föppl**, Drang und Zwang, 2 Bde. München. — Th. v. **Kárman**, Artikel: „Elastizität" und „Festigkeit" in „Handwörterbuch der Naturwissenschaften". Jena 1915. — A. E. H. **Love**, Lehrbuch der Elastizität. Leipzig 1907. — A. **Nádai**, Die elastischen Platten, Berlin 1925, und Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin 1927. — G. **Sachs**, Mechanische Technologie der Metalle. Leipzig 1925. — Ferner Handb. d. Physik, Bd. VI, Berlin 1928, Handb. d. Mechanik, Bd. III (u. IV), Leipzig 1927.

§ 2. Typische Grundformen der Beanspruchung der Körper durch äußere Kräfte. Für die Beschreibung des Verhaltens der festen Körper, die durch äußere Kräfte belastet werden, ist eine Reihe von Begriffen erforderlich, die zunächst erklärt werden müssen; ihre Bedeutung tritt unmittelbar hervor, wenn wir die Vorgänge in ihrer natürlichen Folge betrachten, die sich an einem Körper unter der Wirkung äußerer Kräfte abspielen. Was zunächst diese Einwirkung selbst betrifft, so kann sie in verschiedenen Formen geschehen. Dem gewöhnlichen Sprachgebrauch folgend sagt man, der Körper wird durch solche einwirkende Kräfte „beansprucht", und je nach der Art dieser Beanspruchung unterscheidet man die folgenden typischen Grundformen, die für stabförmige Körper in Fig. 674 zusammengestellt sind:

Fig. 674.



Typische Grundformen der Beanspruchung. (Schematische Darstellung.)

a) Zug: Die Kräfte wirken in der Längsachse des Körpers und suchen ihn zu verlängern.

b) Druck: Die Kräfte wirken ebenso wie früher, aber in entgegengesetzten Richtungen, streben also den Körper zu verkürzen.

c) Schub: Die Kräfte wirken — nahezu in derselben Geraden — paarweise senkrecht zur Längsachse des Stabes und streben die Querschnitte *a b*, *a' b'* gegeneinander zu verschieben, abzuscheren.

d) Drehung (Torsion): Die Kräfte wirken als Drehmoment (Drillungs- oder Torsionsmoment) um die Längsachse des Stabes; sie verdrehen je zwei benachbarte Querschnitte des Stabes um ihre gemeinsame Achse gegeneinander und führen die geradlinigen Längsfasern in Schraubenlinien über.

e) Biegung: Die Kräfte wirken als Drehmomente (Biegemomente) um Achsen senkrecht zur Stabachse, also derart, daß sie eine Krümmung des ursprünglich geraden Stabes herbeizuführen streben (reine Biegung, d. h. Biegung ohne Schubkräfte).

In Wirklichkeit treten diese typischen Fälle nur ganz selten für sich allein auf, meist handelt es sich bei den wirklich vorkommenden Fällen um eine Vereinigung von zwei oder mehreren von ihnen. Für die Forschung ist es aber angezeigt, sie gesondert zum Ausgangspunkt der Betrachtungen zu nehmen. — Die Beanspruchungen, die in Körpern von nicht stab-

förmiger Gestalt auftreten, lassen sich auf diese einfacheren zurückführen.

Man beachte, daß die äußeren Kräfte — die Belastungen — in allen diesen Fällen so beschaffen sind, daß sie für sich im Gleichgewicht stehen, sowohl was die Einzelkräfte in den drei ersten, als auch was die Momente in den beiden letzten Fällen betrifft. Dasselbe muß natürlich auch für beliebige Belastungszustände zutreffen, sobald es sich um Körper handelt, die in Ruhe oder in gleichförmig-geradliniger Bewegung begriffen sind, sobald also von der Wirkung von Massenkräften (Trägheitskräften) abgesehen werden kann. Massenkräfte sind an das Vorhandensein von Beschleunigungen gebunden und sind weiterhin auf Grund des sogenannten d'Alembertschen Prinzips in ähnlicher Weise in die Rechnung einzuführen, wie wir dies bald für statische Kräfte kennenlernen werden.

§ 3. Formänderungen. Jeder Körper, der in einer von den in § 2 beschriebenen oder in einer ähnlichen Art von Kräften beansprucht wird, erfährt unter deren Einfluß gewisse Formänderungen oder Verzerrungen, die außer von der stofflichen Beschaffenheit des Körpers — vom Material — vor allem von der Größe und von der Art der Belastung (ob ruhend, bewegt, stoßartig oder dgl.) abhängen und im allgemeinen einen ziemlich verwickelten Verlauf zeigen.

Diese Formänderungen erstrecken sich bis in die kleinen, kristallinischen Teile des Körpers und machen sich einerseits als Änderungen der Längs- und Querabmessungen, andererseits als Winkeländerungen bemerkbar.

A. Beanspruchung auf Zug und Druck. Eine Zugbeanspruchung (nach Fig. 674a) verursacht eine Ausdehnung in der Längsrichtung, mit der gleichzeitig eine Verkürzung der Querabmessungen einhergeht, während eine Druckbeanspruchung (nach Fig. 674b) umgekehrt eine Zusammendrückung oder Verkürzung in der Längsrichtung hervorruft, die von einer Ausdehnung der Querabmessungen begleitet ist.

Sei bei Zug l die ursprüngliche Länge des Stabes und l_1 die Länge nach Aufbringung der Belastung, so ist also $l_1 - l = \lambda$ die Längenänderung oder die Verlängerung; die in Teilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte oder auf die Einheit der Länge des Stabes bezogene Längenänderung nennt man schlechthin die Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\lambda}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

die somit eine reine Verhältniszahl ist. Das Hundertfache dieses Zahlenwertes gibt die Dehnung in Hundertteilen (v. H.) oder in Prozenten an. Voraussetzung ist dabei, daß sich die Verlängerung gleichmäßig über die ganze Stablänge verteilt. Ist dies nicht der Fall, so muß man die Dehnung auf kleine (unendlich kleine) Längen beziehen, für die diese Annahme dann sicher als zutreffend angesehen werden kann. In diesem Falle wird dann auch die nach Gl. (1) definierte Dehnung mit dem Orte wechseln, also eine Funktion des Ortes sein.

Wenn z. B. $l = 20$ cm, $l_1 = 21$ cm, so ist

$$\varepsilon = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ oder } 5 \text{ v.H.}$$

Ganz entsprechend wird die Querverkürzung (Querzusammenziehung, Querkontraktion, Einschnürung) definiert als das Verhältnis der Differenz δ zwischen dem Durchmesser nach aufgebrachter Belastung (d_1) und dessen Anfangswert (d), in Teilen von d:

$$\varepsilon_q = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\delta}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Bei der Zugbeanspruchung sind also δ und ε_q negativ.

Bei der Druckbeanspruchung nach Fig. 674b tritt eine Verkürzung in der Längsrichtung und eine Dehnung in der Querrichtung (quer zur Stabachse) ein, die Größen ε, ε_q sind durch dieselben Gl. (1), (2) definiert und erhalten von selbst die entgegengesetzten Vorzeichen wie zuvor. Ganz ebenso werden diese Größen auch für Stäbe von anderem als Kreisquerschnitt erklärt: es handelt sich stets um den Unterschied entsprechender linearer Abmessungen in Teilen des zugehörigen Anfangswertes.

Als erstes Ergebnis der Beobachtungen merken wir sogleich an, daß das Verhältnis der absoluten Beträge

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{\text{Dehnung in der Längsrichtung}}{\text{Querverkürzung}} = m \quad \ldots \ldots (3)$$

(innerhalb gewisser Grenzen) als eine Materialkonstante angesehen werden kann; d. h. es hängt nur ab von der Beschaffenheit des betreffenden Stoffes, nicht aber von anderen geometrischen oder mechanischen Größen, wie z. B. den Abmessungen l, d oder der Belastung K. Dieses Verhältnis m bezeichnet man als das Poissonsche Verhältnis oder die Poissonsche Zahl. Ihr Kehrwert soll kurz die Querzahl genannt und mit ν bezeichnet werden[1]):

$$\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \frac{1}{m} = \nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

In der folgenden Tabelle 1 sind einige Zahlenwerte für diese Verhältnisse angegeben:

Tabelle 1.
Poissonsche Zahl m und Querzahl ν für einige Stoffe.

Stoff	m	$\nu = 1/m$
Eisen und Stahl (Metalle)	3 bis 4 (meist 10/3)	1/3 bis 1/4 (meist 3/10)
Gußeisen	4	1/4
Marmor	3,6 bis 4	1/3,6 bis 1/4
Granit	4 bis 5	1/4 bis 1/5
Tafelglas	4,4	1/4,4
Beton	8 bis 12 (∞)	1/8 bis 1/12 (0)
(Flüssigkeiten)	(2)	(1/2)

[1]) In den DIN (Deutsche Normen) Nr. 1350 wird statt ν der Buchstabe μ eingeführt. Die kurze Bezeichnung „Querzahl" wird vom Verfasser dieses Artikels vorgeschlagen.

B. Die **Beanspruchung auf Schub** ist durch das Auftreten von Winkeländerungen gekennzeichnet, indem die ursprünglichen rechten Winkel in der aus der Fig. 674c ersichtlichen Weise in schiefe Winkel übergehen. Solche Winkeländerungen treten auch bei der Drehung (Torsion) nach Fig. 674d auf, wo die ursprünglich parallel zur Stabachse liegenden Längsfasern in Schraubenlinien übergeführt werden, die zu den Querschnitten geneigt verlaufen. Die reine Biegung nach Fig. 674e besteht dagegen in einer Verlängerung (Dehnung) der Fasern auf der Zugseite und einer Verkürzung der Fasern auf der Druckseite, wobei keine Schubkräfte und daher auch keine Winkeländerungen auftreten.

Als Gleitung oder Schiebung bezeichnet man nach Fig. 674c das Verhältnis

$$\gamma = \frac{a' \alpha}{a' a} = tg\,\beta \sim \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

die Gleitung — wie die Dehnung eine reine Zahl — gibt also unmittelbar die Abweichung von dem ursprünglichen rechten Winkel zwischen der Längs- und Querrichtung des Stabes an.

§ 4. Raumdehnung.

Eine Längenänderung des Körpers in der Zug- oder Druckrichtung ist, wie wir eben sahen, stets von einer gegensinnigen Änderung von bestimmter Größe in der Querrichtung begleitet. Betrachtet man daher ein Teilchen in Form eines Würfels von der Kantenlänge 1 nach Fig. 675a, so wird die in der Längsrichtung liegende Kante 1 in $1 + \varepsilon$ übergeführt, während die Kanten 1 in den Querrichtungen auf die Längen $1 - \nu\varepsilon$ verkürzt werden. Der Inhalt des Würfels im verformten Zustande ist daher

Fig. 675.

a) Längsdehnung mit Querzusammenziehung.
b) Reine Schiebung.

$$(1 + \varepsilon)\,(1 - \nu\varepsilon)\,(1 - \nu\varepsilon),$$

und daher ist die Raumänderung (bis auf Größen zweiter Ordnung in ε):

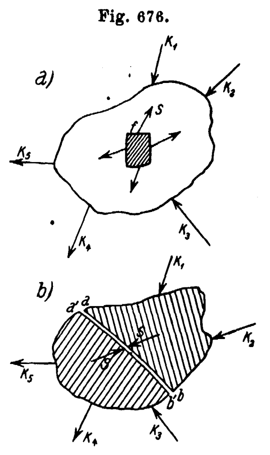
$$e = (1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 - 1 \sim 1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon - 1 = (1 - 2\nu)\varepsilon \quad \ldots (6)$$

Diesen Ausdruck nennt man die die Formänderung begleitende Raumdehnung oder die kubische Dilatation. Da nach der im vorigen Abschnitt gegebenen Tabelle immer $\nu < {}^1\!/_2$, also $2\nu < 1$, so ergibt sich daher bei Zug (ε positiv) immer eine Volumenvergrößerung, bei Druck (ε negativ) immer Volumenverkleinerung, was auch mit der Erfahrung übereinstimmt. Für $2\nu = 1$ oder $\nu = {}^1\!/_2$ erhalten wir $e = 0$, daher Raumbeständigkeit, welcher Fall bei den Flüssigkeiten (mit großer Annäherung) verwirklicht ist.

Bei reiner Schubbeanspruchung (Fig. 675b) geht jedes würfelförmige Teilchen in ein rhombisches von gleichem Rauminhalt über, daher ist die Raumdehnung für reinen Schub gleich Null.

§ 5. Einführung des Spannungsbegriffes. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildete die Tatsache, daß äußere Kräfte, die irgendwo am Umfange, an den Rändern oder Grenzen eines Körpers angreifen, sich in dessen Innern als Formänderungen oder Verformungen auswirken, die sich — wenn auch nicht überall in gleichem Maße — im allgemeinen doch über die ganze Ausdehnung des Körpers erstrecken[1]). Den Verlauf dieser Formänderungen in ihrer Beziehung zu den einwirkenden Kräften werden wir sogleich genauer betrachten müssen. Zuvor müssen wir nur den zweiten wichtigen Begriff, der hierzu nötig ist, einführen: den Spannungsbegriff.

Fig. 676.



Einführung des Spannungsbegriffes.

Ebenso wie die Wirkung der Belastung durch irgendwelche Vorrichtungen (Einspannungen) auf Teile der Grenzflächen des Körpers übertragen wird, so wird auch jedes beliebige Flächenstück im Innern des Körpers — als Grenzstück irgend eines Raumteiles betrachtet — wegen des Zusammenhanges des Körpers gewissen Kräften unterworfen sein. Jedes dieser Körperteilchen, über dessen Form und Lage wir zunächst keinerlei Voraussetzung zu machen brauchen, wird dann, wie das in Fig. 676 a hervorgehobene, unter dem Einfluß der an allen seinen Grenzflächen übertragenen Kräfte stehen, die in ihrer Gesamtheit eine Gleichgewichtsgruppe bilden werden, geradeso wie die gesamte äußere Belastung des Körpers für sich im Gleichgewicht angenommen worden war.

Für die längs der einzelnen Elemente der Grenzflächen wirkenden Kräfte ist es nun zweckmäßig, sie nicht unmittelbar in die Betrachtung einzuführen, sondern sie in Beziehung zu setzen zu der Größe der Fläche, auf die sie wirken; und zwar derart, daß jeweils die Größe der Kraft auf die Flächeneinheit angegeben wird. Sei S die gesamte auf die Fläche f entfallende Kraft (Fig. 676 a), so nennt man die Größe

$$\frac{S}{f} = \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

die Spannung in diesem Stück der Grenzfläche, d. h. also die Kraft auf ihre Flächeneinheit. Ist σ bekannt, so wird die Kraft auf die Fläche f selbst durch die Gleichung erhalten:

$$S = f \cdot \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Bei endlichen Flächen ist dieser Vorgang nur zulässig, wenn die Verteilung von S über die Fläche f als gleichförmig angesehen werden kann, bei

---

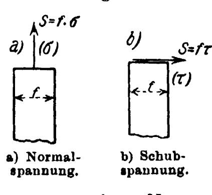
[1]) Dieselbe Wirkung haben natürlich auch raumhaft verteilte Kräfte, wie Gewichte oder Trägheitskräfte, ihr Einfluß ist aber meist nur sehr klein und wird hier ganz außer Betracht gelassen.

kleinen (unendlich kleinen) Flächen kann aber diese Annahme (von besonderen „singulären“ Ausnahmefällen abgesehen) unbedenklich immer gemacht werden. Die Spannung kann sodann als Maß für die „Beanspruchung“ oder „Anstrengung“ des betreffenden Flächenteilchens angesehen werden.

Gemäß der Gl. (7) wird die Spannung immer in der Form: Kraft/Fläche angegeben und im praktischen (technischen) Maßsystem in kg/cm², t/m², kg/mm² od. dgl. ausgedrückt. Jede Spannungsgröße hat die Dimension: Kraft/Fläche.

Um zu einer Vorstellung des Spannungsbegriffes zu gelangen, kann man sich auch den Körper nach Fig. 676 b durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegt denken; zur Herstellung des Zusammenhanges müssen dann längs dieses Schnittes Spannungen so eingeführt werden, daß sie zusammen mit den Kräften K, die auf den betreffenden Teil wirken, im Gleichgewicht sind. Es werden also, wenn S die Summe der Spannungen über den ganzen Schnitt bezeichnet, die folgenden Kräftegruppen im Gleichgewicht sein müssen: K_1, K_2, S und K_3, K_4, K_5, S. Und selbstverständlich muß die Summe (S) dieser Spannungen über das Randstück ab gleich groß und entgegengesetzt sein zur Summe der Spannungen über das Randstück $a'b'$.

Fig. 677.



a) Normalspannung. b) Schubspannung.

Je nach der Richtung der Spannung S gegen das betreffende Flächenteilchen unterscheidet man zwischen Normalspannungen und Schubspannungen. Steht S (und σ) normal zu der betreffenden Fläche f wie in Fig. 677a, so spricht man von einer Normalspannung, liegt S wie in Fig. 677b in der Richtung f, so spricht man von einer Schub- oder Gleitspannung; diese wird mit τ bezeichnet. — Man erkennt unmittelbar, daß in den Grundfällen Normalspannungen bei Zug und Druck (Fig. 674a, b) und bei Biegung (Fig. 674e), Gleitspannungen bei Schub (Fig. 674c) und bei Drehung (Fig. 674d) auftreten.

In einfachen Fällen kann die Größe der Spannung in jedem Punkte unmittelbar in ihrer Abhängigkeit von der Belastung angegeben werden. So wird man bei Zug oder Druck (siehe auch Fig. 678) im Anschluß an die oben gegebene Definition der Spannung unmittelbar sagen können, daß die Spannung in allen Querschnitten des Stabes die Größe haben muß:

$$\sigma = K/f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

sofern eine gleichförmige Verteilung angenommen werden darf; bei geeigneter Ausbildung des Kraftangriffs ist dieser Ansatz, wenigstens in einiger Entfernung von diesem, sicher sehr nahe richtig. Weit weniger genau würde schon die Berechnung der Schubspannungen im Falle der Fig. 674c oder in der Anordnung nach Fig. 679 (Vernietung) vermöge der entsprechenden Mittelwertsbildung ausfallen:

$$\tau = Q/f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

da hier eine gleichförmige Verteilung der Schubspannungen auch nicht annähernd erwartet werden kann.

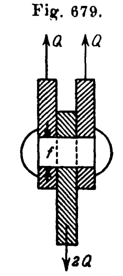
Dieser Sachverhalt, der beim ersten dieser Beispiele eintrat, wo die Spannung unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen abzulesen war, wie sie auch unverändert für vollkommen starre Körper gelten, stellt sich nur in ganz wenigen, besonders einfachen Fällen ein. Im allgemeinen ist in der Mechanik der nichtstarren Körper die Einführung besonderer Ansätze erforderlich, die das Verhalten der Körper äußeren Kräften gegenüber kennzeichnen und zu deren Aufstellung wir uns alsbald wenden müssen.

Fig. 678.

Gleichförmige Spannungsverteilung bei der Zugbeanspruchung.

§ 6. Der Spannungszustand in einem Punkte. Nach den eben getroffenen Festsetzungen kann von einer Spannung nur in Verbindung mit dem zugehörigen Flächenelement gesprochen werden, auf das sie wirkt. Im allgemeinen sind die Spannungen für alle Flächenelemente durch einen Punkt voneinander verschieden. Die Gesamtheit der auf alle Flächenelemente durch einen Punkt bezogenen Spannungen nennt man den Spannungszustand in diesem Punkte, und es entsteht die Frage, durch welche Bestimmungsstücke dieser Spannungszustand gekennzeichnet ist. Wir wollen diese Frage hier nur für den sogenannten ebenen Spannungszustand beantworten, bei dem nur Flächenelemente senkrecht zur Bildebene betrachtet werden, für welche also die Spannungen alle parallel zur Bildebene verlaufen sollen.

Fig. 679.



Nietverbindung.

Als erste Aussage allgemeiner Art ist anzumerken, daß die Schubspannungen in zwei zueinander senkrecht stehenden Flächenelementen immer einander gleich sein müssen. Es seien in Fig. 680 τ, τ_1 die Schubspannungen in den beiden gegenüberliegenden Paaren von Seitenflächen eines Vierflachs mit den Abmessungen a, b, h (h senkrecht zur Bildebene), so sind die Kräfte auf diese Flächen $\tau a h$, $\tau_1 b h$, und die Momentengleichung um den Mittelpunkt liefert unmittelbar

$$\tau . a h . b = \tau_1 . b h . a, \quad \text{also} \quad \tau = \tau_1 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

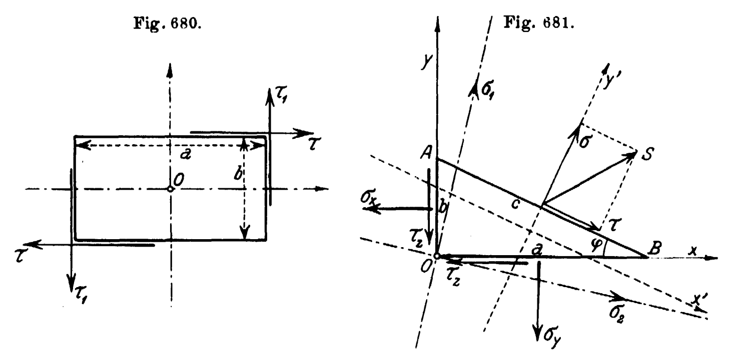
Um nun die Verteilung der Spannungen in allen Ebenen durch einen Punkt zu bestimmen, betrachtet man nach Fig. 681 ein Teilchen in Form eines dreiseitigen Prismas mit den Seiten a, b, c und der Höhe h. Wir nehmen die Spannungen auf die Seitenflächen ah, bh als bekannt an: es sind dies die Normalspannungen σ_x, σ_y und die (gleichen) Schubspannungen τ_z; durch sie wollen wir die Spannung auf die dritte Fläche ch mit den Komponenten σ, τ ausdrücken. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte (Kraft = Spannung × Fläche) für die Richtungen y', x' liefern sofort (nach Weglassung des Faktors ch) die Gleichungen:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2 \tau_z \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi - \tau_z (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{cases}$$

die wegen $sin^2 \varphi = (1 - cos\, 2\varphi)/2$, $cos^2 \varphi = (1 + cos\, 2\varphi)/2$ auch so geschrieben werden können:

$$\left|\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot cos\, 2\varphi + \tau_z\, sin\, 2\varphi, \\ \tau &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot sin\, 2\varphi - \tau_z\, cos\, 2\varphi. \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (12)$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man unmittelbar, daß durch die drei Größen σ_x, σ_y, τ_z die Spannungen σ, τ in allen anderen, zu den ursprünglichen x, y (unter φ und $\pi/2 - \varphi$) geneigten Ebenen bestimmt, also der Spannungszustand in diesem Punkte gegeben ist.



Gleichheit der Schubspannungen in senkrechten Ebenen.

Ermittlung der Spannungsverteilung in einem Punkte.

Für die Übersicht über die Verteilung der Spannungen ist es wichtig, jene Ebenen zu kennen, in welchen σ und τ extreme (größte oder kleinste) Werte annehmen. Für σ erhält man sie durch Nullsetzen der Ableitung:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 = -2\left[\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\, sin\, 2\varphi - \tau_z\, cos\, 2\varphi\right],$$

extreme Werte treten also für jene Winkel φ ein, für welche

$$tg\, 2\varphi = \frac{2\tau_z}{\sigma_y - \sigma_x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

ist, und man bestätigt sogleich, daß für diesen Wert von φ gleichzeitig $\tau = 0$ ist. Da $tg\, 2\varphi = tg\,(2\varphi + \pi)$, so gibt es zwei Richtungen, die diese Bedingung erfüllen, und diese stehen senkrecht zueinander. Diese Richtungen nennt man die **Hauptspannungsrichtungen** des betreffenden Punktes und die in ihnen herrschenden Spannungen die **Hauptspannungen** σ_1, σ_2. Ihre Größen findet man, indem man die Winkel φ und $\varphi + \pi/2$, die durch die Gl. (13) gegeben sind, in die vorhergehende Gleichung für σ einsetzt. Aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\, cos\, 2\varphi + \tau_z\, sin\, 2\varphi\right]$$

erhält man durch eine leichte Rechnung zunächst die beiden **Invarianten des ebenen Spannungszustandes**:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma_x \sigma_y - \tau_z^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

und aus ihnen:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

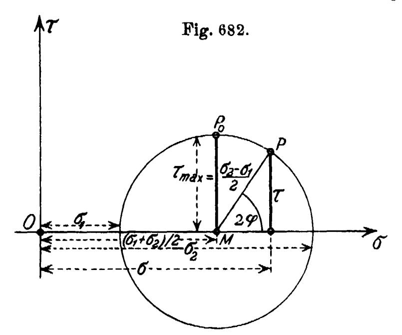
worin die beiden Vorzeichen $+$ und $-$ den beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 entsprechen.

Auf die Hauptspannungsrichtungen bezogen, nehmen die Gl. (12) für eine unter φ gegen σ_1 geneigte Ebene die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\varphi, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Aus ihnen erhält man unmittelbar die Darstellung des ebenen Spannungszustandes in einem Punkte durch den **Mohrschen Spannungskreis**

Fig. 682.



Mohrscher Spannungskreis.

dessen Gleichung in laufenden Koordinaten σ, τ durch Entfernung von φ aus diesen Gleichungen in der Form erscheint:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

(Fig. 682); sein Halbmesser ist $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$, die Entfernung seines Mittelpunktes vom Punkte O: $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$. Für später merken wir an, daß der größte Wert der Schubspannung die Größe

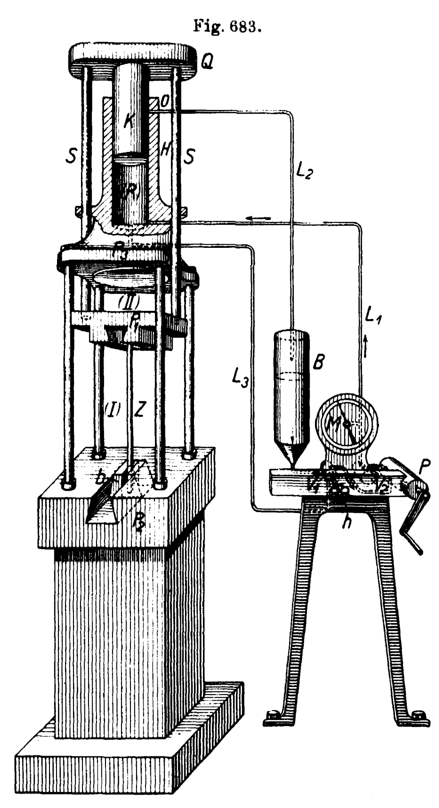
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

hat, also die halbe Differenz der Hauptspannungen, und in Ebenen unter $\pm 45^0$ gegen die Hauptspannungen auftritt.

Wir kehren nunmehr zur Betrachtung der Formänderungen und der Beziehungen zwischen Formänderungen und Spannungen zurück.

§ 7. Prüfung der Festigkeitseigenschaften. Der Zug- und Druckversuch. Für die Erforschung der Formänderungen eines Körpers in Abhängigkeit von der Belastung stehen besondere Festigkeits-Prüfmaschinen in Verwendung, die eine zweckmäßige Durchführung der Versuche in allen Einzelheiten gestatten. Von den verschiedenen Arten, in denen diese Versuche angestellt werden können, zeichnet sich der Zugversuch durch seine einfachen statischen Verhältnisse, die schon oben dargelegt wurden, und durch seine leichte Ausführung besonders aus, und darauf beruht auch seine überragende Bedeutung im Materialprüfungswesen. Schon der Druckversuch zeigt (in theoretischer Hinsicht) lange nicht diese Einfachheit, und alle anderen Versuchsanordnungen, die erprobt worden sind, stehen an Wichtigkeit weit hinter diesen beiden zurück.

Fig. 683.

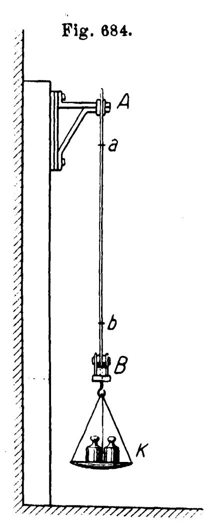


Festigkeitsprüfmaschine der Firma Amsler & Co., Schaffhausen.

In Fig. 683 ist eine schematische Darstellung einer Festigkeits-Prüfmaschine nach Bauart der Firma Amsler & Co., Schaffhausen, Schweiz, dargestellt. Die Einrichtung der Maschine ist so getroffen, daß sie sowohl Zug- als auch Druckversuche auszuführen gestattet. In der Figur ist die Maschine als Zerreißmaschine in Verwendung gedacht. Der Probestab Z, dessen Enden für diese Maschine prismatisch geformt sein müssen, wird durch Beißkeile b, b zwischen starke Stahlplatten P_1, P_2 im Raume (I) eingespannt, von denen die obere, P_1, beweglich ist und mittels der Stangen S, S und dem Querstück Q mit dem Kolben K zu einem Ganzen verbunden ist; der Kolben K ist in den Zylinder H geführt und wird durch Drucköl betätigt. — Für den Druckversuch wird der Versuchskörper in den oberen Raum (II) zwischen die bewegliche Platte P_1 und die obere Grundplatte P_3 gebracht und der durch den gleichen Arbeitsgang erzeugten Druckbelastung unterworfen.

Das Betriebsöl fließt aus dem Behälter B durch das Saugventil V_1 der Spiralpumpe P zu und wird von dieser durch das Druckventil V_2 und die Rohrleitung L_1 in den Kolbenraum (R) gedrückt. Zur Verhinderung des Heraustretens des Kolbens K aus dem Zylinder H ist am oberen Ende des Kolbenraumes eine Entlastungsöffnung o vorgesehen, die durch die Leitung L_2 unmittelbar mit dem Behälter B in Verbindung steht. Gelangt der Kolben in die Nähe seiner oberen Hubgrenze, so wird diese Öffnung o durch den Kolben K freigegeben, und das durch die Pumpe P zugeführte Drucköl fließt bei unveränderter Stellung des Kolbens K durch die Leitung L_2 in den Behälter B zurück. Die Rückführung des Kolbens K in seine Ausgangslage geschieht mittels eines durch Drehung des Handrades h betätigten Ventils, wodurch eine direkte Verbindung zwischen dem Kolbenraum (R) und dem Behälter B durch die Leitung L_3 hergestellt wird. Zur Druckanzeige ist an die Leitung L_1 das Manometer M angesetzt.

Fig. 684.



Prüfung der Dehnung und Festigkeit von Drähten und dünnen Stäben.

Durch besondere Anordnungen ist eine selbsttätige Aufschreibung der für den Probekörper erhaltenen Versuchswerte (der Spannungs-Dehnungslinien) möglich.

Für Messungen im physikalischen Laboratorium, also etwa zur Untersuchung der Festigkeitseigenschaften von Drähten oder dünnen Stäben, kann eine einfache Vorrichtung verwendet werden, die schematisch in Fig. 684 angegeben ist. Der Draht wird an seinem einen Ende A fest eingeklemmt, am anderen, B, mit einer Waagschale versehen, die mit Gewichten K belastet werden kann. An dem Draht sind zwei Marken a, b angebracht, deren Entfernung für jeden Wert von K durch eine Längenmeßvorrichtung (Kathetometer) gemessen werden kann. Der Mangel dieser Anordnung liegt vor allem darin, daß eine stetig zunehmende Belastung, wie sie bei den Festigkeits-Prüfmaschinen durch Betätigung einer hydraulischen Presse bewirkt wird, hier nicht möglich ist, was insbesondere im Fließbereich und in der Nähe der Bruchlast Anlaß zu Ungenauigkeiten gibt, und daß sie eine selbsttätige Aufschreibung der σ-ε-Linie nicht zuläßt.

Beispiel. An einem Kupferdraht von $ab = 1$ m Länge und 1 mm² Querschnitt wird beobachtet, daß bis zu einer Belastung von 12 kg die bleibende Dehnung unter 0,03 mm, also 0,003 v. H. bleibt, und daß bei dieser Belastung der Draht eine elastische Verlängerung von 0,93 mm erfährt; weiter, daß er im ganzen um 3 mm verlängert werden kann, ehe der Bruch eintritt, was bei etwa 22 kg der Fall ist.

§ 8. Elastizität, Proportionalität, Plastizität. Die mit Hilfe derartiger Prüfeinrichtungen ausgeführten Versuche lassen zunächst erkennen, daß die Körper hinsichtlich ihrer Festigkeitseigenschaften ein sehr verschiedenes

Verhalten zeigen, wobei sich insbesondere zwei Gruppen voneinander trennen lassen: zur ersten gehören die Metalle und Metallegierungen, zur zweiten Stoffe wie Marmor (Gesteine überhaupt), Beton, Holz, Leder, Lehm, Ton u. dgl.

A. Metalle. Aus dem zu untersuchenden Metall werden Probestäbe in ganz bestimmten (normalisierten) Abmessungsverhältnissen hergestellt, und zwar entweder als Rundstäbe [1]) mit kegeligen Enden nach Fig. 685 a oder als Flachstäbe mit prismatischen Enden nach Fig. 685 b, und in der Prüfmaschine einer allmählich anwachsenden Zugbelastung unterworfen. Kennzeichnend für das Verhalten der Metalle ist vor allem, daß sich bei gewöhnlicher

Fig. 685.

a) und b) Normalisierte Probestäbe.

Temperatur — also weitab vom Schmelzpunkt — deutlich zwei Bereiche für die Belastung unterscheiden lassen, eine Unterscheidung, die sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht von außerordentlicher Wichtigkeit ist. Im ersten Bereich, das ist bei niedrigen Belastungen, besitzen die Metalle die Eigenschaft, daß die Dehnung in demselben Verhältnis ansteigt wie die Spannung; in diesem Bereiche zeigen die Metalle weiter die Eigenschaft, daß die Formänderungen fast vollständig verschwinden, sobald die Belastung weggenommen wird, so daß der Stab dann fast genau seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. Man bezeichnet die erste Eigenschaft als Proportionalität, die zweite als Elastizität. Unter Proportionalität versteht man also die verhältnisgleiche Änderung der Dehnung mit der Spannung (gilt nur bei einzelnen Stoffen und in begrenzten Bereichen!) — Elastizität ist dagegen die Fähigkeit der Rückbildung einer Formänderung bei Fortnahme der diese Formänderung erzeugenden Belastung.

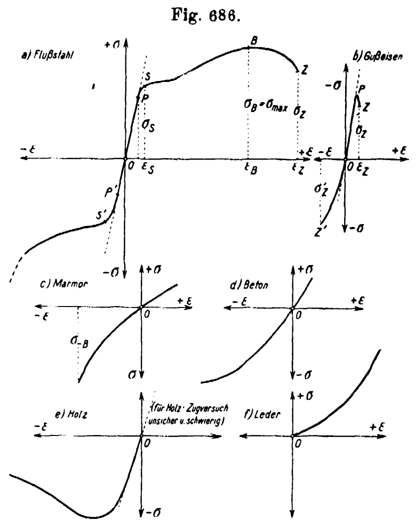
Auch Flüssigkeiten und Gase sind elastisch, und zwar in dem Sinne, daß bei ihnen bei Wegnahme der Belastung nur die Raumänderung (Volumenänderung) rückgängig ist, während bei festen Körpern auch die ursprüngliche Gestalt wieder angenommen wird. Man drückt diesen Sachverhalt durch die Aussage aus, daß Flüssigkeiten und Gase nur Raumelastizität besitzen, während die festen Körper durch Raum- und Formelastizität ausgezeichnet sind.

Man pflegt diese Beziehung zwischen zusammengehörigen Werten der Spannung σ und der Dehnung ε, die aus der Belastung und Formänderung

[1]) Neben den Langstäben mit den in Fig. 685 a eingetragenen Abmessungen mit $l = 10\,d = 10\sqrt{4\,F/\pi} = 11{,}3\sqrt{F}$ werden — seltener — auch Kurzstäbe mit $l = 5\,d$ verwendet.

errechnet werden, durch eine Spannungs-Dehnungslinie (σ-ε-Linie) bildlich darzustellen, indem man auf der wagerechten Achse die Werte von ε, auf der lotrechten die von σ in passenden Maßstäben aufträgt. Für Stahl ergibt sich dann etwa der in Fig. 686 a dargestellte Verlauf. — Beide Eigenschaften, die Proportionalität und die Elastizität, gelten nur bis zu einer gewissen Grenze für die Belastung (oder Spannung), die man als die Proportionalitätsgrenze und die Elastizitätsgrenze bezeichnet (die nicht zusammenzufallen brauchen). Die erstere ist in der Fig. 686 a mit P bezeichnet und verhältnismäßig einfach und sicher zu bestimmen, während die Ermittlung der Elastizitätsgrenze unsicher und schwierig ist, weshalb von ihrer unmittelbaren Feststellung praktisch meist abgesehen wird. Es wird vielmehr in der Praxis — bis zu einem gewissen Grade willkürlich — für die Elastizitätsgrenze jene Spannung festgesetzt, bei der die sogenannte „bleibende Dehnung“, die sogleich näher erklärt wird, einen bestimmten Betrag nicht überschreitet: und zwar 0,001 v. H. nach den internationalen Vorschriften (Brüssel 1906) oder 0,03 v. H. nach Krupp (und von Bach), oder 0,003 v. H. nach den Festsetzungen des Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem.

Fig. 686.



Spannungs-Dehnungs-Linien für verschiedene Werkstoffe.

Bis zur Proportionalitätsgrenze sind die Dehnungen verhältnismäßig klein und verlangen zu ihrer Aufnahme besondere Feinmeßgeräte (Dehnungsmesser mit Spiegelablesung u. dgl.).

Der weitere Verlauf der σ-ε-Linie zeigt nun ein von der Proportionalität stark abweichendes Verhalten (zweiter Bereich). Unmittelbar nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze zeigt die Kurve einen deutlichen Knick, und bald (etwa im Punkte S) beginnt ein rasches Anwachsen der Dehnung — ein Fließen — bei schwächer zunehmender (manchmal sogar abnehmender) Spannung. Diese Stelle S wird als die (obere) Streckgrenze[1]) oder Fließgrenze bezeichnet; sie ist bei Stahl und anderen Stoffen deutlich ausgeprägt

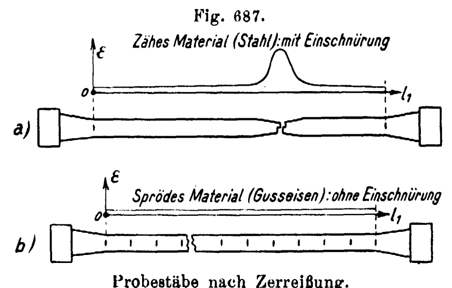
[1]) Bei manchen Stoffen erfolgt nach Erreichung der oberen Streckgrenze ein Sinken der Spannung auf einen kleineren Wert, bevor ein neuerliches Anwachsen bis zur Bruchspannung einsetzt; den Wert der Spannung für diesen zweiten Um-

und ist gerade dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr merkliche bleibende oder plastische Formänderungen aufzutreten beginnen, die nicht mehr die Eigenschaft haben, bei Wegnahme der Belastung zu verschwinden.

Ein Material, das in seinem Verhalten den Fließbereich aufweist, bevor es zu Bruche geht, bezeichnet man als zäh — in Anlehnung an die bei den sehr zähen Flüssigkeiten, wie etwa Honig, vorhandenen Merkmale. Im Gegensatz hierzu nennt man Körper, die diesen Fließbereich vor Eintritt des Bruches nicht zeigen, wie etwa Gußeisen oder Glas, spröde. Man beachte, daß elastisch und spröde nicht Gegensätze bedeuten müssen. Derselbe Körper, aus Glas etwa, der für kleine Dehnungen elastisch ist, kann für größere spröde sein; in diesem Sinne sind also Glas, Gußeisen u. dgl. gleichzeitig elastisch und spröde.

Unter Plastizität versteht man die Eigenschaft eines Materials, bleibende Formänderungen anzunehmen; diese Eigenschaft tritt, wie eben erwähnt, in der Regel bei einem bestimmten Wert der

Fig. 687.



Probestäbe nach Zerreißung.
a) Stahlstab: mit Einschnürung. b) Gußeisenstab: ohne Einschnürung.

Spannung ein, den man als Streckgrenze bezeichnet. Mit der Plastizität ist eine andere Grundeigenschaft der Metalle verbunden, die man als Verfestigungsfähigkeit bezeichnet, und beide zusammen begründen die Möglichkeit, durch Bearbeitung, also durch die Vorgänge des Walzens, Ziehens, Hämmerns, Biegens u. dgl., bestimmte Gebrauchsformen herzustellen, eine Möglichkeit, die in der neuzeitlichen Technik in größtem Maßstabe verwertet wird.

Bei weiterer Zunahme der Belastung erreicht die Spannung sodann im Punkte B ihren größten Wert $\sigma_B = \sigma_{\max}$, und bis dahin erstrecken sich die Formänderungen ziemlich gleichmäßig über den ganzen Stab. Von da an tritt jedoch bei zähen Stoffen (Stahl) unter merklicher Aufrauhung der vorher glatten Oberfläche eine örtliche Einschnürung nach Fig. 687a ein, und zwar an der Stelle, die durch die stets vorhandenen kleinen Unterschiede des Gefüges als die schwächste — man nennt diese: „Lockerstellen“ des Gefüges — diesen Vorgang besonders begünstigen mag. Diese Einschnürung nimmt rasch zu, worauf die Teilchen bald ihren Zusammenhang verlieren und der Stab unter den bei Z geltenden Werten σ_Z, ε_Z zerreißt. Die größte Spannung σ_B

nennt man die Zerreißspannung (oder Bruchspannung), ε_Z die Bruchdehnung. Die Verteilung der Dehnungen ε über den ganzen Stab im Augenblick des Bruches ist in Fig. 687 a eingezeichnet. Die starke Abnahme der Belastung unmittelbar vor dem Bruche ist bereits als eine Folge der beginnenden örtlichen Trennungen der Teilchen aufzufassen. Die Bruchstelle selbst zeigt je nach der Qualität des Materials eine mehr oder weniger unregelmäßige Beschaffenheit.

Bei den modernen Festigkeits-Prüfmaschinen wird die Spannungs-Dehnungslinie selbsttätig aufgeschrieben, wobei gewöhnlich die gesamte Belastung und die gesamte Längenänderung zur Aufzeichnung gelangt. Die Spannung wird jeweils als der Wert des Quotienten Belastung/Fläche erhalten, wobei als Fläche stets die ursprüngliche Querschnittsfläche des Stabes genommen wird. Insbesondere wird angesetzt:

$$\text{Bruchspannung } \sigma_B = \frac{\text{Bruchbelastung } K_{\max}}{\text{ursprünglicher Stabquerschnitt}}.$$

In der Fig. 686 a ist weiter nach der Seite der negativen σ- und ε-Achsen, also der Zusammendrückungen, hin das Verhalten desselben Materials beim Druckversuch dargestellt, der in ähnlicher Weise ausgeführt wird wie der Zugversuch, nur meist (wegen der Möglichkeit der Knickung) mit weniger schlanken Probekörpern. Zunächst gibt es wieder einen Bereich der Proportionalität, sodann folgt bei S' die Streckgrenze für Druck, auch Quetschgrenze genannt, und daran schließt sich ein Fließbereich, der bei zähen Stoffen (Stahl) sehr weit gesteigert werden kann, ohne daß ein Bruch erzielt werden könnte, was in der Fig. 686 a durch die punktierte Fortsetzung der Kurve im Druckbereich angedeutet ist. — Beachtenswert ist der merklich geradlinige Verlauf von P' über O hinweg nach P, der uns bald die Grundlage zu einem der wichtigsten Gesetze der Elastizitätslehre liefern wird.

Bei spröden Metallen wie Gußeisen tritt beim Zugversuch im wesentlichen nur der erste Bereich auf (Fig. 686 b); der Bruch erfolgt entweder unmittelbar am Ende dieses Proportionalitätsbereiches oder nach einem Knick und kurzem Abfall der σ-ε-Linie. Eine Streckgrenze ist nicht vorhanden, ebenso fehlt die Einschnürung (im Momente des Bruches hat der Stab das in Fig. 687 b dargestellte Aussehen), der Stab geht unmittelbar nach Erreichung bestimmter Werte σ_B, ε_Z, die man wieder als Bruchspannung und Bruchdehnung bezeichnet, zu Bruche. (In Fig. 686 b ist nur σ_Z, ε_Z eingetragen.) — Auch der Druckversuch liefert den Bruch bei Erreichung einer bestimmten Druckbelastung σ'_Z, oder σ_{-B}, bis zu welcher die σ-ε-Linie meist schwach gekrümmt verläuft. Eine so weitgehende Symmetrie zwischen dem Zug- und dem Druckbereich, wie wir sie bei zähen Stoffen feststellen konnten, ist hier nicht mehr vorhanden.

B. Die Stoffe der zweiten Gruppe sind bezüglich ihres Verhaltens bei Belastungen dadurch gekennzeichnet, daß von einer Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung auch bei kleinen Spannungen nicht mehr gesprochen werden kann, und daß auch eine Symmetrie der σ-ε-Linie für den

Zug- und Druckbereich, wie wir sie bei den zähen Metallen exakt feststellen konnten, fehlt. In Fig. 686c bis f sind diese Linien für Marmor, Beton, Holz (Zugversuch unsicher und schwierig) und Leder (nur bei Zug untersucht: Treibriemen) eingetragen. Man beachte auch, daß bei Marmor die Kurve gegen die ε-Achse entgegengesetzt gekrümmt ist wie für Beton und Leder. Diese Stoffe zeigen auch schon bei kleiner Belastung merkliche bleibende Formänderungen, von einem eigentlichen Fließbereiche kann jedoch nicht gesprochen werden, da das Hauptkennzeichen dafür fehlt: das Anwachsen der Dehnung bei gleichbleibender oder schwach anwachsender Spannung.

Daneben gibt es noch andere Stoffe, denen die Eigenschaft der Elastizität fast vollständig fehlt, die also schon bei den kleinsten Formänderungen ein plastisches Verhalten zeigen, Beispiele dafür sind Lehm, Ton u. dgl.

Zusammenfassend lassen sich demgemäß die Stoffe nach ihren wichtigsten Eigenschaften etwa in folgender Weise unterscheiden:

I. Zähe Stoffe. Kennzeichen: Ausgebildeter Proportionalitätsbereich, Elastizität, ausgreifender Fließbereich. Beispiele: Viele Metalle, insbesondere Stahl. Bezüglich der Proportionalität bis zu mäßigen Dehnungen auch Gußeisen.

II. a) Spröde Stoffe. Kennzeichen: Mäßig ausgebildeter Proportionalitätsbereich, geringe Elastizität, kein Fließen (unter gewöhnlichen Umständen). Beispiele: Gußeisen, Gesteine, Beton, Glas.

b) Bildsame (plastische) Stoffe. Kennzeichen: Auftreten merklicher bleibender Formänderungen schon bei kleinen Spannungen, fast vollständiges Fehlen der Elastizität, kein Fließen. Beispiele: Lehm, Ton.

Es muß jedoch ausdrücklich bemerkt werden, daß auch diese Unterscheidung keineswegs absoluten Charakter besitzt und auf absolute Gültigkeit Anspruch machen kann. Bedeutungsvolle Versuche (von v. Kárman u. a.) haben nämlich gezeigt, daß Stoffe, die wir unter gewöhnlichen Umständen als spröde kennen (wie Marmor und andere Gesteine), durch Anwendung allseitigen hydrostatischen Druckes in bildsame oder plastische übergeführt werden können. Die Ergebnisse dieser Versuche sind geeignet, die Formänderungen der natürlichen Gesteine in Gebirgen (das Fließen, Verwerfen u. dgl.) unter dem Einfluß des natürlichen Gebirgsdruckes verständlich zu machen.

§ 9. Das Hookesche Gesetz. Mit der Ermittlung der Spannungs-Dehnungslinie für einen bestimmten Probestab ist die Aufgabe der Physik noch lange nicht erschöpft. Es erhebt sich vielmehr sogleich die Forderung, für die durch Versuche gefundenen Ergebnisse einfache Rechnungsansätze aufzustellen, die jene Ergebnisse in Form eines mathematischen Gesetzes in sich vereinigen. — Weiterhin tritt die Frage auf, wie sich diese Formänderungen im Innern des Körpers, im Kleingefüge des Stoffes, auswirken und endlich, wie diese Gesetze aus allgemeinen Vorstellungen über die Eigenschaften der kleinsten Teile — der Atome — verstanden werden können. Diese letzte Frage greift schon tief in das Gebiet der neueren Atomphysik ein und kann ohne umfangreiche besondere Hilfsmittel nicht in Angriff genommen

werden; übrigens ist sie, wie schon oben bemerkt, heute noch keineswegs als gelöst anzusehen, so daß wir hier nicht weiter auf sie eingehen werden.

Bei den auf die erste Frage bezüglichen Ergebnissen unterscheiden wir die Vorgänge für Zug und für Schub und gelangen zu folgenden Aussagen:

a) Für Zug: Bei Betrachtung der Fig. 686 fällt unmittelbar in die Augen, daß an die Aufstellung eines einheitlichen, alle die Besonderheiten dieser Linien berücksichtigenden Gesetzes, das deren ganzen Verlauf umfaßt und dabei hinreichend einfach ist, nicht gedacht werden kann. Mit der für praktische Zwecke erforderlichen Einfachheit läßt sich vielmehr nur der Bereich der Proportionalität — soweit ein solcher vorhanden ist — wiedergeben. Die für diesen geltende lineare Beziehung wird in der Form angeschrieben:

$$\sigma = E . \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha . \sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

in der $E = 1/\alpha$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Dieser Ansatz ist das Grundgesetz der theoretischen Elastizitätslehre und ist unter dem Namen des Hookeschen Gesetzes bekannt. Es wurde 1676 durch Robert Hooke (1635 bis 1702) in Form des Anagramms: ceiiinosssttvv ausgesprochen, dessen Lösung lautet: Vt tensio sic vis, d. h. in unserer Ausdrucksweise: Wie die Dehnung so die Spannung. Seine Auffindung ist als eine große und frühzeitige Leistung der theoretischen Physik zu betrachten und ist ganz im Sinne Kants als rein wissenschaftlich zu bewerten, nach dessen klassisch gewordenen Worten in jeder besonderen Naturlehre nur so viel reine Wissenschaft steckt, als Mathematik in ihr enthalten ist.

In praktischen Rechnungen wird oft das Hookesche Gesetz auch für solche Stoffe (wie Gesteine, Beton u. dgl.) als zu Recht bestehend angenommen, die nur einen kleinen oder überhaupt keinen Proportionalitätsbereich haben; da muß man sich darüber klar sein, daß die aus ihm abgeleiteten Folgerungen nur einen beiläufigen Einblick in die wirklichen Verhältnisse bieten können. In diesen Fällen ist überdies noch eine besondere Festsetzung darüber notwendig, was unter E zu verstehen ist.

Von v. Bach u. a. ist auch versucht worden, das von der Proportionalität abweichende Verhalten der Stoffe der zweiten Gruppe durch ein Potenzgesetz von der Form darzustellen:

$$\sigma = E . \varepsilon^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

in der n eine positive oder negative Zahl und E eine Konstante bedeutet; dies ist für einen gewissen Bereich der σ-ε-Linien für diese Stoffe tatsächlich möglich, doch sind derartige Ansätze weiterhin nur in ganz vereinzelten Fällen verwertet worden und haben praktisch nur geringe Bedeutung erlangt.

Den Faktor E nennt man die Elastizitätszahl (auch Elastizitätsmodul oder Hookesche Konstante) und ihren Kehrwert $\alpha = 1/E$, der von v. Bach eingeführt wurde, die Dehnungszahl (Dehnungsmaß). Da ε eine unbenannte Zahl ist, so wird E im Hookeschen Gesetz als Kraft/Fläche auszudrücken sein, praktisch also in kg/cm², kg/mm² oder t/m².

Das bisher Gesagte läßt nun auch eine Unterscheidung erkennbar werden, die hinsichtlich der in der Mechanik der nichtstarren Körper behandelten Fragen einzuführen ist. Und zwar wird jener Teil dieses Gebietes, der das

Hookesche Gesetz und dessen Folgerungen benutzt, der sich also im wesentlichen auf den Proportionalitätsbereich bezieht, als Elastizitätslehre bezeichnet, während der umfassendere, der auch das Verhalten der Körper im ganzen Bereich der σ-ε-Linien einbezieht, also insbesondere Vorgänge beim Fließen und beim Bruch, als Festigkeitslehre bezeichnet wird. In der letzten Zeit ist es auch gelungen, in theoretischer Weise gewisse Fragen zu beantworten, die das Auftreten bleibender (plastischer) Formänderungen betreffen, wodurch die Grundlagen zu einer Plastizitätstheorie geschaffen wurden. Endlich sind für die Erscheinungen des Bruches selbst besondere Bruchtheorien ausgebildet worden. Sinngemäß sind daher Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie und Bruchtheorie als Teilgebiete der allgemeinen Festigkeitslehre anzusehen.

Eine solche Proportionalität zwischen Ausdehnung in Richtung der Achse und Belastung zeigen auch — in bestimmten Bereichen — schraubenförmig gewundene Metalldrähte von nicht zu kleiner Härte, sogenannte Schraubenfedern, wobei jedoch, wie in § 21 noch erläutert wird, wohl zu beachten ist, daß es sich bei diesen nicht um eine Beanspruchung des Materials auf Zug, sondern auf Torsion handelt, die durch das Auftreten von Schubspannungen in den Querschnitten gekennzeichnet ist.

Im Anschluß an den in § 4 eingeführten Begriff der Raumdehnung e sei hier noch bemerkt, daß bei allseitiger Beanspruchung eines Teilchens mit der Spannung σ die Raumdehnung das Dreifache des Ausdruckes (6) ausmacht; sie ist also vom Betrage:

$$3\,e = 3\,(1-2\,\nu)\,.\,\varepsilon = \frac{3\,(1-2\,\nu)}{E}\cdot\sigma = \frac{\sigma}{k},$$

wobei die Größe

$$k = \frac{E}{3\,(1-2\,\nu)} \qquad \text{(21)}$$

als die Kompressibilität oder Zusammendrückbarkeit des betreffenden Stoffes bezeichnet wird.

b) Für Schub: Ganz ähnlich wie für Normalspannungen (Zug und Druck) und Dehnungen kann das Hookesche Gesetz für Schubspannungen und Gleitungen in der Form angesetzt werden:

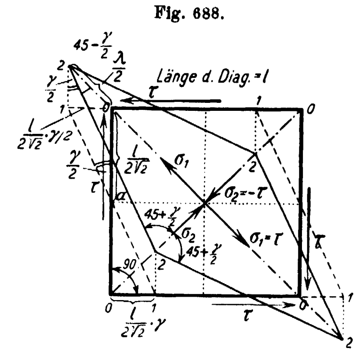
$$\tau = G\,.\,\gamma \qquad \text{(22)}$$

worin G einen neuen Proportionalitätsfaktor bedeutet, der als das Gleitmaß (Gleitmodul oder Schubmodul, manchmal auch Torsionsmodul) bebezeichnet wird. Sein Kehrwert $1/G = \beta$ heißt (nach v. Bach) die Gleitzahl oder Schubzahl. Dieser Ansatz spricht den linearen Zusammenhang von τ und γ im Proportionalitätsbereiche aus.

Dadurch sind bisher zusammen drei Konstante ν, E, G zur Beschreibung des elastischen Verhaltens eingeführt worden. Eine einfache Betrachtung zeigt jedoch, daß zwischen diesen für einen elastisch-isotropen Körper eine Bedingungsgleichung besteht, so daß nur zwei voneinander unabhängig bleiben; es folgt daraus, daß das elastische Verhalten eines isotropen Körpers durch zwei Konstante bestimmt ist.

Zur Aufstellung dieser Bedingungsgleichung fassen wir nach Fig. 688 ein Teilchen in Form eines Würfels 0000 ins Auge, an dem an zwei Paaren gegenüberliegender Seitenflächen die Schubspannungen τ in der gezeichneten Weise angreifen mögen; wie schon in § 6 erörtert, müssen diese alle die gleiche Größe haben, damit das Teilchen im Gleichgewicht ist. Weiter erkennt man aus der Abbildung, daß bei dieser Beanspruchung des Teilchens in der Richtung der Diagonalen die Hauptnormalspannungen auftreten müssen, und zwar die Zugspannung $\sigma_1 = \tau$ und die Druckspannung $\sigma_2 = -\tau$, so daß das Teilchen in die rhombische Form 2222 übergeht.

Fig. 688.



Verformung eines Teilchens durch Schubspannungen.

Die Diagonale l, die von rechts unten nach links oben läuft, erfährt wegen dieser Normalspannungen σ_1 und σ_2 eine Gesamtdehnung im Betrage

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\,\sigma_2}{E} = \frac{1+\nu}{E}\cdot\tau$$

und die andere Diagonale eine Verkürzung vom selben Betrage. Die Formänderung besteht in den Verschiebungen 01 wegen der wagerechten und 12 wegen der lotrechten Schubspannungen. Wenn γ die Gleitung ist, so ist der Winkel von 90^0 der Würfelseiten in $90+\gamma$ übergegangen, und daher ist der Drehwinkel der Würfelseiten $+\gamma/2$. Aus den Dreiecken $a\,01$ und 012 folgt daher unmittelbar für die Strecke:

$$\overline{01} = \frac{l}{2\sqrt{2}}\cdot tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{l}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\gamma}{2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}$$

und damit:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\gamma}{2} = \frac{1+\nu}{E}\cdot\tau;$$

demnach ist:

$$\tau = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\cdot\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

so daß gemäß der Gl. (22) die gesuchte Beziehung in der Form erscheint:

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Das elastische Verhalten eines isotropen Körpers ist daher durch zwei von den drei Konstanten E, G, ν vollständig gekennzeichnet.

§ 10. Die allgemeine Form des Hookeschen Gesetzes. Da nach § 3 jede Spannung eine gleichsinnige Änderung der Länge der Körperteilchen in der Richtung der Spannung und gegensinnige Änderungen vom ν-fachen

Betrage in den dazu senkrechten Richtungen verursacht, so können die Gesamtdehnungen nach x, y, z in der folgenden Form angesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} E \cdot \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E \cdot \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ E \cdot \varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Diese Gleichungen nach $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ aufgelöst, lauten so:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}[\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

Wenn u, v, w die elastischen Verschiebungen eines Raumpunktes nach den Achsenrichtungen sind, so sind (nach den früheren Festsetzungen) die Dehnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ nach diesen Richtungen durch die Ausdrücke definiert:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

und daraus folgt für die Raumdehnung:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

In ähnlicher Weise lauten die entsprechenden Aussagen bezüglich der Schubspannungen, daß die gesamte Winkeländerung des ursprünglich rechten Winkels zweier Flächenelemente den in diesen wirkenden Schubspannungen proportional ist. Bezeichnet nach dem Satz von der Gleichheit der Schubspannungen in senkrechten Ebenen z. B. $\tau_{yz} = \tau_x$ die Schubspannung in der positiven z- (oder y-) Richtung, die auf ein Flächenelement wirkt, dessen Normale in die positive y- (oder z-) Richtung fällt, und γ_{yz} die zugehörige Gleitung, so hat man die Gleichungen anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} G \cdot \gamma_{yz} &= \tau_{yz} = \tau_x \\ G \cdot \gamma_{zx} &= \tau_{zx} = \tau_y \\ G \cdot \gamma_{xy} &= \tau_{xy} = \tau_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

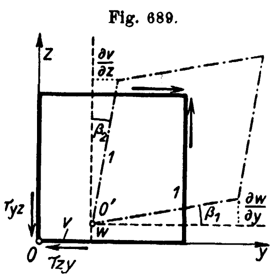
Die Schiebungsgrößen γ können wieder durch die Ableitungen von u, v, w ausgedrückt werden; man beachte, daß z. B. nach Fig. 689 unmittelbar

$$\gamma_{yz} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

gesetzt werden kann und erhält damit auch die beiden entsprechenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30')$$

Aus der Form dieser Gleichungen (25) und (29), die die allgemeine Form des Hookeschen Gesetzes darstellen, ist zu erkennen — was auch begrifflich unmittelbar einleuchtet —, daß Normalspannungen nur Längenänderungen, Schubspannungen nur Winkeländerungen verursachen können.



Erklärung der Verzerrungsgrößen.

Da die sechs Verzerrungsgrößen ε, γ nur von den Ableitungen der drei Formänderungsgrößen u, v, w abhängen, so müssen sie, wenn anders sie eben die Verzerrungen für einen räumlichen Spannungszustand darstellen sollen, drei voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen genügen. Diese nennt man die Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen; sie können in einer der beiden folgenden Formen angeschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31)$$

und

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] \text{ usw.} \quad \ldots \ldots (32)$$

deren Richtigkeit durch Rückeinsetzen der obigen Ausdrücke für ε, γ nach den Gln. (27) und (30) leicht bestätigt werden kann. Von diesen sechs Gleichungen können naturgemäß wieder nur drei voneinander unabhängig sein.

§ 11. Der ebene Spannungszustand.

Von einem ebenen Spannungszustand (in der x-y-Ebene) spricht man in folgenden beiden Fällen:

a) Entweder es ist $\sigma_z = 0$, weiter w von x, y unabhängig und die u, v von z unabhängig; dann folgt:

$$\left.\begin{aligned} E \cdot \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \sigma_y \\ E \cdot \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \sigma_x \\ E \cdot \varepsilon_z &= -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (33)$$

oder aus den beiden ersten durch Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (34)$$

und sodann aus der dritten:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Weiter erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &\equiv \tau_{yz} = 0 \\ \tau_y &\equiv \tau_{zx} = 0 \\ \tau_z &\equiv \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (35)$$

b) Oder es wird $\varepsilon_z = 0$, $w = 0$ und alle Ableitungen nach z ebenfalls $= 0$ angenommen; dann ist zunächst:

$$E \cdot \varepsilon_z = 0 = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \text{also} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

also

$$\left.\begin{aligned} E \cdot \varepsilon_x &= (1+\nu)[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ E \cdot \varepsilon_y &= (1+\nu)[-\nu\sigma_x + (1-\nu)\sigma_y] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

woraus durch Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y] \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Für die Schubspannungen gelten dieselben Gleichungen (35) wie zuvor.

Im Falle a) ist angenommen, daß der Körper in der z-Richtung den elastischen Änderungen frei folgen kann, ohne daß eine Spannung in dieser Richtung auftreten würde. Im Falle b) ist die Ausdehnung in der z-Richtung durch eine Einspannung oder dergleichen verhindert bzw. vorgeschrieben, der Körper etwa zwischen zwei Platten in unveränderter Entfernung festgehalten; diese Einspannungen verursachen naturgemäß Spannungen in der z-Richtung.

§ 12. Die Gleichgewichtsbedingungen für den elastischen Körper.

Wir betrachten ein Teilchen im Innern eines Körpers, das die Form eines rechtwinkligen Blockes (oder Sechsflaches) hat unter dem Einfluß der auf die Seitenflächen wirkenden Oberflächenkräfte (Spannungen) und der über den Raum erstreckten Massenkräfte, die, auf die Masseneinheit bezogen, durch X, Y, Z gekennzeichnet sein mögen. Wenn man den Umstand verwertet, daß die Spannungen stetige Funktionen der Koordinaten x, y, z sind, ihre Größen in gegenüberliegenden Seitenflächen sich also nur um das erste Glied der zugehörigen Taylorschen Entwicklung voneinander unterscheiden können, so können die Gleichgewichtsbedingungen für dieses Teilchen unmittelbar angeschrieben werden (ϱ = Dichte):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \varrho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \varrho Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varrho Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein — völlig unabhängig von der besonderen Beschaffenheit des betrachteten Körpers. Sie reichen jedoch (auch bei Vorschreibung der entsprechenden Randbedingungen) für sich allein nicht aus, um die sechs Spannungsgrößen σ, τ zu bestimmen. Für den elastischen Körper besteht das Lösungsverfahren — allgemein gesprochen — darin, seine

besondere Beschaffenheit durch Einführung des Hookeschen Gesetzes nach den Gleichungen (25), (27), (29), (30) des § 11 zur Geltung zu bringen; damit treten die Formänderungen u, v, w als neue Unbekannte hinzu, deren Gesamtzahl sich sonach auf neun erhöht. Zu ihrer vollständigen Bestimmung dienen die drei Gleichgewichtsbedingungen (38) und die sechs Gleichungen des Hookeschen Gesetzes. Durch Entfernung der sechs Spannungsgrößen (σ, τ) erhält man weiterhin drei Differentialgleichungen für u, v, w, zu deren Auflösung allgemeine Methoden zur Verfügung stehen. Da in folgendem diese Entwicklungen nicht mehr verwendet werden, so soll auch hier nicht weiter auf sie eingegangen werden.

§ 13. Das ebene elastische Problem. Für das ebene elastische Problem — die Scheibe — nehmen die Gleichgewichtsbedingungen (38) unter Vernachlässigung der Raumkräfte, deren Einfluß für statische Fragen meist vollständig zurücktritt, die einfachere Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Die Einführung der Formänderungen u, v des ebenen Problems erhöht die Anzahl der Unbekannten auf fünf (σ_x, σ_y, τ_z, u, v), denen die eben angeschriebenen zwei Gleichgewichtsbedingungen und die drei übrigbleibenden Gleichungen des Hookeschen Gesetzes, also zusammen wieder fünf, gegenüberstehen.

Was die wirkliche Ermittlung der Lösung eines vorgelegten elastischen Problems betrifft, so kann man im allgemeinen entweder die Spannungen (σ, τ) oder die Formänderungen (u, v, w) als unbekannte Funktionen beibehalten und jeweils die anderen aus den Gleichungen entfernen. Wie schon oben erwähnt, ist die Entfernung der Spannungen σ, τ immer möglich und die Beibehaltung der Formänderungen vorteilhaft. Dies tritt auch in den technischen Anwendungen bei der Berechnung der sogenannten statisch unbestimmten Systeme zutage, wo es in der Regel — obwohl dies meist nicht beachtet wird — vorteilhaft ist, mit den Formänderungen und nicht mit den Spannungen zu rechnen.

Das ebene elastische Problem — die Scheibe — läßt jedoch auch unter Beibehaltung der Spannungen eine einfache Formulierung zu, und zwar durch Einführung der sogenannten Airyschen Spannungsfunktion (ψ). In der Tat werden die Gleichungen (39) durch den folgenden Ansatz identisch befriedigt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

und die einzige, für das ebene Problem verbleibende Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

liefert nach Einsetzen der Ausdrücke (30′) [letzte Gleichung] und (40) und Verwertung von Gleichung (24) für die Spannungsfunktion ψ unmittelbar die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung, die man die „biharmonische Differentialgleichung“ nennt:

$$\Delta\Delta\psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Da diese Gleichung mit der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

in naher Beziehung steht, so kann der ganze Lösungsvorrat, der für diese letzte Gleichung bekannt ist, zur Gewinnung von Lösungen für elastische Probleme verwertet werden, was auch tatsächlich im großen Maße geschehen ist.

Nach diesen kurzen Bemerkungen über das allgemeine Problem der Elastizitätstheorie kehren wir zur Betrachtung weiterer Eigenschaften der Stoffe zurück.

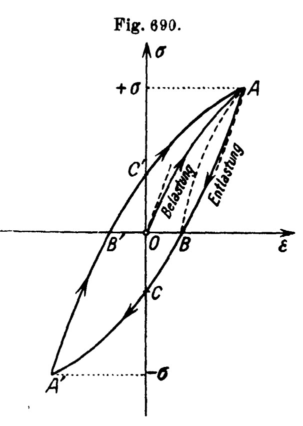
§ 14. Elastische Nachwirkung. Hysteresis. Im vorhergehenden wurde schon wiederholt darauf hingewiesen, daß das Verhalten der verschiedenen Körper auch bei gleichartiger Beanspruchung durch äußere Kräfte keineswegs ein gleichartiges ist, sondern daß dabei mannigfache Unterschiede auftreten. Nicht nur, daß es als ausgeschlossen betrachtet werden muß, ein hinreichend einfaches, für alle Körper und den ganzen Belastungsbereich von Null bis zur Bruchlast gültiges σ-ε-Gesetz zu finden, so sind für ein und denselben Körper die Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung in Wirklichkeit noch erheblich verwickelter, als dies bisher schon zutage trat. Die Ursachen hierfür bilden Erscheinungen, die bei den Formänderungen die Umlagerung der kleinsten Teile des Körpers begleiten, und von denen die innere Reibung die wichtigste ist. Diese Erscheinungen kommen in verschiedenen Formen: als elastische Nachwirkung, Hysteresis, Ermüdung und als Zeitabhängigkeit der Formänderungen zur Geltung. Da eine ausreichende Theorie dieser Erscheinungen bisher nicht gegeben wurde, so müssen wir uns hier vollends auf eine allgemeine Beschreibung der dabei obwaltenden Vorgänge beschränken.

a) Elastische Nachwirkung. Genauere Beobachtungen zeigen, daß schon bei verhältnismäßig kleinen Formänderungen stets nur ein Teil von diesen elastisch ist, also mit der Belastung verschwindet, der Rest jedoch bleibend — plastisch — ist. Es zeigt sich dabei, daß auch der verschwindende Teil nicht gleichzeitig mit der Belastung nach Null geht, sondern erst nach einer gewissen Zeit. Dies ist die Erscheinung der elastischen Nachwirkung, die also in einer zeitlichen Verzögerung der Formänderung gegen die Belastung besteht. Diese Verzögerung der Formänderung stellt sich nicht nur bei der Entlastung, sondern auch bei der Belastung ein: die Formänderung braucht stets eine gewisse Zeit, ehe sie ihren Endbetrag erreicht hat.

b) Unter Hysteresis faßt man hingegen die mit dem Auftreten bleibender Formänderungen verbundenen Erscheinungen zusammen, die sich

am besten aus dem Verlauf der σ-ε-Linien für Belastung und darauf folgende Entlastung erkennen lassen. Belastet man den Probestab zuerst längs OA (Fig. 690) und läßt sodann die Belastung wieder abnehmen, so erhält man für die Entlastung ein von OA verschiedenes Kurvenstück AB. Als bemerkenswert ist anzuführen, daß eine neuerliche, von B ausgehende Belastung — ganz ähnlich wie bei der magnetischen Hysteresis — die Kurve wieder nach A zurückführen würde (aber auf einem anderen Wege). Noch auffallender wird der Einfluß der inneren Reibung, wenn man eine sogenannte Belastungsschleife aufnimmt; man erhält sie, wenn man den Körper zuerst (wie zuvor) längs der „jungfräulichen Kurve" OA belastet, sodann längs AB entlastet, bei B die Belastung umkehrt und die Belastung nach der entgegengesetzten Seite bis zu demselben Betrag anwachsen läßt, wobei die Kurve BA' durchlaufen wird. In A' wird die Belastung wieder vermindert, bei B' abermals umgekehrt und der darstellende Punkt wieder nach A zurückgeführt. Man erkennt daraus, daß man eine Druckkraft OC aufwenden muß, um den Dehnungsrest OB wegzubringen, daß die Verkürzung OB' der Spannung Null entspricht, und daß diese Verkürzung erst durch Anwendung der neuerlichen Zugkraft OC' wieder weggeschafft werden kann. Auffallend ist die merklich übereinstimmende Neigung der von O, A, B auslaufenden Äste gegen die ε-Achse, woraus man schließt, daß in diesen Punkten die kleinsten Teile des Körpers bleibende Gleichgewichtskonfigurationen erreicht haben, von welchen ausgehend das Hookesche Gesetz mit gleichen E-Werten gültig ist. — Übrigens kann man den spannungs- und dehnungslosen Urzustand (O) wieder erreichen, indem man eine Anzahl solcher Schleifen aneinanderfügt und dabei jedesmal die Werte der Lastmaxima verkleinert.

Fig. 690.



Hysteresisschleife.

Da die zwischen der σ-ε-Linie und der ε-Achse eingeschlossene Fläche — wie unmittelbar ersichtlich, aber unten in § 20 noch besonders erklärt wird — die Arbeit darstellt, die bei dem betreffenden Vorgang verbraucht wird, so stellt auch die Fläche der Belastungsschleife die Arbeit dar, die zu ihrem Umlauf notwendig ist. Der ganze Umlauf stellt daher einen nicht umkehrbaren (irreversiblen) Prozeß dar, bei dem durch die Größe der Hysteresisschleife die vermöge der inneren Reibung in Wärme übergeführte Arbeit gegeben ist. Nur sehr kleine Formänderungen erweisen sich als vollständig umkehrbar (reversibel).

c) Ermüdung. Verhalten bei wiederholten Belastungen, Dauerbruch. Bei zahlreichen praktischen Anwendungen kommen Belastungsarten

vor, die von der bisher angenommenen ruhenden Belastung erheblich abweichen. Insbesondere handelt es sich darum, die Festigkeit bei oft wiederholten Belastungswechseln zu untersuchen, und zwar derart, daß entweder von σ jedesmal auf Null entlastet oder die Belastung aufeinanderfolgend zwischen $+\sigma$ und $-\sigma$ verändert wird. Im ersten Fall spricht man (nach A. Wöhler) von Ursprungsfestigkeit K_1, im zweiten von Schwingungsfestigkeit K_2. Sei K_0 die Festigkeit bei ruhender Belastung, so ist stets: $K_0 > K_1 > K_2$. Zu diesen Untersuchungen sind viele Millionen von Belastungswechseln erforderlich. Bis vor kurzem galt es als zweifelhaft, ob nicht sowohl K_1 wie K_2 in der Grenze die Werte Null haben, d. h. ob nicht eine beliebig kleine Last, wenn sie nur entsprechend oft aufgebracht wird, zum Bruche führen kann. Heute nimmt man an, daß sowohl K_1 wie K_2 endliche Grenzwerte darstellen. Bei wiederholter Belastung tritt also stets nur eine teilweise Ermüdung ein: nimmt man die Belastungen unter den angegebenen Grenzwerten K_1 bzw. K_2, so vermag auch ihre beliebig oft wiederholte Aufbringung nicht den Bruch herbeizuführen [1]).

Die Feststellung der Bedingungen für das Auftreten solcher Dauerbrüche, in Abhängigkeit von der Größe der Belastung und der Wechselzahl, ist für das neuzeitliche Materialprüfungswesen von großer Bedeutung geworden. Um die Versuchsdauer, die wegen der meist erforderlich außerordentlich großen Zahl (viele Millionen) von Belastungswechseln sonst sehr groß würde, abzukürzen und gleichzeitig exakt zu beschreibende Versuchsbedingungen zu schaffen, sind besondere dynamische Materialprüfmaschinen konstruiert worden, von denen in Fig. 691 eine der leistungsfähigsten Ausführungen, nämlich die der Maschinenfabrik C. Schenk-Darmstadt (nach W. Hahnemann und H. Hecht), schematisch wiedergegeben ist.

Die Anordnung beruht darauf, daß die Belastungswechsel durch schwingende Massen erfolgen, die durch einen elektromagnetischen Wechselstromkreis erregt werden, und zwar in der Zahl bis zu 2 Millionen Belastungswechsel in der Stunde. Der Probestab P wird oben in einen Bügel B eingespannt, der mit dem äußeren, die Gegenmasse bildenden Gehäuse m_1 fest verbunden ist; sein unteres Ende wird in die Ankermasse des Wechselstrommagnets m_2 eingesetzt. Die Masse m_1 ist gegenüber dem Grundgestell m_3 federnd gelagert, und zwar besteht diese Federung in zwei Stahlrohren R_1 und R_2, die zur Vermeidung größerer Konstruktionshöhen ineinander angeordnet sind. Das innere Rohr R_1 ist in die Ankermasse m_2 eingesetzt, das äußere R_2 mit dem Grundgestell m_3 verbunden. Die Gehäusemasse m_1 wird durch die Spiralfedern F_1, F_2 getragen und ist gegen das Grundgestell in den Rollen r_1, r_2 geführt. Die Größe der dynamischen Beanspruchung kann durch die Zusatzmassen m geregelt werden, die auf die Ankermasse des Elektromagnets aufgelegt werden können. Zur spannungsfreien Einstellung des Probestabes dient das Handrad H, durch dessen Drehung die Spannung der Federn F_1, F_2 entsprechend verändert werden können.

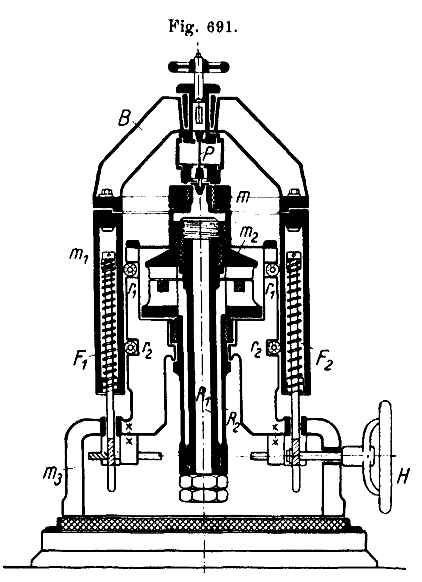
---

[1]) K_0, K_1, K_2 sind die früher üblichen Bezeichnungen für die betreffenden Festigkeiten.

Ähnliche Anordnungen stehen auch für die Ausführung von Dauerversuchen für Biegungs- und Drehungsbeanspruchungen in Verwendung.

d) Weitere Einflüsse wiederholter Belastungen. Ähnlich wie in c) bezüglich der Festigkeit sind auch systematische Untersuchungen über den Einfluß wiederholter Belastungen auf die Elastizitätsgrenze und Streckgrenze angestellt worden, wobei die Versuchsanordnung immer möglichst so getroffen wurde, wie sie den Beanspruchungen in bewegten Maschinenteilen entsprechen. Unter diesen Versuchen haben insbesondere die von A. Wöhler und J. Bauschinger bleibenden Wert erlangt. Als allgemeines Ergebnis ist zunächst hervorzuheben, daß eine Beanspruchung über eine gewisse Grenze hinaus immer Veränderungen des Verhaltens des betreffenden Stoffes zur Folge hat. Aus der großen Zahl der beobachteten Erscheinungen mögen hier nur die folgenden, die sich auf die Elastizitäts- und Streckgrenze beziehen, erwähnt werden: Wird ein Körper einer Belastung unterworfen, die größer als die ursprüngliche Proportionalitätsgrenze ist, und darauf entlastet, so erweist sich bei neuerlicher Belastung diese Grenze höher liegend als zuvor; durch Wiederholung kann diese Erhöhung bis zur ursprünglichen Streckgrenze und sogar etwas darüber hinaus gesteigert werden. Bei noch höherer Belastung sinkt jedoch diese Proportionalitätsgrenze erheblich, oft bis auf Null und hebt sich bei darauffolgender Ruhe von selbst allmählich bis auf ihren ursprünglichen Wert. Ebenso kann auch die Streckgrenze selbst durch vorsichtig angepaßte Beanspruchung über ihren ursprünglichen Wert gehoben werden. In ähnlicher Weise können beide Grenzen auch durch aufeinanderfolgende, zwischen Zug und Druck wechselnde Belastungen allmählich in die Höhe getrieben werden u. dgl. m. Aus all dem ergibt sich, daß diesen Begriffen Festigkeit, Streckgrenze usw. keineswegs eine absolute Bedeutung zukommt, sondern daß diese Werte von den Belastungszuständen abhängen, denen der Stoff vorher ausgesetzt war.

Fig. 691.

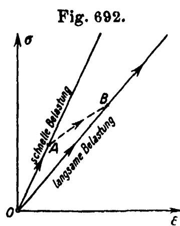


Dynamische Materialprüfmaschine der Firma C. Schenk-Darmstadt.

e) Die Zeitabhängigkeit der Formänderungen kommt unter anderem dadurch zum Ausdruck, daß sich für verschiedene Geschwindigkeiten

der Belastung und Entlastung jeweils verschiedene σ-ε-Linien ergeben, und zwar ist die Dehnung für eine bestimmte Spannung um so kleiner, mit je größerer Geschwindigkeit die betreffende Formänderung hervorgerufen wurde (Fig. 692). Wird die Geschwindigkeit von dem schnellen in den langsameren Wert übergeführt, so findet ein Übergang längs der gezeichneten transversalen Kurve AB statt.

Fig. 692.



Zeitabhängigkeit der Formänderungen.

In keine von diesen Fragen ist heute die Einsicht schon so weit gediehen, daß von einer vollständigen Klärung gesprochen werden könnte, so daß hier der weiteren experimentellen Forschung ein reiches Betätigungsfeld offen steht.

§ 15. Einfluß der Beanspruchung auf die Struktur.

Das Verhalten der verschiedenen Körper, so wie wir es bisher kennengelernt haben, und zwar sowohl das elastische im elastischen Bereiche, wie auch das plastische im Fließbereiche, also bei Beanspruchungen über der Elastizitätsgrenze, ist durch die Eigenschaften der kleinen Teile — der Kristallite —, aus denen die Körper bestehen, oder, wie man auch sagt, durch die Struktur bestimmt; alle Veränderungen, die der Körper bei Belastungen oder durch andere Umstände (Wärmebehandlung) erleidet, geben sich in einer Änderung der Form und Größe dieser Teilchen zu erkennen. Diese Teilchen sind klein, aber doch von solchen Abmessungen, daß sie mikroskopisch leicht zu untersuchen sind.

Zu den Stoffen, die hinsichtlich ihres Gefüges am eingehendsten erforscht sind, gehören die Metalle und Legierungen. Diese finden in der Praxis — als Werkstoffe — nur in der kristallinischen Form (als Vielkristalle, kristallinische Haufwerke) Verwendung, wie sie unmittelbar bei der Erstarrung aus dem flüssigen (geschmolzenen) Zustande entstehen; nach der Erstarrung werden sie stets einer Reihe von mechanischen (Bearbeitung) oder thermischen Vorgängen (Wärmebehandlung, Vergütung) unterworfen, ehe aus dem Rohstück ein Fertigstück wird. Bei den Metallen und Legierungen lassen sich die Veränderungen in dem Gefüge, die durch derartige Vorgänge entstehen, mit Hilfe des Mikroskops in allen Einzelheiten verfolgen; solche Beobachtungen führen zu interessanten Aufschlüssen über die Eigenschaften und Veränderungen dieser kristallinischen Bausteine der Stoffe.

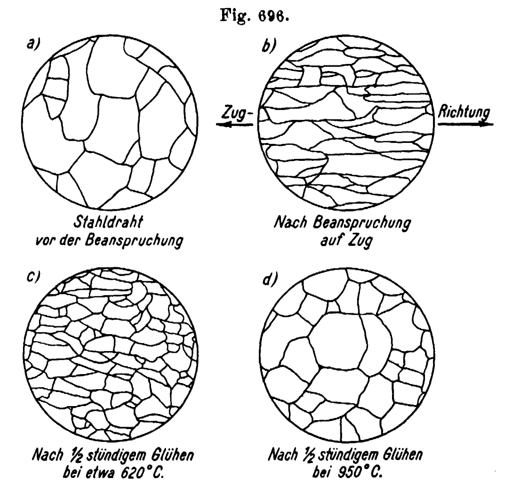
Die wichtigste Eigenschaft der Kristalle ist ihre große Verformungsfähigkeit im elastischen und plastischen Gebiete; mit ihr sind auch die Eigenschaften der Zwillingsbildung und der Verschiebungsfähigkeit (Translation) von Kristallschichten gegeneinander verbunden, die aus einer entsprechend großen Anzahl von nebeneinander liegenden Einzelkristallen bestehen und die direkt beobachtet werden können. Ein Beispiel hierzu zeigt Fig. 693a), b) [1]) (Taf. I.), welche diese Zwillingsstreifen auf Kupferstäben, die

[1]) Die hier folgenden Schliff- und Bruchbilder, die zum größten Teil an dieser Stelle zum erstenmal veröffentlicht werden, verdanke ich Herrn Dr. G. Sachs vom Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung in Berlin-Dahlem, dem ich für die

durch Rekristallisation erzeugt waren, nach Ätzung mit HNO_3 und HCl erkennen läßt.

Diese Verschiebungen oberhalb der Elastizitätsgrenze geben sich an der Oberfläche durch das Auftreten regelmäßiger Linien, der Gleitlinien oder Fließfiguren (auch Lüdersche oder Hartmannsche Linien genannt), zu erkennen. Sie sind z. B. in Fig. 694 (Taf. I) deutlich zu erkennen, die einen gedehnten Stahlstab darstellt, auf dem die Fließfiguren durch Abspringen des Glühzunders kenntlich geworden sind. Solche Gleitlinien zeigt besonders anschaulich auch die Fig. 695 (Taf. I) für Elektrolytkupfer; sie sind als Relief

Fig. 696.



Einfluß der Beanspruchung und Wärmebehandlung auf das Gefüge.
(Schematische Darstellung.)

auf einer vor der Deformation polierten Oberfläche hervorgetreten. Diese Linien treten gewöhnlich in zwei Scharen auf, die mit den Hauptspannungsrichtungen schiefe Winkel einschließen.

Um durch die mikroskopische Untersuchung Einblick in die Fragen zu bekommen, wie sich bei einer Beanspruchung oder Erwärmung die Größe und Gestalt der Kristalle verändern, werden passend ausgewählte Flächenstücke vor der Belastung oder Erwärmung poliert und nachher beobachtet. In Fig. 696 ist eine solche Versuchsreihe nach Beobachtungen von E. Heyn in schematischer Darstellung wiedergegeben, die den Einfluß einer solchen Belastung und darauffolgenden Wärmebehandlung deutlich erkennen läßt. Vor der Beanspruchung, also im natürlichen Zustande, haben die Kristalle nach Fig. 696 a nach allen Richtungen ungefähr die gleichen Abmessungen. Durch eine Zugbeanspruchung werden sie deutlich in der Zugrichtung gestreckt (Fig. 696 b) und bei stärkerer

freundliche Überlassung für dieses Werk auch hier — im eigenen und im Namen des Herausgebers und des Verlages — den verbindlichsten Dank zum Ausdruck bringen möchte.

Beanspruchung auch geteilt. Bei darauffolgendem Ausglühen bei etwa 620° C verwandeln sich diese in einer Richtung gestreckten Kristalle wieder in gleichmäßige (Fig. 696 c); dieser Vorgang wird daher als Rekristallisation bezeichnet. Dadurch ist auch die Erniedrigung der Streckgrenze verständlich gemacht, die man bei einer späteren Belastung, die diesem Ausglühen folgt, beobachtet. — Bei Erhitzung über 900° C beginnen die Kristalle wieder zusammenzuwachsen und gehen merklich in den ursprünglich vorhandenen Zustand über (Fig. 696 d).

Die zugehörigen Aufnahmen nach der Natur sind in Fig. 697 a bis d (Taf. I) wiedergegeben, in denen diese typischen Änderungen des Gefüges durch Kaltverformung und darauffolgende Glühbehandlung an dem Beispiel des β-Messings (mit 52 v. H. Cu und 48 v. H. Zn) nach Ätzung mit einer Eisenchloridlösung festgehalten sind; und zwar gilt die Fig. 697 a nach dem Walzen mit 30 v. H. Höhenabnahme des Probestückes: Strecken der Kristalle in der Walzrichtung; Fig. 697 b nach dem Glühen bei 300° C durch $^1/_2$ Stunde, Beginn der Rekristallisation; Fig. 697 c nach dem Glühen bei 460° C durch $^1/_2$ Stunde; Fig. 697 d nach dem Glühen bei 700° C durch $^1/_2$ Stunde, Fortschreiten der Rekristallisation.

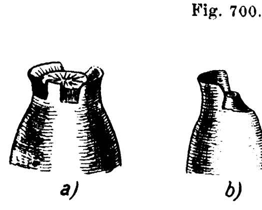
Ein anderes Beispiel für diesen Vorgang gibt Fig. 698 (Taf. II), welche die Rekristallisation von Aluminiumstäben bei 500° zeigt, die um verschiedene Beträge (4 bis 20 v. H.) gedehnt waren.

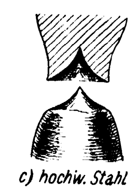
Der Vorgang der Rekristallisation kann auch dazu benutzt werden, um den Deformationsbereich, der durch eine Beanspruchung im Innern eines Körpers entsteht, sichtbar zu machen: So ist z. B. in Fig. 699 (Taf. II) durch Rekristallisation bei 830° C der Verformungsbereich kenntlich gemacht, der im Innern eines konischen Eisenkörpers durch einen auf die Grundfläche ausgeübten Druck entsteht.

§ 16. Bruchtheorie.

Die Vorgänge im Kristallgefüge der Stoffe, die bei wachsender Belastung zuerst zu bleibenden Dehnungen, weiterhin zu einer örtlichen Einschnürung und schließlich zum Bruche führen, sind keineswegs einfach. Von den besonderen Erscheinungen, die im Verlauf dieses Vorganges beobachtet werden, ist das Auftreten von Gleitschichten schon hervorgehoben worden, deren sichtbare Spuren an der Oberfläche die Fließfiguren darstellen. Für die Beurteilung der Festigkeit eines Stoffes ist die Frage von besonderer Wichtigkeit, durch welche Umstände der Bruch selbst bedingt ist. Wir wissen, daß bei Zug und Druck die größten Normalspannungen in den Schnitten senkrecht zur Zugrichtung und die größten Schubspannungen in Ebenen unter $\pm 45^0$ zu diesen geneigt — und nicht mit den

Fig. 700.





c) hochw. Stahl

Typische Bruchformen beim Zugversuch von Stahlstäben. (Schematische Darstellung.)

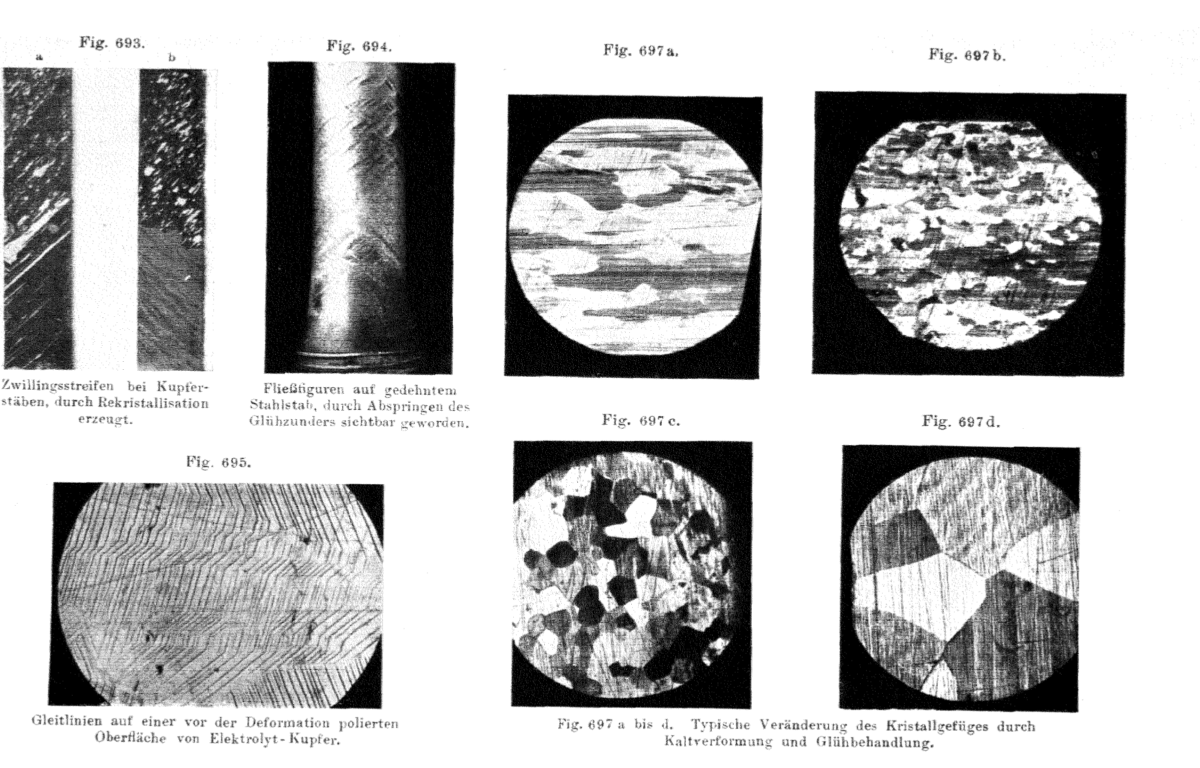


Fig. 693. a b

Zwillingsstreifen bei Kupferstäben, durch Rekristallisation erzeugt.

Fig. 694.

Fließfiguren auf gedehntem Stahlstab, durch Abspringen des Glühzunders sichtbar geworden.

Fig. 697 a. Fig. 697 b. Fig. 697 c. Fig. 697 d.

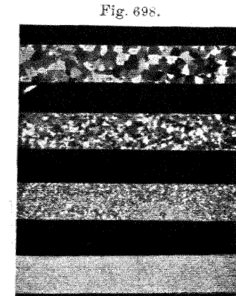
Fig. 695.

Gleitlinien auf einer vor der Deformation polierten Oberfläche von Elektrolyt-Kupfer.

Fig. 697 a bis d. Typische Veränderung des Kristallgefüges durch Kaltverformung und Glühbehandlung.

Zu S. 880 bis 882.

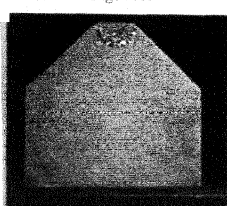
Fig. 698.



a : 4 v. H., b : 10 v. H., c : 15 v. H., d : 20 v. H.

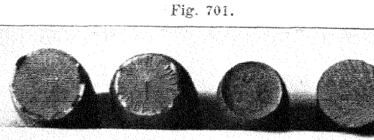
Rekristallisation von Aluminiumkristallen bei 500° C, die um verschiedene Beträge (4 bis 20 v. H.) gedehnt waren.

Fig. 699.



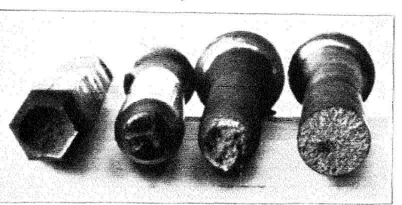
formung unter dem Druckstempel einem konischen Eisenkörper, durch ristallisation bei 830° C sichtbar gemacht.

Fig. 701.



Bruchformen von Rundstäben aus Eisen.

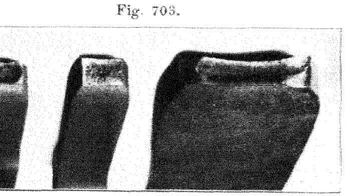
Fig. 702.





Bruchformen von Eisen- und Stahlstäben.

Fig. 703.



Bruchformen von Flachstäben aus Eisen.

Fig. 706 a.

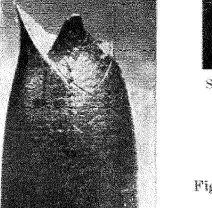


Fig. 706 b.



Duraluminium-Preßkörper, durch ungleichmäßige Verformung am Rande grobkörnig geworden und in den groben Kristallen aufgerissen.

Fig. 704.





Fließkegel eines Rundstabes aus Kupfer mit eigenartigen Einrissen.

Fig. 707.



Schieferbruch an Stahl, durch Kugeleindruck hervorgebracht.

Fig. 708.





Ermüdungsbruch eines Radreifens. Fortschreiten der Ermüdungsgrenze.

Gleitrichtungen zusammenfallend — auftreten. Die Frage kann etwa so gestellt werden: Kommt es dadurch zum Bruche, daß die Teilchen in der Längsrichtung vermöge der Zugspannungen abreißen oder dadurch, daß bei fortgesetzter Verschiebung in den Gleitrichtungen schließlich der Zusammenhang der Teilchen verloren geht? Die Antwort darauf lautet dahin, daß die beiden genannten Vorgänge selten für sich allein vorkommen, sondern daß es sich in Wirklichkeit fast immer um ein Zusammenwirken beider Erscheinungen handelt, die unter den Namen Trennungsbruch und Verschiebungsbruch voneinander unterschieden werden müssen. Gemischte Bruchvorgänge treten vor allem bei Zugversuchen an zähen Metallstäben ein. In Fig. 700 a bis c sind zunächst wieder rein schematisch einige solche typische Bruchformen von Stahlstäben wiedergegeben, wie sie sich bei Zugversuchen ergeben; von ihnen gehört *c* einem hochwertigen Spezialstahl an.

Typische Aufnahmen nach der Natur sind in den folgenden Figuren wiedergegeben; und zwar sind die Fig. 701 und 702 (Taf. II) Bruchformen für Rundstäbe und Fig. 703 (Taf. II) solche für Flachstäbe aus Eisen und Stahl.

Fig. 704 (Taf. II) gibt den Fließkegel eines Kupferrundstabes nach eingetretenem Bruch wieder; auch in dieser Figur sind die Fließfiguren deutlich zu erkennen und außerdem eigenartige Einrisse, deren Ursprung nicht vollständig geklärt ist.

Typische Trennungsbrüche findet man bei den Zug-, Biegungs- und Torsionsversuchen an spröden Körpern (Gußeisen, Gesteinen). Genauere Untersuchungen an stabförmigen Körpern mit Kreisquerschnitt zeigen, daß der Trennungsbruch bei Zug von der Mittelfaser ausgeht, um die sich nachher die sogenannten Trichter bilden, das sind kegelförmige Verschiebungsflächen, längs welcher ein Abscheren des Materials erfolgt (Fig. 700 b, c).

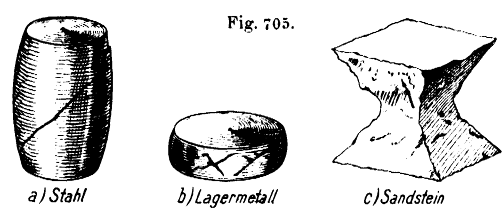
Für die Beantwortung der weiteren Frage, welche Umstände das tatsächliche Eintreten des Trennungsbruches verursachen, sind verschiedene Möglichkeiten offen, die auch alle überprüft worden sind, ohne daß es bisher zu einer endgültigen Klärung über ihr Zutreffen im einzelnen gekommen wäre. Und zwar kann man für den Bruch verantwortlich machen: a) die größte auftretende Spannung, b) die größte Dehnung, c) die größte in einem Raumteil des beanspruchten Körpers aufgespeicherte Formänderungsarbeit.

Verschiebungsbrüche treten am deutlichsten bei Druckversuchen an spröden Körpern auf. Da der Höhe der Versuchskörper wegen des Auftretens der Knickung bald eine Grenze gesetzt ist, so werden diese Versuche durch die an den Druckflächen auftretende Reibung stark beeinflußt; diese Reibung führt zur Ausbildung der sogenannten Druckkegel, die im weiteren Verlauf des Bruchvorganges eine Art Sprengwirkung auszuüben scheinen. Typische Formen des Verschiebungsbruches sind schematisch in Fig. 705 dargestellt: a) entspricht einem Stahlzylinder, b) einem Lagermetall, c) einem Sandsteinwürfel.

Typische Bruchformen bei wirklich ausgeführten Druckversuchen sind aus den folgenden Abbildungen erkennbar:

Fig. 706 a und b (Taf. II) zeigt einen Duraluminium-Preßkörper, der durch ungleichmäßige Verformung beim Warmpressen am Rande grobkörnig geworden und in den groben Kristallen aufgerissen ist[1]).

Fig. 705.



Typische Bruchformen beim Druckversuch für verschiedene Stoffe. (Schematische Darstellung.)

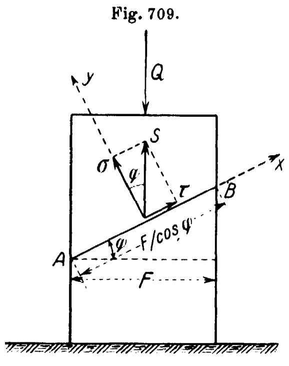
Fig. 707 (Taf. II) zeigt einen sogenannten Schieferbruch an einem Stahlkörper, der durch Kugeleindruck bei der Härteprüfung hervorgerufen wurde.

Als Vergleichsbild sei hier noch die folgende Fig. 708 (Taf. II) aufgenommen, die einen typischen Dauerbruch oder Ermüdungsbruch eines Radreifens darstellt und die das allmähliche Fortschreiten der Ermüdungsgrenze im Querschnitt deutlich vor Augen führt.

In neuerer Zeit werden auch die Röntgenstrahlen zur Untersuchung des Gefüges der Baustoffe und der in ihnen durch Bearbeitung hervorgerufenen Veränderungen verwendet.

Eine Theorie des Verschiebungsbruches wurde von Coulomb entwickelt; sie gipfelt in der Aussage, daß die auftretende größte Schubspannung τ_{max} allein für den Eintritt des Bruches maßgebend ist, indem sie den Zusammenhang des Körpers, der durch eine Art innerer Reibung hergestellt gedacht wird, überwindet. Diese Aussage ist unter dem Namen der Coulombschen Regel bekannt. Da die größte Schubspannung τ_{max} stets unter 45° eintritt, so müßten auch die Bruchflächen diese Lage haben; dies wird aber fast nie beobachtet und deshalb hat Navier die Coulombsche Theorie durch die Annahme erweitert, daß die innere Reibung auch durch die Normalspannung σ auf die Verschiebungsfläche beeinflußt wird. Sei τ_0 der konstante Betrag der inneren Reibung, $f = tg\,\varrho$ eine Reibungszahl und ϱ der Reibungswinkel, so wird demnach der Bruch eintreten, sobald

Fig. 709.



Theorie des Verschiebungsbruches von Coulomb.

$$\tau \gtreqless \tau_0 + f.\sigma \quad \cdots\cdots\cdots (44)$$

ist; in diesem Ansatz ist für $f = 0$ der Sonderfall der Theorie der größten Schubspannung enthalten. Betrachtet man das Gleichgewicht des durch Ver-

1) Nach A. Steudel, Zeitschr. f. Mat.-Prüfungswesen **19**, 133, 1927.

schiebungsbruch abgeschnittenen Stückes im Augenblicke des Beginnes dieses Bruches (Fig. 709) unter dem Einflusse des Druckes Q und beachtet, daß die Größe der Verschiebungsfläche $AB = F/\cos\varphi$ ist, wenn F den Querschnitt des Stabes bedeutet, dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Richtungen senkrecht und parallel zu AB:

$$\left| \begin{array}{l} Q \cdot \cos\varphi = \dfrac{F}{\cos\varphi} \cdot \sigma \\ Q \cdot \sin\varphi = \dfrac{F}{\cos\varphi} \cdot \tau \end{array} \right.$$

und daraus folgt

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = \dfrac{Q}{F} \cdot \cos^2\varphi \\ \tau = \dfrac{Q}{F} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \end{array} \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Setzt man diese beiden Werte in die vorhergehende Gleichung (44) ein, so ergibt sich

$$\frac{Q}{F} \cdot \cos\varphi \sin\varphi \gtreqless \tau_0 + \frac{fQ}{F} \cdot \cos^2\varphi$$

oder

$$\frac{Q}{F} \gtreqless \frac{\tau_0}{(\sin\varphi - f\cos\varphi)\cos\varphi} = \frac{\tau_0 \cdot \cos\varrho}{\sin(\varphi - \varrho) \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots (46)$$

Die kleinste Last Q, für die diese Gleitbedingung erfüllt ist, wird für jenen Winkel φ erhalten, für den der Nenner seinen größten Wert annimmt. Wie eine leichte Rechnung (Ableitung des Nenners nach φ gleich 0 gesetzt) ergibt, tritt dies ein für

$$\varphi = 45^0 + \varrho/2.$$

Die Gleitschichten liegen also — in Übereinstimmung mit den Beobachtungen — unter Winkeln, die von 45^0 verschieden, und zwar größer als 45^0 sind[1]). Die vorhergehende Bedingung lautet dann nach Einsetzen dieses Wertes von φ, da $\cos\varphi = \sqrt{(1 + \cos 2\varphi)/2} = \sqrt{(1 - \sin\varrho)/2}$, $\sin\varphi = \sqrt{(1 - \cos 2\varphi)/2} = \sqrt{(1 - \sin\varrho)/2}$ und $\sin(\varphi - \varrho) = \sin(45^0 - \varrho/2) = \sqrt{(1 - \sin\varrho)/2}$:

$$\frac{Q}{F} \gtreqless \tau_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varrho}}{\sqrt{(1 - \sin\varrho)/2} \cdot \sqrt{(1 - \sin\varrho)/2}} = 2\tau_0 \sqrt{\frac{1 + \sin\varrho}{1 - \sin\varrho}} \quad \ldots (47)$$

Eine weitere Vervollkommnung der Coulombschen Theorie für den allgemeinen Spannungszustand verdankt man O. Mohr, die aber bisher nur bei zähen Stoffen als zutreffend bestätigt wurde. Bei dieser Theorie wird nicht wie bei Coulomb und Navier eine lineare Beziehung zwischen τ und σ nach Gleichung (44) für den Eintritt des Bruches als maßgebend angenommen, sondern allgemeiner vorausgesetzt, daß die zum Bruch führende Verschiebung in jenem Flächenelement eintritt, in welchem zuerst die Schubspannung τ

[1]) Messungen an Teilen von explodierten Geschossen haben ebenfalls ergeben, daß die Bruchflächen nahe unter 45^0 gegen die Längsachse der Geschosse geneigt liegen, welche Erscheinung offenbar mit dieser Theorie in engem Zusammenhang steht.

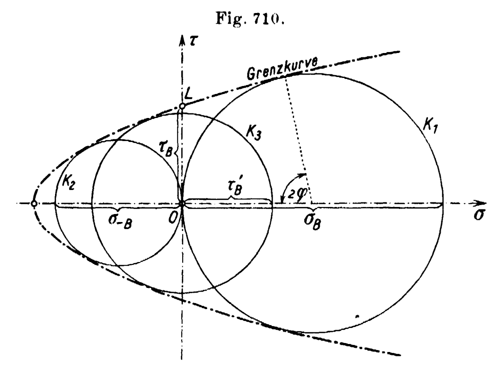
eine von der dort herrschenden Normalspannung σ abhängige Grenze überschreitet, was durch einen Ansatz von der Form dargestellt wird:

$$\tau \gtreqless F(\sigma), \quad \text{. . . . .} \quad (48)$$

in der F eine für das Verhalten des betreffenden Stoffes kennzeichnende Funktion ist.

Diese Beziehung stellt in der σ-τ-Ebene eine gewisse Kurve dar, die man als Grenzkurve bezeichnet (Fig. 710). Der Bruch wird an einem Punkte des Körpers dann eintreten, wenn der diesem Punkte entsprechende Spannungs-

Fig. 710.



Bruchtheorie von Mohr.

kreis diese Grenzkurve, die die Umhüllende der möglichen Grenzzustände darstellt, überschneidet. Der Grenzzustand selbst, also der Beginn des Gleitens, tritt bei der Berührung des Spannungskreises mit der Grenzkurve ein, und durch den Berührungspunkt wird auch der Winkel 2φ der Gleitebene gegen die Hauptspannungen angegeben.

Die Zug- und Druckfestigkeiten σ_B, σ_{-B} sind durch die Durchmesser der Kreise K_1 und K_2 dargestellt, die durch den Anfangspunkt 0 gehen und die Grenzkurve berühren, die Torsionsfestigkeit τ'_B durch den Halbmesser des Kreises K_3 mit dem Mittelpunkt 0 (denn ihm entsprechen Haupt-, Zug- und Druckspannungen von gleicher Größe und auch Hauptschubspannungen, die diesen gleich sind und unter 45° gegen sie liegen); schließlich gibt der Schnittpunkt L der Grenzkurve mit der Achse die Größe der Schubfestigkeit τ_B an.

In der Mohrschen ist sowohl die Coulombsche, wie auch die Naviersche Theorie als Sonderfall enthalten: bei der Coulombschen besteht die Grenzkurve aus zwei zur σ-Achse parallelen, bei der Navierschen aus zwei zu dieser Achse geneigten symmetrisch liegenden Geraden.

§ 17. Härte. Der letzte Begriff, der zur Kennzeichnung der physikalischen Beschaffenheit der Stoffe hier noch besprochen werden soll, ist die Härte. Dieser Begriff ist deshalb von so großer Bedeutung, weil seine Feststellung einen Rückschluß auf die Festigkeit des betreffenden Stoffes zu gestatten scheint, und weil zur Bestimmung der Härte weit einfachere Mittel erforderlich

sind als zur Ausführung eines Zerreißversuches; dieser macht immer die Entnahme eines Probestabes aus dem zu untersuchenden Material notwendig, während die Härteprüfung an dem Werkstück selbst vorgenommen werden kann, welches hierzu außer der Polierung einer ganz kleinen Fläche keinerlei Veränderung zu erfahren braucht. Obwohl die Beziehung zwischen Festigkeit und Härte keineswegs exakt die einer einfachen Proportionalität ist, wie man ursprünglich vermutete, so ist doch die Härteprüfung wegen ihrer Einfachheit heute zu einer der wichtigsten Festigkeitsproben für die Praxis geworden.

Unter Härte im allgemeinen versteht man den Widerstand, den ein Körper dem Eindringen eines anderen entgegensetzt. Es ist klar, daß noch weitere Festsetzungen nötig sind, um diese Definition einem wirklichen Meßverfahren zugrunde zu legen. Das Bedürfnis nach einem solchen hat sich zuerst in der Mineralogie geltend gemacht, die diesem Bedürfnis durch Aufstellung der sogenannten mineralogischen Härteskala gerecht geworden ist; diese besteht aus der folgenden, rein empirisch gereihten Anordnung:

1. Talk, 2. Gips, 3. Kalkspat, 4. Flußspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz (Bergkristall), 8. Topas, 9. Korund, 10. Diamant.

Das Eindringen, von dem oben die Rede war, wird bei der mineraogischen Härtebestimmung durch ein Ritzen ersetzt, und diese Reihung soll einfach ausdrücken, daß jeder dieser Stoffe durch den folgenden geritzt wird, ohne diesen seinerseits zu ritzen. Von einer Messung im eigentlichen Sinne ist dabei noch nicht die Rede. Die Bestimmung der Härte eines beliebigen Körpers erfolgt dann einfach in der Weise, daß er durch Ritzproben zwischen zwei Glieder der angegebenen Härteskala eingeordnet wird.

Der Wunsch, die Bedingungen für diesen Vorgang des Ritzens exakter zu gestalten, insbesondere das Ritzen selbst jedesmal unter einer ganz bestimmten Belastung auszuführen, führte zur Konstruktion des Sklerometers durch A. Seebeck (1833), bei dem eine meist aus Diamant bestehende Spitze unter einem ganz bestimmten Druck die Erzeugung des Ritzes besorgt.

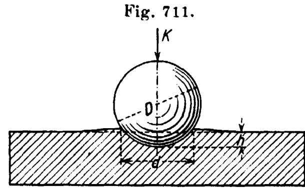
Von einer wirklichen Messung der Härte konnte jedoch erst gesprochen werden, sobald die bleibenden Formänderungen selbst, die beim Eindringen des einen Körpers in den anderen oder überhaupt bei der Berührung zweier Körper unter Druck entstehen, in exakter Weise untersucht wurden. Das Härteproblem gehört daher seinem Wesen nach der Mechanik der nichtstarren Körper und insbesondere der Plastizitätstheorie an.

Die grundlegenden Arbeiten dieser Theorie der Berührung zweier Körper rührt von H. Hertz her, dem es gelang, eine Beziehung zwischen der Größe der eingedrückten Fläche bei der Berührung zweier Körper einerseits und gewissen geometrischen Bestimmungsstücken, und zwar den Krümmungshalbmessern der sich berührenden Flächen andererseits aufzustellen. So wie beim Zugversuch die Größe der Zugfestigkeit als jene Belastung erklärt wird, die im Augenblick des Auftretens des ersten Risses vorhanden ist, so liegt es auch hier nahe, die Härte als jenen Wert der auf die Flächen-

einheit der Druckfläche bezogenen Belastung zu definieren, bei dem sich der erste Riß im Körper zeigt.

Die Anwendung dieser Definition hat aber mancherlei Unstimmigkeiten zur Folge. Da nämlich nur spröde Körper unter einer solchen Druckbelastung Rißbildung zeigen, so erfordert diese Definition für zähe und bildsame Stoffe eine Abänderung; für diese könnte die Härte als jener Wert der auf die Flächeneinheit der Druckfläche wirkenden Belastung erklärt werden, bei dem zuerst bleibende Formänderungen auftreten. Aber auch dies wäre eine sehr unsichere Festsetzung, da das Auftreten bleibender Formänderungen oft schon bei ganz kleinen Einheitsdrucken auftritt, so daß die darauf gegründeten Festsetzungen je nach der Meßgenauigkeit sehr verschieden ausfallen würden. Aus diesen und anderen Gründen, die hier nicht im einzelnen erörtert werden können, hat sich diese „absolute" Härtebestimmung nicht einzubürgern vermocht. In der Praxis verwendet man heute wieder ein Vergleichsverfahren; dieses besteht darin, daß eine gehärtete Stahlkugel aus hochwertigem Material an das zu untersuchende Werkstück angepreßt wird, wobei außer der Belastung auch die Größe der Druckfläche durch Messung festgestellt wird: die auf die Flächeneinheit der Druckfläche bezogene Belastung wird dann als Härtezahl bezeichnet.

Fig. 711.



Kugeldruckprobe von Brinell.

Auf dieser Definition beruhen die in der Technik üblichen Härteproben, von denen die Brinellsche Kugeldruckprobe heute nahezu ausschließlich für Härtebestimmung verwendet wird. In eine ebenpolierte Fläche des Probekörpers wird die gehärtete Stahlkugel mit Hilfe einer „Kugeldruckpresse" eingedrückt und nach Entfernung der Belastung, die selbst gemessen wird, der Durchmesser des Druckkreises durch Mikroskop oder Lupe bestimmt. Ist D der Durchmesser der Stahlkugel und d der gemessene Durchmesser des Eindruckkreises (Fig. 711), so ist die Größe der Druckfläche:

$$F = \pi D h = \frac{1}{2} \pi D \left[D - \sqrt{D^2 - d^2}\right].$$

Als Brinellhärte wird dann der Quotient bezeichnet:

$$H_B = \frac{K}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

und meist in kg/mm² angegeben.

Nach einem anderen Vorschlage wird als Härte der Quotient bezeichnet:

$$H'_B = \frac{K}{F'}, \quad \text{worin} \quad F' = \frac{\pi d^2}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

Nach den Versuchen von E. Meyer (1908) kann die Abhängigkeit zwischen der Belastung K und dem Durchmesser d des Eindruckkreises in der Form angenommen werden:

$$K = a \,.\, d^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

worin a und n Konstante sind, die vom Material und von D abhängen. Es ergibt sich dann:

$$H'_B = \frac{K}{F'} = \frac{K}{\pi d^2/4} = \frac{4}{\pi} \cdot a \cdot d^{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots (52)$$

Die Abhängigkeit der Konstanten a von D kann dadurch berücksichtigt werden, daß man schreibt:

$$H'_B = \alpha \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

und A. Kürth fand dann (1908, 1909), daß die Konstante α sehr genau mit der Streckgrenze des Materials übereinstimmt und n sehr nahe gleich 2 gesetzt werden kann, so daß durch die Bestimmung von H'_B unmittelbar die Streckgrenze des Materials als gegeben anzusehen ist. Dadurch ist ein wesentliches Ziel der technischen Härteprüfung erreicht: da nämlich die Streckgrenze von den vorhergegangenen Beanspruchungen des Materials abhängig ist, so ist dadurch auch die Möglichkeit gegeben, durch direkte Härteprüfung die vorangegangene Behandlung und Beanspruchung des Materials nachzuweisen. — Für die Zugfestigkeit selbst läßt sich für Eisen und Stahl die Beziehung aufstellen:

$$\sigma_B = 0{,}36 \,.\, H_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

In Tabelle 2 sind einige Zahlenwerte für die Brinellhärte wiedergegeben.

Tabelle 2. Brinellhärte H_B.

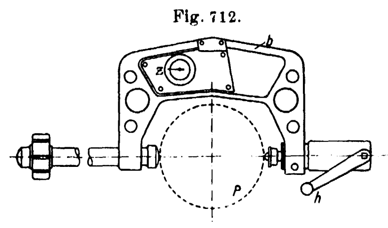
Stoff	H_B [kg/mm²]
Vulkanfiber	7— 16
Lagermetall (Weißmetall) .	20— 28
Al (gewalzt)	45
Zn	50
Cu	60
Bronze	60—250
Gußeisen	130—300
Stahl	150—300
„ gehärtet	bis 850

In neuester Zeit wird durch die Firma Mohr & Federhaff in Mannheim eine tragbare Härteprüfzwinge auf den Markt gebracht, welche die Verwendung einer Festigkeitsmaschine (Presse) überflüssig macht; die Kraftmessung erfolgt nach Fig. 712, die eine schematische Zeichnung der Anordnung wiedergibt, durch die der elastischen Verbiegung eines Stahlbügels b. Die Erzeugung der Belastung geschieht durch eine Schnecke, die durch eine kleine Handkurbel h betätigt wird. Die Messung des Eindruckkreises erfolgt auch hier mit Hilfe eines Mikroskops oder einer Lupe.

Ergänzend sei hier noch bemerkt, daß dieses Brinellsche Verfahren von verschiedenen Forschern in Einzelheiten abgeändert wurde. So hat P. Ludwik vorgeschlagen, an Stelle der Kugel einen gehärteten Stahlkegel, also die Kegeldruckprobe zur Härteprüfung zu verwenden; diese hat den Vorteil, daß die Eindruckflächen zueinander ähnlich ausfallen, u. dgl. mehr. Doch hat keiner dieser Vorschläge die Kugeldruckprobe zur Härtebestimmung zu verdrängen vermocht.

Eine andere Art ist die Schlaghärteprobe, bei welcher die Belastung nicht durch ruhigen Druck, sondern durch einen Schlag erfolgt; der entstehende Eindruck wird mit dem anderen Eindruck verglichen, der durch denselben Schlag auf eine zweite Platte von bekannter Härte erzeugt wird. Damit tatsächlich genau der gleiche Schlag für beide Messungen verwendet wird, ist die Anordnung so getroffen, daß die gehärtete Stahlkugel zwischen den beiden Platten eingesetzt wird. — Schließlich ist für die praktische Härteprüfung auch die Kugelfallprobe herangezogen und hierzu das Rückprall-Skleroskop (nach Shore, Ausführung von Schuchardt & Schütte) empfohlen worden. Eine kleine gehärtete Stahlkugel wird auf das zu untersuchende Werkstück fallen gelassen, an dem eine wagerechte Fläche hergestellt wird; aus der Höhe des Rückpralls der abspringenden Kugel kann ein Schluß auf die Härte des Werkstückes gezogen werden.

Fig. 712.



Härteprüfzwinge der Fa. Mohr und Federhaff, Mannheim.

§ 18. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen. In der Tabelle 3 auf S. 889 sind für einige Stoffe die Werte der wichtigsten Festigkeitszahlen, soweit sie bekannt sind, angegeben. Für die Technik sind von diesen vor allem die hochwertigen (mit Chrom, Nickel, Silicium legierten) Spezialstähle von Interesse, für die aber die Festigkeitszahlen je nach der chemischen Zusammensetzung und der Herstellung stark schwanken und nach dem besonderen Verwendungszweck ausgewählt werden müssen. — Für die übrigen Metalle, deren Verhalten vor allem für die Physiker von Bedeutung ist, sind die Werte der Bruchdehnung und -einschnürung nur in einzelnen und wenigen Fällen angegeben worden. — Bei den Gesteinen, die bekanntlich dem Hookeschen Gesetz nicht folgen, beziehen sich die Werte von E auf den Nullpunkt der Belastung; eine Streckgrenze ist für sie, wie ein Blick auf die Fig. 686 zeigt, nicht vorhanden. — Bei allen Angaben ist im Auge zu behalten, daß sie nur Mittelwerte darstellen, die im Einzelfalle bedeutend über- oder unterschritten werden können.

§ 19. Zulässige Beanspruchung, Sicherheitsgrad. Im Gegensatz zu den mittels exakter Meßmethoden — also objektiv — feststellbaren Werten für die Festigkeit, Bruchdehnung, Einschnürung u. dgl. sowie auch für die Elastizitätszahlen E, G sind für praktische Zwecke noch andere Festsetzungen notwendig, die das Maß der in einem aus einem bestimmten Material hergestellten Konstruktionsteil zulässigen Beanspruchung betreffen. Diese Festsetzungen haben das Gemeinsame, daß sie nicht durch unmittelbare Messungen gewonnen werden, sondern aus Vereinbarungen oder Verordnungen entstehen, also subjektiven Charakter tragen. In der Regel wird die zulässige

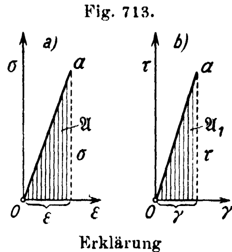
Tabelle 3. Elastizitäts- und Fertigkeitszahlen.

Nr.		Stoff	E kg/mm²	G kg/mm²	ν	Streckgrenze kg/mm²	Zugfestigkeit kg/mm²	Druckfestigkeit kg/mm²	Bruchdehnung in v. H.	Einschnürung in v. H.
1	Eisen und Stahl	Gußeisen	10 000 (etwa)	3800	0,3	∼12	12— 20	70— 85	—	—
2		Flußstahl	21 500	8300	0,3	18— 45	31— 80	13— 45	25— 8	60—15
3		Nickelstahl, geglüht	21 500	8300	0,3	35— 45	55— 65	35— 45	22—18	65—55
4		Nickelchromstahl, gehärtet	21 500	8300	0,3	105—115	115—135	105—115	10— 6	60—50
5		Chromsilicium-Federstahl, gehärtet	21 500	8300	0,3	120—140	135—155	120—140	8— 6	40—30
6	Metalle	Aluminium (gezogen)	7 200	2700	0,34	5	9— 10	—	8—13	—
7		Blei	1 700	600	0,45	0,5—3 (für Druck)	1— 5	—	—	—
8		Gold	8 100	2800	0,42	14	—	—	—	—
9		Kupfer	12 500	4700	0,34	12	22	60	35—38	45—50
10		Platin	17 000	6200	0,39	26	34	—	—	—
11		Silber	8 100	2900	0,38	11	29	—	—	—
12		Zink	13 000	—	0,33	10	20—25	—	12—38	23—56
13		Zinn	5 500	2000	0,33	4	3,5	—	—	—
14		Messing	9 000	3500	0,33	20	25	—	—	—
15	Natürliche Gesteine	Granit	2 400	—	—	—	0,5—0,8	9—23	—	—
16		Basalt	—	—	—	—	1	8—45	—	—
17		Kalkstein	1 900	—	—	—	0,15—0,60	7—25	—	—
18		Sandstein	630	—	—	—	0,25	2—22	—	—
19		Marmor	2 600	—	—	—	0,2—0,6	5—15	—	—
20	Hölzer	Buche	1 750	—	—	—	13	3	—	—
21		Eiche	1 050	—	—	etwa 2	10	3,5	—	—
22		Fichte	950	—	—	—	7,5	2,5	—	—
23		Kiefer	930	—	—	—	8	3	—	—
24	Andere Stoffe	Glas	7 000	2700	0,3	0,25	3,5—9	60—120	—	—
25		Lederriemen	12—22	—	—	—	2,5—3,5	—	—	—
26		Kautschuk	0,02—0,8	—	—	1,5—3	5—12	—	—	—

Beanspruchung als ein bestimmter Bruchteil der Festigkeit angesetzt; das Verhältnis der beiden nennt man den Sicherheitsgrad, $n (n > 1)$, und spricht von n-facher Sicherheit, wenn die größte zulässige Beanspruchung $1/n$ der Festigkeit beträgt. Auf die Wahl des Sicherheitsgrades werden verschiedene Umstände einwirken: zunächst die Art der Herstellung des betreffenden Baustoffes, die Genauigkeit der Kenntnis der auftretenden Beanspruchung, die Art der Belastung (ob ruhend, bewegt oder schwingend, stoßartig), der Verwendungszweck des betreffenden Konstruktionsgliedes (z. B. ob in einer ruhend aufgestellten Maschine, in einem Kraftwagen, in einem Flugzeug) u. dgl.

§ 20. Formänderungsarbeit (innere potentielle Energie). Die Frage, ob ein Körper elastisch ist oder nicht, kann auch mittels des Arbeits- oder Energiebegriffs gekennzeichnet werden. Hierfür haben wir uns nach dem Satze von der Erhaltung der Arbeit die Tatsache vor Augen zu halten, daß die bei der Ausbildung der Formänderungen unter der Wirkung der Belastungen geleistete Arbeit ihren Gegenwert in einer anderen Arbeit gleicher Größe finden muß; die Arbeit der äußeren Kräfte wird nun entweder als innere potentielle Energie aufgespeichert oder sie wird in eine andere Form übergeführt. Die aufgespeicherte innere Arbeit bezeichnet man als (elastische) Formänderungsarbeit oder Verzerrungsenergie. Wenn die Formänderung vollkommen elastisch ist, so wird diese Formänderungsarbeit nach Fortnahme der Belastung in ihrem vollen Betrage wiedergewonnen werden, und zwar in dem Maße, in dem der Körper wieder in seine ursprüngliche Form zurückkehrt. Wenn jedoch außer den elastischen auch plastische (bleibende) Formänderungen auftreten, so ist die zur Ausbildung dieser plastischen Formänderungen erforderliche Arbeit nicht rückgewinnbar, sobald die Belastung verschwindet. Der Körper behält seine verzerrte Form bei, die zu seiner Ausbildung notwendige Arbeit ist als mechanische Arbeit verschwunden und in eine andere Form, und zwar in Wärme übergeführt worden. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß bei der plastischen Formänderung eine innere Reibung der kleinen Teilchen des Körpers auftritt, und daß die dabei entstehende Wärme den Gegenwert des zugehörigen plastischen Teiles der Lastarbeit darstellt. Damit ist auch erklärt, warum dieser Teil bei Wegnahme der Belastung nicht zurückgewonnen werden kann. Tatsächlich ist demnach in der Regel ein Teil der gesamten Formänderung elastisch, der Rest plastisch; dementsprechend müßte man strenggenommen von einer elastischen und einer plastischen Formänderungsarbeit sprechen, doch wird gewöhnlich, wie es schon zuvor geschah, unter Formänderungsarbeit schlechthin nur der elastische Teil verstanden.

Fig. 713.



Erklärung der Formänderungsarbeit.

Die Größe der Formänderungsarbeit für die Raumeinheit, das ist die sogenannte Energiedichte $\mathfrak{A}$, ist unter Annahme des Hookeschen Gesetzes

durch das halbe Produkt aus der Spannung σ und der Dehnung ε gegeben. Betrachtet man wieder ein Raumteilchen von 1 cm Seitenlänge, das der linear zunehmenden Spannung σ nach Fig. 713a unterworfen ist, so ist $\mathfrak{A}$ durch die Größe der schraffierten Fläche gegeben:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

Für einen Körper vom Rauminhalt V ist daher die gesamte Formänderungsarbeit:

$$A = \mathfrak{A} \, . \, V = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot F \cdot l = \frac{1}{2}\frac{K^2 l}{FE} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Ähnlich ist die Formänderungsarbeit bei der Schubbeanspruchung nach Fig. 713b:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}G \, . \, \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

Die gesamte Formänderungsarbeit für die Raumeinheit, die aufgewendet werden muß, um den Bruch herbeizuführen, ist ganz ebenso durch die ganzen, zwischen den Kurven und den ε-Achsen in Fig. 686 liegenden Flächen gegeben, also z. B. für die Fig. 686a durch die Fläche $OPBZ\varepsilon_z O$.

Beispiel. Wenn ein Eisenstab mit Quadratquerschnitt von 2 cm Seitenlänge und 50 cm Länge durch eine Zugkraft von $K = 4000$ kg belastet ist, so ist die von 1 ccm des Stabes aufgenommene Formänderungsarbeit:

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{V} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1000 \, . \, 1000}{2 \, . \, 2 \, . \, 10^6} = \frac{1}{4}\frac{\text{kg} \, . \, \text{cm}}{\text{cm}^3},$$

und daher ist die Arbeit für den ganzen Stab:

$$A = \mathfrak{A} \, . \, V = {}^1\!/_4 \, . \, 4 \, . \, 50 = 50 \text{ kg} \, . \, \text{cm}.$$

Für den allgemeinen Fall des dreidimensional beanspruchten Körpers ist die Formänderungsarbeit für die Raumeinheit durch den Ausdruck gegeben:

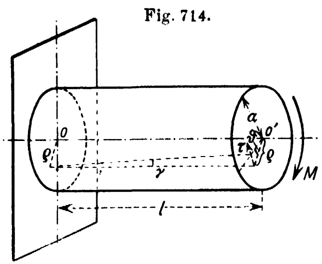
$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + \frac{1}{2G}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

Nach der Besprechung der grundlegenden Begriffe und Tatsachen können wir nunmehr dazu übergehen, die einfachen typischen Belastungsfälle, soweit sie dadurch noch nicht erledigt sind, im einzelnen zu betrachten. Es ist klar, daß die Ergebnisse, die wir auf diese Weise erhalten, selbst wieder dazu verwendet werden können, die elastischen Konstanten wie die Elastizitätszahl E und die Gleitzahl G usw. zu bestimmen.

§ 21. Drehung (Torsion). Wie schon in § 2 gelegentlich der Besprechung der typischen Belastungsfälle erwähnt, sprechen wir von einer Beanspruchung auf Drehung (Torsion) dann, wenn die äußeren Kräfte in Form eines Drehmomentes — auch als Drillungs- oder Torsionsmoment M bezeichnet — um die Längsachse des Stabes wirken. Nehmen wir den Querschnitt des Stabes als Kreis vom Halbmesser a an, so ist klar, daß dieses Torsionsmoment in jedem Querschnitt durch Schubspannungen übertragen

werden muß, die an jedem Flächenteilchen in Richtung der Tangente angreifen und so beschaffen sein müssen, daß die Summe ihrer Momente um die Längsachse des Stabes mit M übereinstimmt (Fig. 714):

Fig. 714.



Drehungsbeanspruchung eines Kreiszylinders.

$$M = \int_0^a 2\, r\pi \, . \, d\varrho \, . \, \tau \, . \, \varrho.$$

Nach dem Hookeschen Gesetz können wir nun setzen:

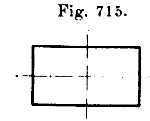
$$\tau = G \, . \, \gamma,$$

worin G die Gleitzahl und γ die Schiebung bedeutet, die wir als die Abweichung zweier ursprünglich senkrecht zueinander stehender Flächenteilchen gegen $\pi/2$ definiert haben; da die Längsfasern des Stabes in Schraubenlinien vom Steigungswinkel $\pi/2 - \gamma$ übergehen, so kann γ durch den Drehwinkel (Torsionswinkel) ϑ zweier um l entfernter Querschnitte ausgedrückt werden:

$$\gamma = \frac{\vartheta \, . \, \varrho}{l} \quad \text{und daher} \quad \tau = \frac{G\,\vartheta}{l} \cdot \varrho \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

Bei dieser Verdrehung benachbarter Querschnitte gegeneinander bleibt jeder einzelne Querschnitt eben und in sich starr. Es ist dann:

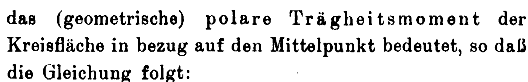
Fig. 715.



$$M = \frac{G\,\vartheta}{l} \cdot \int_0^a 2\,\pi\,\varrho \, . \, d\,\varrho \, . \, \varrho^2 = \frac{G \, . \, \vartheta \, . \, J_p}{l} \quad \ldots \quad (60)$$

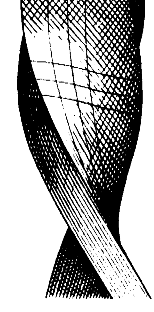
worin

$$J_p = \int_0^a 2\,\pi\,\varrho \, . \, d\varrho \, . \, \varrho^2 = \frac{\pi\, a^4}{2}$$



das (geometrische) polare Trägheitsmoment der Kreisfläche in bezug auf den Mittelpunkt bedeutet, so daß die Gleichung folgt:

$$M = \frac{\pi\, G}{2} \cdot \frac{\vartheta\, a^4}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$



Verdrehung eines Flacheisenstabes.

d. h. das Torsionsmoment ist dem Verdrehungswinkel ϑ und der vierten Potenz des Halbmessers direkt und der Länge des Drahtes umgekehrt proportional. Aus dieser Gleichung folgt umgekehrt der Drehwinkel zweier Querschnitte, auf die Entfernung 1 bezogen, der durch das Drehmoment M hervorgerufen wird, in der Form:

$$\frac{\vartheta}{l} = \frac{M}{G\, J_p} = \frac{2\,M}{\pi\, a^4\, G} = \frac{M}{D} \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

Das Produkt $G \, . \, J_p = D$ wird oft auch als Drehungssteifigkeit oder Drillungssteifigkeit bezeichnet. Die größte Schubspannung tritt am Umfang des Kreises auf und hat die Größe

$$\tau_{max} = \frac{G\,\vartheta\, a}{l} = \frac{2\,M}{\pi\, a^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

Für andere Querschnitte als den Kreis und Kreisring, also z. B. für Rechteck, Dreieck, Ellipse usw., wäre der Ansatz (59) nicht mehr richtig. Nach diesem würden nämlich die größten Schiebungen und Schubspannungen in jenen Punkten auftreten, für die ϱ am größten ist, also z. B. in den Ecken des Rechteckes. Tatsächlich zeigt sich aber, daß die Schubspannungen ihre größten Werte an jenen Stellen einnehmen, die der Achse am nächsten liegen. Auch trifft es für andere Querschnitte nicht mehr zu, daß sie eben bleiben, wie etwa aus der Fig. 715, die einen verdrehten Stab mit Rechteckquerschnitt darstellt, erkennbar ist. Die allgemeine Theorie der Torsion von geraden Stäben von beliebigen Querschnittsformen rührt von B. de Saint-Venant (1855) her. Es zeigt sich jedoch, daß die Form der Gleichung (60) beibehalten werden kann, wenn nur für J_p nicht mehr das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, sondern eine andere, von der Querschnittsform des Körpers abhängige Größe eingesetzt wird.

In Tabelle 4 sind die Werte des Drillungsmomentes M und des Drillungswinkels für die Längeneinheit (ϑ/l) für einige einfache Stabquerschnitte zusammengestellt.

Anwendungen. a) Torsionsschwingungen. Wird am Ende des Stabes, den wir uns in lotrechte Lage gebracht denken (Fig. 716), eine zylindrische Masse mit dem (dynamischen) Trägheitsmoment J befestigt und nach Verdrehung losgelassen, so wirkt das durch die Gleichung (60) gegebene Drehmoment im Sinne der Rückführung in die Ruhelage auf die Masse ein. Für die dadurch entstehende Bewegung gilt der Ansatz:

Trägheitsmoment × Winkelbeschleunigung = Drehmoment

oder
$$J \times \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{G J_p}{l} \cdot \vartheta \quad . \quad . \quad (64)$$

Tabelle 4. Drillungsmoment M und Drillungswinkel ϑ/l für einfache Stabquerschnitte.

Stabquerschnitt	Die größte Schubspannung τ_{max} tritt auf:	Drillungsmoment M	Drillungswinkel ϑ/l (auf die Einheit der Stablänge bezogen)
Ellipse (Halbachsen a, b)	an den Enden der kleinen Achse b	$M = \frac{\pi}{2} a^2 b\, \tau_{max}$	$\frac{\vartheta}{l} = \frac{a^2+b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}$
Quadrat (Seitenlänge a)	in den Mitten der Seiten	$M = 0{,}208\, a^3 \tau_{max}$	$\frac{\vartheta}{l} = 1{,}481 \frac{1}{a} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}$
Rechtecke (Seiten $b, h,\ h > b$)	in den Mitten der Langseiten h	$M = \frac{1}{3 + 1{,}8\, h/b}\, b^2 h\, \tau_{max}$ (angenähert)	$\frac{\vartheta}{l} = \frac{1}{1 - 0{,}65/(1 + h^2/b^2)} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}$ (angenähert)
Gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge a)	in den Mitten der Seiten	$M = \frac{1}{20} a^3 \tau_{max}$	$\frac{\vartheta}{l} = 2{,}309 \frac{1}{a} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}$

Diese Gleichung stellt eine einfache harmonische Schwingung dar mit der Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\,l}{G\,J_p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Durch Messung von T kann entweder G oder J bestimmt werden, sobald die anderen Größen gegeben sind.

b) Torsionsfeder. Die angegebenen Gleichungen können unmittelbar auch zur Berechnung der Verlängerung oder Verkürzung von flachen Schraubenfedern unter dem Einflusse einer axialen Kraft benutzt werden (Fig. 717). Dazu denken wir uns etwa das untere Ende B festgehalten und rechnen die Verschiebung, die das obere Ende A dadurch erfährt, daß jeder Querschnitt durch das Drehmoment $M = K.r$ gegen den benachbarten verdreht wird. Zwei um ds voneinander entfernte Querschnitte bewirken sodann eine axiale Verschiebung des Punktes A vom Betrage:

Fig. 716.

Drehschwingungen.

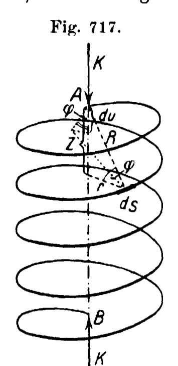
$$du = \frac{R.\vartheta}{l}\cdot ds\cdot \cos\varphi = \frac{r\,\vartheta}{l}\cdot ds, \quad \text{da } R\cos\varphi = r;$$

wie früher bedeutet in dieser Gleichung ϑ/l die Verdrehung zweier in der Entfernung 1 voneinander liegender Querschnitte. Daher entsteht durch die Verdrehung aller Teilchen der Feder gegeneinander, da ihre Länge bei einigermaßen flachen Windungen sehr angenähert $\int ds = 2r\pi.n$ gesetzt werden kann, wenn n die Windungszahl bedeutet:

$$u = \int du = \frac{r\,\vartheta}{l}\cdot\int ds = \frac{r.2M}{\pi a^4 G}\cdot 2r\pi n = \frac{4\,n\,r^3}{a^4\,G}\cdot K \quad \ldots \quad (66)$$

Wir sehen also, daß die Verlängerung linear mit der Größe von K verbunden ist, also die allgemeine Form des Hookeschen Gesetzes besitzt.

Fig. 717.



Torsionsfeder.

Als Anwendung der in § 20 gegebenen Ausdrücke für die Formänderungsarbeit wollen wir diese axiale Verschiebung auch mittels des Energiesatzes ausrechnen, der in der Gleichsetzung der Formänderungsarbeit A der verdrehten Feder mit der Arbeit der Last besteht; diese ist aus den in § 20 angegebenen Gründen $\frac{1}{2}.K.u$. Wir erhalten damit die Gleichung:

$$A = \frac{1}{2}Ku = 2r\pi n\cdot\int_0^a \frac{\tau^2}{2G}\cdot 2\varrho\pi.d\varrho.$$

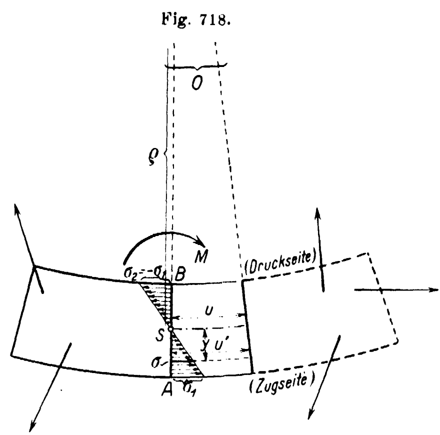
Setzt man darin für τ den oben gefundenen Wert, so folgt:

$$\frac{1}{2}K.u = 2r\pi n\cdot\frac{\pi}{G}\cdot\frac{4K^2r^2}{\pi^2a^8G}\cdot\frac{a^4}{4}$$

und damit für u ein mit Gleichung (66) vollständig übereinstimmender Ausdruck.

§ 22. Biegung. Wenn ein stabförmiger Körper durch Kräfte beansprucht wird, die in der Mittelebene — oder Kräfteebene — des Stabes liegen, so lassen sich alle Kräfte, die auf einer Seite — etwa links — eines beliebigen Querschnittes AB angreifen, im allgemeinen zu einer in dessen Mittelpunkt S anzusetzenden Einzelkraft und einem Moment M zusammensetzen, das um eine durch S gehende, zur Kräfteebene senkrechte Achse dreht. Wenn nur auf die Wirkung von M geachtet wird, so spricht man von reiner Biegebeanspruchung und nennt M das Biegemoment für den Punkt S; es ist in Fig. 718 durch einen Rundpfeil angedeutet. Ganz ähnlich wie bei der Torsion sucht man nun innere Spannungen, die über den Querschnitt AB verteilt sind, so zu bestimmen, daß das Gleichgewicht des abgetrennten Stückes durch sie wieder hergestellt wird; man erkennt unmittelbar, daß dies durch Einführung von Normalspannungen σ geschehen kann, für die zunächst aber nur die Summe ihrer Momente um S bekannt ist; es ist nämlich, wenn dF ein Flächenelement des Querschnitts bedeutet:

Fig. 718.



Biegung des Stabes oder Balkens.

$$M = \int \sigma . d f . y.$$

Wenn man nicht die Hilfsmittel der höheren Elastizitätslehre heranziehen will, so ist für die Ermittlung der Spannungsverteilung selbst eine besondere Annahme erforderlich, die am einfachsten in der Aussage besteht, daß der Querschnitt auch nach der Biegung eben bleiben, die Biegung also nur eine Drehung des Querschnittes um einen bestimmten Punkt O hervorbringen soll, eine Aussage, die bei dünnen Stäben (h klein gegen die Länge) mit großer Annäherung zutrifft. Für die Dehnung einer Längsfaser kann sodann, wenn u ihre ursprüngliche und u' ihre gedehnte Länge bezeichnet, gesetzt werden:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{u' - u}{u} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67)$$

Wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der durch S gehenden ursprünglich geraden Stabachse bedeutet, so ist:

$$\varrho : (\varrho + y) = u : u', \quad \text{also} \quad u' = \frac{\varrho + y}{\varrho} \cdot u = u + \frac{y}{\varrho} \cdot u$$

und daher:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

Wenn nun die Summe der Spannungen selbst über den Querschnitt, wie vorausgesetzt, Null sein soll, also:

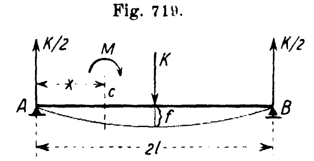
$$\int \sigma\, d f = \frac{E}{\varrho} \int y\, d f = 0,$$

so erkennt man, daß die Stelle $y = 0$, die der Spannung $\sigma = 0$ entspricht, mit dem Schwerpunkt des Stabquerschnittes zusammenfällt. Die erwähnte Annahme wird als das Geradeliniengesetz für die Spannungen bezeichnet und der Ort der Punkte mit der Spannung $\sigma = 0$ als neutrale Schicht, ihre Spur mit der Mittelebene des Stabes als neutrale Linie oder Nulllinie. Es folgt damit:

$$M = \frac{E}{\varrho} \int y^2\, d f = \frac{E J}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E J} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

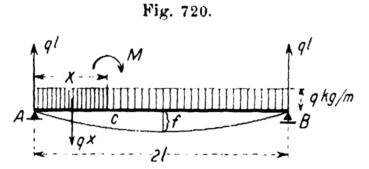
wenn $\int y^2\, d f = J$ das (geometrische) Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Querachse durch S bedeutet; insbesondere ist z. B. für den

Fig. 719.



Biegung des freiaufliegenden Balkens durch eine Einzelkraft.

Fig. 720.



Biegung des freiaufliegenden Balkens durch verteilte Belastung.

Rechteckquerschnitt von der Breite b und der Höhe h: $J = b h^3/12$ und für den Kreis vom Halbmesser r: $J = \pi r^4/4$.

Der Krümmungshalbmesser ϱ der durchgebogenen Nullinie ist daher dem Biegemoment M direkt und der Größe $E . J = B$, der Biegesteifheit, verkehrt proportional. Für kleine Durchbiegungen kann in dem auf rechtwinkelige Koordinaten bezogenen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ:

$$\varrho = - \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

wenn die x-Achse in die ursprünglich gerade Stabachse gelegt und jetzt y senkrecht dazu angenommen wird, das quadratische Glied $y'^2 \to 0$ gesetzt werden, wodurch man die (vereinfachte) Gleichung der elastischen Linie erhält:

$$y'' = \frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M}{E J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

die bei kleinen Durchbiegungen mit hinreichender Genauigkeit verwendet wird.

Anwendungen. a) Für $M = const$, $E . J = const$ ist auch $1/\varrho = const$, d. h. ein durch konstante Biegemomente, etwa nach Fig. 674 e belasteter Stab wird daher nach einem Kreise durchgebogen.

b) Frei aufliegender Stab von der Länge $2\,l$, durch eine Einzellast K in der Mitte nach Fig. 719 belastet. Für irgend einen Querschnitt C ist $M = Kx/2$, also:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Kx}{2\,EJ},$$

und durch Integration erhält man die folgende Gleichung, in der die Konstante durch die Bedingung $x = l$, $y' = 0$ festgelegt ist:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{K}{4\,EJ}(l^2 - x^2);$$

durch abermalige Integration folgt daraus die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{Kl^3}{4\,EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{x^3}{3\,l^3}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

mit der größten Durchbiegung — dem Biegepfeil f — für $x = l$:

$$y_{\max} = \frac{Kl^3}{6\,EJ} = f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

c) Frei aufliegender Stab durch eine gleichförmig verteilte Last q (kg/m) über die ganze Länge $2\,l$ belastet (Fig. 720). Da der Stützendruck in A und B die Größe $q\,l$ hat, so gilt für den Querschnitt C:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{q}{EJ}\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right),$$

woraus durch Integration die Gleichung

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q}{EJ}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l\,x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$$

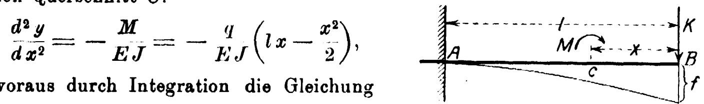


Fig. 721.
Biegung des eingespannten Balkens durch eine Einzelkraft.

folgt, in der die Integrationskonstante wie zuvor durch $x = l$, $y' = 0$ bestimmt ist; für die Gleichung der elastischen Linie folgt weiter

$$y = \frac{q\,l^4}{3\,EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{x^3}{3\,l^3} + \frac{x^4}{8\,l^4}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

mit der größten Durchbiegung in der Mitte:

$$y_{\max} = \frac{5\,q\,l^4}{24\,EJ} = f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

d) Einseitig eingespannter Stab durch die Einzelkraft K am Ende belastet (Fig. 721). Es ist für den Querschnitt C, da $M = Kx$:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{K}{EJ}x,$$

und daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K}{2\,EJ}(l^2 - x^2), \quad y = \frac{Kl^3}{2\,EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{x^3}{3\,l^3} + \frac{2}{3}\right] \quad \ldots \quad (76)$$

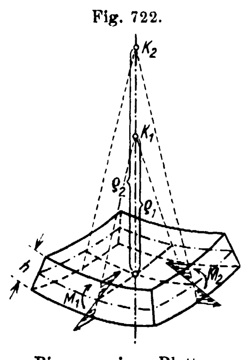
und der Biegungspfeil am rechten Ende:

$$y_{\max} = \frac{Kl^3}{3\,EJ} = f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

In allen diesen und ähnlichen Fällen ist durch Beobachtung von f auch ein einfaches Mittel gefunden, um die Elastizitätszahl E für irgend ein Material zu bestimmen.

§ 23. Platten, Rohre und Schalen. Durch die Art und Weise, wie bei der Biegung von Stäben die Durchsenkung an jeder Stelle durch Aufstellung und Integration der Gleichung der elastischen Linie erhalten werden konnte, ist auch der Weg vorgezeichnet, der für die Beantwortung der entsprechenden Fragen bei ebenen oder gekrümmten Platten, Rohren, Schalen, Behältern, Gefäßen u. dgl. einzuschlagen ist. Es ist jedoch klar, daß die Kennzeichnung des Spannungszustandes und der elastischen Verschiebungen für diese Gebilde entsprechend verwickeltere Hilfsmittel erfordern wird. Nach Einführung der notwendigen Bestimmungsstücke kann jedoch ganz wie beim Stab durch die Gleichgewichtsbedingungen und das Hookesche Gesetz die notwendige Zahl von Gleichungen erhalten werden, aus denen durch Integration die elastischen Verbiegungen und Spannungen an jeder Stelle ausgerechnet werden können.

Fig. 722.



Biegung einer Platte.

a) Von einer Platte spricht man dann, wenn eine Dimension — die Dicke h — klein gegen die anderen Abmessungen (Länge und Breite) ist Eine Folge dieser Annahme ist die, daß für eine angenäherte Berechnung der Verteilung der Spannungen über die Querschnitte wieder das Geradliniengesetz zugelassen werden darf; dies führt weiterhin dazu, daß auch hier das (geometrische) Trägheitsmoment des Querschnittes (und zwar auf die Längeneinheit bezogen) als maßgebende Größe in die Ausdrücke für die Biegemomente eintreten wird. Wenn man ferner beachtet, daß nach dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz auf die Dehnungen in einer Richtung auch die Spannungen in den zu ihr senkrechten Richtungen Einfluß haben, so wird es verständlich, daß auch die Biegemomente M_1 und M_2 längs zweier zueinander senkrecht stehender Querschnitte nicht nur von der Krümmung ϱ_1 (bzw. ϱ_2) allein, sondern auch jedesmal von der Krümmung ϱ_2 (bzw. ϱ_1) in den dazu senkrechten Richtungen abhängen werden (Fig. 722). Die Ansätze, die man dadurch erhält, haben die Form:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\nu}{\varrho_2}\right) \\ M_2 &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{\nu}{\varrho_1}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Sie gelten jedoch, wie eine nähere Betrachtung zeigt, nur dann, wenn die betreffenden Richtungen die Hauptschnitte des betrachteten Plattenelementes (im durchgebogenen Zustande) darstellen, die also den größten und kleinsten Werten der Krümmungen entsprechen.

Setzt man nun — wieder ganz so wie beim Stabe — für kleine Durchbiegungen w:

$$\frac{1}{\varrho_1} \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\varrho_2} \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

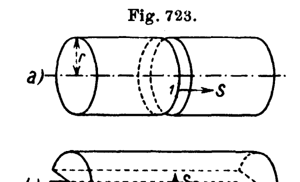
so liefert die Gleichgewichtsbedingung für die Normalenrichtung zur Platte eine (lineare partielle) Differentialgleichung 4. Ordnung für w, zu deren Integration gewisse Randbedingungen vorgeschrieben werden müssen. Die Ausführung der Integration verlangt naturgemäß eine wesentlich vermehrte Rechenarbeit als beim Stab. Wir müssen uns daher hier damit begnügen, in der folgenden Tabelle eine Zusammenstellung der Werte der Durchbiegungen für Platten von Kreis- und Quadratform mit frei aufliegenden oder eingespannten Rändern zu geben, die bei physikalischen Messungen vorkommen können; es sei hierzu bemerkt, daß die Zahlenwerte unter der Annahme $\nu = {}^1/_4$ gelten.

Tabelle 5. Biegungspfeil für ebene Platten.
(Durchbiegung in der Plattenmitte.)

Belastung	Kreisplatte vom Durchmesser d		Quadratische Platte, Seite d	
	frei aufliegend	eingespannt	frei aufliegend	eingespannt
Einzelkraft K in der Mitte	$0{,}147 \cdot \frac{K\,d^2}{E\,h^3}$	$0{,}056 \cdot \frac{K\,d^2}{E\,h^3}$	$0{,}129 \cdot \frac{K\,d^2}{E\,h^3}$	$0{,}065 \cdot \frac{K\,d^2}{E\,h^3}$
Gleichförmige Belastung (auf die Flächeneinheit bezogen q)	$0{,}0461 \cdot \frac{q\,d^4}{E\,h^3}$	$0{,}011 \cdot \frac{q\,d^4}{E\,h^3}$	$0{,}0456 \cdot \frac{q\,d^4}{E\,h^3}$	$0{,}0144 \cdot \frac{q\,d^4}{E\,h^3}$

b) Für zylindrische Rohre mit kleiner Wandstärke unter konstantem Druck p von außen oder innen findet man leicht die Werte der auftretenden Spannungen, sobald auf den Einfluß der Enden (und bei Belastung von außen auf die Möglichkeit der Einbeulung, siehe § 26) keine Rücksicht genommen wird. Zur Berechnung der Längsspannungen S (Fig. 723a) denkt man sich das Rohr nach einem Querschnitt aufgeschnitten und die längs des Umfanges auftretenden Kräfte $S \,.\, 2\,r\,\pi$ (S selbst ist auf die Längeneinheit bezogen, r = mittlerer Halbmesser des Rohres) aus der Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Rohrachse berechnet; es folgt:

Fig. 723.



Beanspruchung eines zylindrischen Rohres durch Innendruck.

$$S \,.\, 2\,r\,\pi = p \,.\, r^2\,\pi, \text{ woraus } S = \frac{p\,r}{2} \cdot \quad (79)$$

Ebenso erhält man die Ringspannung S_1 durch einen Längsschnitt nach Fig. 723b aus der Gleichung

$$S_1 \,.\, 2\,l = p \,.\, 2\,r\,l, \quad \text{in der Form} \quad S_1 = p\,r = 2\,S \quad . \;.\; . \quad (80)$$

c) Für die Vollkugelschale ergibt sich in ähnlicher Weise mittels irgend eines ebenen Schnittes durch den Mittelpunkt der Kugel:

$$S \cdot 2 r \pi = p \cdot r^2 \pi, \quad \text{daher} \quad S = \frac{p\,r}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

für alle Richtungen auf der Kugelschale und alle ihre Punkte. Einen solchen Spannungszustand nennt man homogen.

Um die Längenänderung w des Halbmessers (Vergrößerung bei Innendruck, Verkleinerung bei Außendruck) zu berechnen, benutzen wir das verallgemeinerte Hookesche Gesetz, das in diesem Falle, da die Spannungen S und daher auch die auf die Flächeneinheit bezogenen σ übereinstimmen, in folgender Form anzuschreiben ist:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu \sigma}{E} = \frac{(1-\nu)\sigma}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

darin ist $\sigma = S/h$ (h = Schalendicke) und da die Dehnung längs eines Umfanges

$$\varepsilon = \frac{2(r+w)\pi - 2 r \pi}{2 r \pi} = \frac{w}{r} = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{S}{h} = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p\,r}{2h}$$

gesetzt werden kann, so folgt:

$$w = \frac{(1-\nu) r^2}{2 E h} \cdot p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

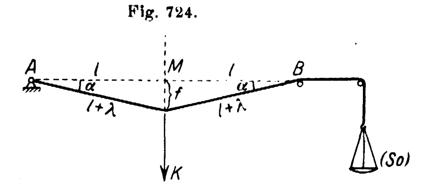
Für andere Formen der Schale und andere Belastungen (Wasserdruck, Eigengewicht und dergleichen) sind die Rechnungen, die zur Kenntnis des Spannungs- und Verschiebungszustandes führen, naturgemäß verwickelter, bieten aber grundsätzlich keinerlei Schwierigkeiten dar. Eine neuzeitliche Verwendungsart derartiger Schalen stellen die Zeissschen Schalenkuppeln für Planetarien dar, bei denen ein steifes Netz aus Stahlstäben hergestellt und mit Beton umkleidet wird. Die Dicke der Schale kann außerordentlich gering gehalten werden (etwa 6 cm für 30 m Spannweite der Kuppel) und könnte noch erheblich vermindert werden, wenn nicht mit Rücksicht auf die Möglichkeit der Knickung bzw. Einbeulung entsprechend vorgesorgt werden müßte.

§ 24. Physikalische Methoden zur Bestimmung der elastischen Konstanten. Schon gelegentlich der Besprechung der einzelnen typischen Belastungsarten ist darauf hingewiesen worden, daß die erhaltenen Rechnungsausdrücke in umgekehrter Auffassung — d. h. wenn Belastung und Durchbiegung gemessen werden — zur Bestimmung der elastischen Konstanten dienen können. So kann aus Zug-, Druck- und Biegeversuchen die Elastizitätszahl E ermittelt werden, aus Torsionsversuchen unmittelbar die Schubzahl G und aus beiden ist mittels der durch die Gleichung (24) festgelegten Beziehung auch die Querzahl für den untersuchten Stoff auffindbar. Ohne auf die Durchführung derartiger Versuche, die keinerlei Schwierigkeiten bietet, hier im einzelnen eingehen zu können, wollen wir uns in diesem Abschnitt nur darauf beschränken, einige besondere Anordnungen zur Bestimmung dieser elastischen Konstanten hervorzuheben, bei denen im wesentlichen nur

die bisher verwendeten oder andere elementare Hilfsmittel zur Anwendung kommen.

a) **Bestimmung von E durch Querbelastung eines gespannten dünnen Drahtes** nach Fig. 724. Die ursprüngliche Spannung S_0 des Drahtes kann durch die auf die Wagschale aufgelegten Gewichte gemessen werden, worauf der Draht bei B festgeklemmt wird. Nunmehr wird in der Mitte das bekannte Gewicht K angehängt und die Durchbiegung f gemessen; wenn dadurch die Länge jeder Hälfte um λ zunimmt, so ist zunächst:

Fig. 724.



Bestimmung der Elastizitätszahl E eines Drahtes.

$$(l + \lambda)^2 = l^2 + f^2,$$

und daraus (mit $\lambda^2 \sim 0$):

$$\lambda = \frac{f^2}{2\,l}.$$

Wenn durch Aufhängung von K in jeder Drahthälfte die Spannung S auftritt, so ist, da angenähert $\sin\alpha = f/l$ gesetzt werden kann:

$$S = \frac{K}{2\sin\alpha} = \frac{K\,l}{2\,f}.$$

Da ferner die Verlängerung λ durch die Spannungsdifferenz $S - S_0$ hervorgerufen wird, so ist nach dem Hookeschen Gesetz:

$$\sigma = \frac{S - S_0}{F} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\lambda}{l} = E \cdot \frac{f^2}{2\,l^2}$$

und daraus

$$E = \frac{S - S_0}{F} \cdot \frac{2\,l^2}{f^2} = \left(\frac{K\,l}{2\,f} - S_0\right) \cdot \frac{2\,l^2}{F \cdot f^2} \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Wiederholt man denselben Versuch mit einer anderen Belastung K', bei welcher die Senkung f' gemessen wird, so gilt dieselbe Gleichung auch dann, wenn K' und f' an Stelle von K und f eingesetzt werden. Es folgt dann durch Entfernung von S_0, das gar nicht bekannt zu sein braucht:

$$E = \frac{K'/f' - K/f}{f'^2 - f^2} \cdot \frac{l^3}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

b) **Bestimmung von E durch Beobachtung der Tonhöhe eines Drahtes oder Stabes**, der durch Reiben in der Mitte (beim beiderseits eingespannten Draht) oder am Ende (beim einseitig eingespannten Stab) in Schwingungen versetzt wird. Nach einem wichtigen Gesetze der Akustik ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einer elastischen Störung in einem (eindimensionalen) Medium vom Einheitsgewicht γ oder von der Dichte $\varrho = \gamma/g$ durch den Ausdruck gegeben:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Wenn T die Schwingungsdauer und l die Wellenlänge des Grundtones ist — sie stimmt für den Grundton mit der Länge des Drahtes bzw. mit der halben Stablänge überein —, so gilt weiter

$$l = c \cdot T \quad \text{(87)}$$

die Schwingungszahl in einer Sekunde — die Frequenz — ist

$$n = \frac{1}{T} = \frac{c}{l} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \text{(88)}$$

woraus folgt:

$$E = \varrho\, l^2 n^2 \quad \text{(89)}$$

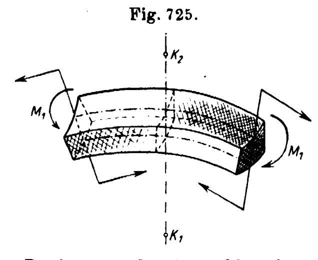
Wenn ϱ und l bekannt sind und n durch Vergleich mit einer geeichten Stimmgabel gemessen wird, so kann E mit Hilfe dieser Gleichung ausgerechnet werden.

c) Bestimmung von G durch Beobachtung der Schwingungsdauer nach § 21 a), Gleichung (65), aus der durch Auflösung folgt:

$$G = 4\pi^2 \cdot \frac{l J}{T^2 J_p} \quad \text{(90)}$$

d) Bestimmung der Querzahl ν durch Messung der Krümmungen einer gebogenen Platte. Wenn eine dünne elastische Platte durch zwei an den gegenüberliegenden Endflächen angreifende Biegemomente M_1 nach Fig. 725 gebogen wird, so biegt sie sich nach einer sattelförmigen Fläche durch. Da nämlich $M_2 = 0$ ist, so folgt nach der zweiten der Gleichung (78) des § 23 a):

Fig. 725.



Bestimmung der Querzahl ν eines Plattenstreifens.

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{\nu}{\varrho_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \nu = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \quad \text{(91)}$$

Die beiden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 haben daher verschiedenes Vorzeichen — das Merkmal der sattelförmigen Gestalt — und geben durch ihren Quotienten unmittelbar die Querzahl ν.

Diese sattelförmige Gestalt der Biegefläche kann auch durch optische Methoden beobachtet werden, indem auf die polierte Platte eine ebene Glasplatte gelegt wird und die Interferenzstreifen beobachtet werden, die zwischen beiden bei auffallendem Licht entstehen. Diese bilden zwei Systeme von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten, deren Neigungswinkel 2α gemessen werden kann; es ist dann, wie sich zeigen läßt:

$$\nu = tg^2 \alpha \quad \text{(92)}$$

§ 25. Physikalische und technische Anwendungen elastischer Schwingungen. In diesem Abschnitt sind einige besondere Schwingungsfälle zusammengestellt, die bei verschiedenen physikalischen und technischen Anwendungen vorkommen und mit einfachen Hilfsmitteln zu erledigen sind.

a) Biegeschwingungen einer mit einer Einzelmasse besetzten Welle. Aus den in § 23 angegebenen Beispielen erkennt man, daß (nach

den dort zugrunde liegenden Annahmen) die Durchbiegung y einer mit einer Einzelkraft belasteten Welle, welche als ein elastischer Stab angesehen werden kann, der Größe dieser Einzelkraft proportional ist; die betreffenden Gleichungen können alle in der Form angeschrieben werden:

$$y = \frac{1}{\alpha} \cdot K \quad \text{oder} \quad K = \alpha . y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

in der die Konstante α von der Art der Welle und ihrer Auflagerung abhängt. Zum Beispiel ist für die frei aufliegende Welle $\alpha = 6\,EJ/l^3$, für die einseitig eingespannte Welle $\alpha = 3\,EJ/l^3$ usw. Die Größe $K = \alpha y$ kann auch als die *Federkraft* der um den Betrag y durchgebogenen Welle bezeichnet werden.

Wird nun auf eine solche Welle, die wohl als elastisch angesehen, auf deren Eigenmasse aber keine Rücksicht genommen wird, die Masse m aufgesetzt, so lautet die Bewegungsgleichung für diese Masse:

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{negative Federkraft}$$

oder

$$m \cdot \frac{d^2 y}{d t^2} + \alpha y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

und dies ist die Gleichung einer einfachen harmonischen Schwingung mit der Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

und der zugehörigen „Kreisfrequenz“:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Zur Bestimmung der Biegeschwingungen von *mehreren* auf der Welle sitzenden Punktmassen oder von Wellen mit kontinuierlich ausgebreiteten Massen sind in der Dynamik besondere rechnerische und zeichnerische Methoden entwickelt worden.

b) *Kritische Drehzahlen rotierender Wellen.* In enger Beziehung mit den Biegeschwingungen steht die Frage nach den kritischen Drehzahlen rotierender Wellen. Die Veranlassung für ihre theoretische Untersuchung gab die bei schnellaufenden Maschinen (zuerst 1883 durch den schwedischen Ingenieur *De Laval*) gemachte Beobachtung, daß eine mit einer Scheibe ausgerüstete schlanke Welle, wenn sie mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit anläuft, nicht, wie man erwarten sollte, in immer stärkeres Schleudern gerät. Man beobachtet vielmehr, daß solche Wellen nach Überschreitung eines „kritischen“ Wertes der Winkelgeschwindigkeit, der sich allerdings durch vermehrte Unruhe und besondere Geräusche zu erkennen gibt, schließlich in einer auch gegen beliebige Störungen fast unempfindlichen Beharrungslage von gestreckter Form umläuft.

Da die Fliehkraft einer Punktmasse m, ebenso wie die Federkraft einer durchgebogenen Welle dem Abstande bzw. der Durchbiegung y von der Drehachse proportional ist, so erkennt man (Fig. 726) aus der Gleichung

$$\text{Fliehkraft} = \text{Federkraft}$$

oder

$$m y \omega^2 = \alpha y \quad \text{(97)}$$

daß ein bestimmter Wert von ω, nämlich

$$\omega = \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \text{(98)}$$

existiert, für den nicht nur eine einzige Gleichgewichtslage y, sondern eine ganze Schar von solchen vorhanden ist, während für alle anderen Werte von ω nur $y = 0$ als einzige Gleichgewichtslage möglich ist. Diesen Wert ω_k bezeichnet man als die **kritische Geschwindigkeit** der mit der Masse m besetzten Welle.

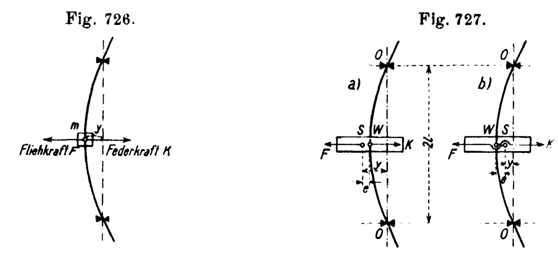


Fig. 726. Kritische Drehzahl einer raschumlaufenden Welle.

Fig. 727. Selbstzentrierung einer raschumlaufenden Welle bei großer Drehzahl.

Durch Vergleich mit Gl. (96) erkennt man unmittelbar, daß er mit der Kreisfrequenz ω der zugehörigen freien Biegeschwingung der Welle zusammenfällt.

Für die Bestimmung der kritischen Drehzahlen für mehrere auf der Welle sitzende Punktmassen oder für eine ausgebreitete Besetzung der Welle mit Massen ist der gleiche Vorgang einzuschlagen. Es werden jene Werte der Winkelgeschwindigkeiten ω_k bestimmt (für n Massen sind es gerade n, für ausgebreitete Massen gibt es deren unendlich viele), bei denen die Welle im durchgebogenen Zustande stationär umlaufen kann, in welchem Zustande mithin die Fliehkräfte der umlaufenden Massen mit den Federkräften in der Welle längs ihrer ganzen Ausdehnung im Gleichgewicht liegen.

Das Vorhandensein der kritischen Geschwindigkeit ω_k besagt noch nichts über die eingangs erwähnte Eigenschaft des Selbstzentrierens der Welle bei großen Geschwindigkeiten. Zur Erklärung dieser für die Praxis außerordentlich bedeutungsvollen Tatsache muß man eine Annahme machen, die für alle derartigen Betrachtungen kennzeichnend und auch praktisch vollständig gerechtfertigt ist. Diese Annahme besteht darin, daß der Massenmittelpunkt der aufgesetzten Scheibe nicht mehr mit dem Mittelpunkt der durchgebogenen Welle zusammenfallen, sondern um ein Stück e exzentrisch liegen

soll (Fig. 727 a). Die Fliehkraft ist dann noch $m y \omega^2$, aber die Federkraft nunmehr $\alpha (y - e)$ zu setzen, und ihre Gleichsetzung:

$$m y \omega^2 = \alpha (y - e) \quad (99)$$

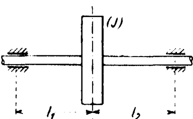
liefert zunächst unter Einführung der früher verwendeten Bezeichnung $\alpha = m \cdot \omega_k^2$ die Gleichung:

$$y = \frac{\alpha}{\alpha - m \omega^2} \cdot e = \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \cdot e \quad (100)$$

Es ergibt sich also für jeden Wert von e eine ganz bestimmte Durchbiegung und nur für den kritischen $\omega = \omega_k$ wird $y = \infty$, was auf die singuläre Beschaffenheit dieses Wertes hindeutet.

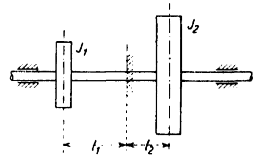
Schließlich ist für $\omega < \omega_k$; $y > 0$ (Fig. 727a), für $\omega > \omega_k$; $y < 0$ (Fig. 727b) und für $\omega = \infty$; $y = 0$, was gerade die Eigenschaft der Selbstzentrierung der Welle zum Ausdruck bringt. Über die Art des Überganges

Fig. 728



Drehschwingungen einer Welle mit einer Scheibe.

Fig. 729.



Drehschwingungen einer Welle mit zwei Scheiben.

von S von der einen auf die andere Seite der Wellenmitte beim Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit ω_k sagt diese elementare Betrachtung freilich gar nichts aus, es müssen dazu höhere Hilfsmittel der Dynamik herangezogen werden.

c) Drehschwingungen von Wellen mit einzelnen Scheiben. Der Fall der hängenden Welle, die an einem Ende eine Scheibe trägt, die in Schwingungen versetzt wird, ist schon in § 21 behandelt worden.

Wenn eine Scheibe vom Trägheitsmoment J zwischen zwei Lagern fest eingespannt ist (Fig. 728), so lautet die Bewegungsgleichung:

$$J \cdot \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - \frac{G J_p}{l_1} \cdot \vartheta - \frac{G J_p}{l_2} \cdot \vartheta = - G J_p \cdot \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \cdot \vartheta \quad (101)$$

und ihre Schwingungsdauer ist:

$$T = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{G J_p} \cdot \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}} \quad (102)$$

Um die Eigenschwingung für zwei auf einer Welle aufgesetzte Scheiben mit den Trägheitsmomenten J_1 und J_2 (Fig. 729) zu finden, beachte man, daß nach Gl. (65), S. 894 der durch die Gleichung

$$J_1 l_1 = J_2 l_2 \quad (103)$$

gegebene Querschnitt offenbar in Ruhe bleiben muß, da die beiden Scheiben mit denselben Schwingungszahlen und -dauern gegeneinander schwingen. Es ist daher dieser gemeinsame Wert nach Gl. (65) von § 21:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J_1 l_1}{G J_p}} = 2 \pi \sqrt{\frac{J_2 l_2}{G J_p}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{G J_p} \cdot \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}} \quad (104)$$

§ 26. Elastische Stabilität: Knickung, Kippung, Einbeulung. Die in diesem Abschnitt zur Besprechung gelangenden Fragen besitzen eine besondere Beschaffenheit. Während früher einfach die Aufgabe vorlag, den Spannungs- und Verschiebungszustand von elastischen Körpern unter dem Einfluß bestimmter Belastungen und bestimmter Randbedingungen zu ermitteln, handelt es sich hier um Aufgaben, die das statische Analogon zu den Fragen nach den Eigenschwingungen schwingungsfähiger Systeme in der Akustik (also von Drähten, Stäben, Platten, Schalen, Glocken u. dgl.) entsprechen und zu ihrer Lösung oft noch besonders geartete Hilfsmittel erfordern. Der Rechnungsvorgang selbst wird nur in dem ersten der folgenden Beispiele ausgeführt, das die Eigentümlichkeiten dieser Probleme schon vollständig erkennen läßt. Bei den anderen der angeführten Beispiele, die in ganz ähnlicher Art und mit sinngemäß erweiterten Ansätzen zu behandeln sind, müssen wir uns auf die Mitteilung der Ergebnisse beschränken.

a) Knickung eines Stabes. Wird ein schlanker elastischer Stab $AB = l$ (Fig. 730) durch zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte K auf Druck belastet, und sind seine Enden etwa gelenkig und in der Kraftrichtung frei verschieblich gelagert, so zeigt sich, daß der Stab bei einem bestimmten Wert der Kraft K oder der Länge l seitlich ausknicken kann, d. h. daß unter diesen Verhältnissen außer der gestreckten Lage auch andere Gleichgewichtslagen möglich sind. Es wird sich nun darum handeln, die Bedingungen für das Auftreten solcher von der trivialen ($y = 0$) verschiedenen Gleichgewichtslagen aufzusuchen.

Fig. 730.

Knickung eines Stabes unter Längsbelastung auf Druck.

In Fig. 730 ist der Stab in einer solchen ausgeknickten Lage gezeichnet. Nach Gl. (71) von § 23 ist dann die Krümmung an der Stelle x (angenähert) durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Ky}{EJ}.$$

Diese Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{K}{EJ} \cdot y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (105)$$

die unmittelbar an die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung ($x \rightarrow t$) erinnert, hat die allgemeine Lösung

$$y = A \cos \sqrt{\frac{K}{EJ}} \cdot x + B \sin \sqrt{\frac{K}{EJ}} \cdot x \quad \ldots \quad (106)$$

in der A und B zwei willkürliche Integrationskonstanten bedeuten; für $A = 0$, $B = 0$ ist darin die triviale Lösung $y = 0$, die der gestreckten Form des Stabes entspricht, enthalten.

Man erkennt jedoch sogleich, daß für die Randbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ noch andere Lösungen der Differentialgleichung (105) möglich sind; es braucht hierzu nur

$$A = 0,\ B \text{ willkürlich} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{K}{EJ}} \cdot l = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$$

gesetzt zu werden. Die aus dem kleinsten Werte (π) folgenden Werte von l oder K, d. h.

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ}{K}} \quad \text{bzw.} \quad K = \frac{\pi^2 . EJ}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

nennt man die Eulersche Knicklänge bzw. Knicklast. Diese Werte sind als obere Grenzwerte für jene Länge bzw. Last aufzufassen, bei der die Ausknickung sicher eintritt, sofern der Stab nicht schon vorher durch andere Ursachen (bleibende Formänderungen u. dgl.) in seiner Beschaffenheit verändert oder zerstört wird. Die ausgeführten Versuche ergeben auch nur dann eine gute Annäherung an diese theoretischen Werte, wenn es sich um sehr schlanke Stäbe handelt, die Grenzbedingungen sehr nahe erfüllt sind und die Beanspruchungen unter der Proportionalitätsgrenze des Materials bleiben. Physikalisch läßt sich das Ausknicken dadurch verstehen, daß immer kleine Unsymmetrien in der Stabachse und in der Art der Belastung vorhanden sind, durch die der Stab unter dem Einfluß der Belastung aus seiner geraden Gleichgewichtslage herausgedrängt wird.

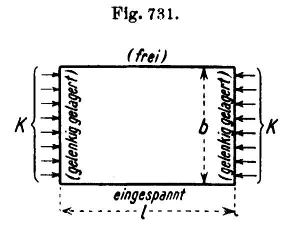
Für einen Stab, der an beiden Enden eingespannt ist, und dessen Einspannungen in der Kraftrichtung verschieblich sind, würde man durch ganz ähnliche Betrachtungen finden:

$$l = 2\pi \sqrt{\frac{EJ}{K}} \quad \text{bzw.} \quad K = \frac{4\pi^2 . EJ}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots (108)$$

d. h. der kritische Wert der Knicklänge ist in diesem Falle zweimal, der der Knicklast viermal so groß als bei gelenkiger Lagerung der Enden.

b) Knickung ebener Bleche. Für ein dünnes Blech (Dicke h), das in seiner eigenen Ebene nach Fig. 731 durch eine über zwei gegenüberliegende

Fig. 731.



Knickung eines ebenen Bleches.

Fig. 732.

Kippung eines hochkantig gestellten Balkens.

Kanten erstreckte Lasten K belastet ist, findet man die Bedingung für das Nicht-Ausknicken in der Form:

$$h \geqq \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)}{13,4} \cdot \frac{Kb}{E}} \quad \ldots\ldots\ldots (109)$$

Es ist dabei angenommen, daß das Blech unten eingespannt, seine obere Kante frei und die beiden belasteten Kanten gelenkig gelagert sind.

c) Kippung eines hochkantig gestellten Stabes. Wird ein Stab von der Länge l nach Fig. 732 an einem Ende A eingespannt und am anderen Ende B mit der Kraft K belastet, so tritt die eigentümliche Erscheinung auf,

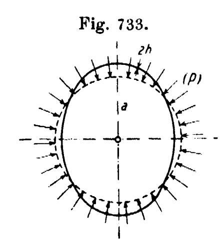
daß der Stab bei bestimmten Werten von l oder K in der aus der Figur ersichtlichen Weise seitlich ausweichen wird. Diese Werte, die wieder obere Grenzen in dem früher angegebenen Sinne darstellen, nennt man die Kipplänge bzw. die Kipplast, und es ist sehr nahe:

$$l = 2\frac{\sqrt[4]{EJ \,.\, GJ_p}}{\sqrt{K}} \quad \text{bzw.} \quad K = 4 \cdot \frac{\sqrt{EJ \,.\, GJ_p}}{l^2} \quad \ldots \quad (110)$$

worin EJ die Biegesteifigkeit und $GJ_p = D$ die Drillungssteifigkeit des Stabes bezeichnen. Eine ähnliche Erscheinung tritt auch für einen hochkantigen beiderseits gelagerten und in der Mitte durch eine Einzelkraft belasteten Stab und natürlich auch in allen verwandten Fällen ein.

d) Einbeulung eines Kreisrohres unter konstantem Außendruck. Dieser Fall ist verwirklicht bei den Flammröhren der Dampfkessel, die von außen durch den Wasserdruck im Kessel belastet sind und (angenähert) z. B. auch bei einem Unterseeboot, das tief unter dem Wasserspiegel schwimmt. Ein solcher Außendruck würde zunächst eine Verkleinerung des Halbmessers um einen bestimmten Betrag hervorrufen, der sich leicht berechnen läßt. Außer dieser Gleichgewichtsform sind aber noch andere möglich, bei denen der Kreisquerschnitt die in Fig. 733 angegebene Form oder eine ähnliche mit mehreren Wellen aufweist. Der kritische Wert des Druckes p, für den die gezeichnete Lage eine mögliche Gleichgewichtslage ist, hat die Größe:

Fig. 733.



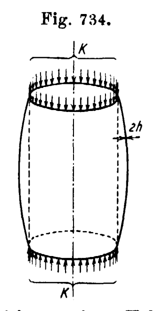
Knickung (Einbeulung) eines Kreisrohres unter Außendruck.

$$p = \frac{2E}{1 - \nu^2} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^3 \quad \ldots \ldots \quad (111)$$

worin $2h$ die Wandstärke des Rohres und a seinen Halbmesser bezeichnet.

Für ein Rohr von endlicher Länge l zeigt die genauere Theorie, daß der kritische Wert von p auch von l abhängt, und zwar mit wachsendem l abnimmt.

Fig. 734.



Knickung eines Hohlzylinders unter axialem Druck.

e) Knickung eines Rohres oder eines dünnen Hohlzylinders unter axialer Druckbelastung K (Fig. 734). Die Theorie sucht zunächst jenen Wert von K zu bestimmen, bei dem die Form des Rohres achsensymmetrisch bleibt, und für den etwa eine sich über die ganze Länge erstreckende Sinuslinie als Gleichgewichtsform möglich ist. Der zugehörige Wert des Gesamtdruckes ergibt sich zu:

$$K = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot Eh^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (112)$$

worin $2h$ wieder die Wandstärke und E die Elastizitätszahl bezeichnet. Die Versuche haben jedoch ergeben, daß die Knickung schon bei einer Last ein-

tritt, die einen kleinen Bruchteil dieses Wertes ausmacht. Tatsächlich zeigen die beobachteten Knickformen auch nur einen schmalen (einfachen oder mehrfachen) Wulst, meist in der Nähe der Mitte gelegen, der gewöhnlich auch nicht achsensymmetrisch verläuft und deshalb einem viel kleineren Wert von K entspricht. Die genaue Theorie dieser Erscheinung stimmt mit den Messungen gut überein.

Schlußbemerkung. Diese kurze Darstellung, die sich auf die wichtigeren Begriffe und Probleme beschränken mußte, hat vor allem das Ziel vor Augen, den Reichtum der Gesichtspunkte und Fragestellungen hervortreten zu lassen, der mit der Entwicklung der Theorie der nichtstarren Körper der neueren Physik eröffnet wurde. Schon aus dieser Übersicht ist zu erkennen, daß diese Theorie keineswegs als ein abgeschlossenes Ganzes vor uns steht, daß vielmehr gerade in der Erforschung und Erklärung der physikalischen Eigenschaften der nichtstarren Körper in ihren verschiedenen Zuständen noch ein reiches Betätigungsfeld für den Physiker, sei er nun mehr experimentell oder mehr theoretisch interessiert, offen steht. — Bezüglich aller weiteren Ausführungen muß auf die Spezialwerke verwiesen werden.

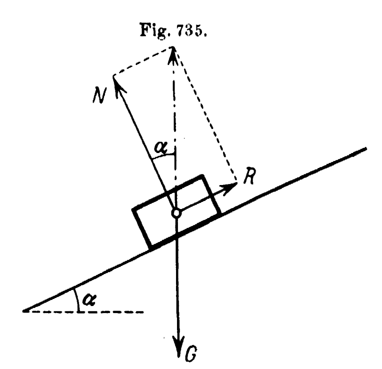
Achtes Kapitel.

Reibung fester Körper[1]).

§ 1. Einführung der Reibungskraft. Nach einer seither oft wiederholten Aussage von H. Hertz besteht das Wesen jeder physikalischen Theorie darin, von den Gegenständen der Wirklichkeit Bilder von solcher Beschaffenheit herzustellen, daß „die denknotwendigen Folgen dieser Bilder mit den naturnotwendigen Folgen der abzubildenden Gegenstände übereinstimmen". Gleichzeitig müssen diese Bilder genügend einfach sein, um ihre Eigenschaften mit theoretischen Ansätzen gesetzmäßig erfassen und logisch-mathematischen Schlüssen unterwerfen zu können.

Das einfachste Bild der Körper der physikalischen Wirklichkeit ist der sogenannte starre Körper, der für eine große Reihe von Aufgaben aus der Statik und Dynamik den angegebenen Zweck vollkommen erfüllt. Was die Oberfläche des Körpers anlangt, so wird diese zunächst vollkommen glatt vorausgesetzt, und diese Annahme bringt es mit sich, daß in der Mechanik die gegenseitige Einwirkung zweier miteinander in Berührung stehender Körper als eine Einzelkraft aufgefaßt werden kann, die zur gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper senkrecht steht und deren Größe jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Fig. 735.



Einführung der Reibungskraft.

Aber schon in ganz einfachen Fällen ist festzustellen, daß diese Annahme eine mit der Wirklichkeit auch nur annähernd übereinstimmende Darstellung des tatsächlichen Verhaltens nicht zuläßt. Ein einfaches Beispiel hierfür, bei dem gleichwohl schon alles Wesentliche deutlich hervortritt, liefert der Körper auf der schiefen Ebene (Fig. 735). Schon die Beobachtung mit den einfachsten Mitteln lehrt, daß jeder solche Körper ohne jede äußere Einwirkung bei beliebiger Neigung auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht bleibt, sobald die Neigung α nur kleiner als ein bestimmter

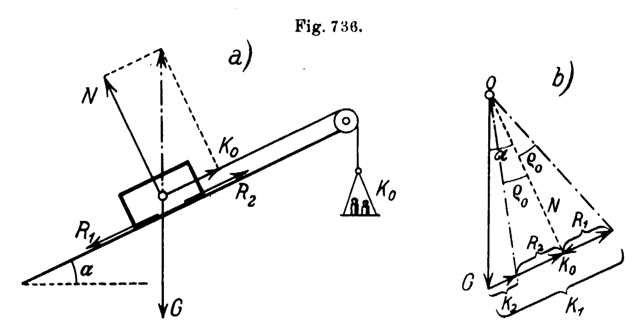
[1]) Bearbeitet von Prof. Dr. Th. Pöschl in Karlsruhe.

Grenzwert ϱ_0 bleibt. Auf Grund dieser Beobachtungstatsache kennzeichnen wir diese Bedingung durch die Festsetzung

$$\alpha \leqq \varrho_0$$

und nennen ϱ_0 aus einem sogleich erkennbar werdenden Grunde den Reibungswinkel der Ruhe oder der Haftreibung. Wird als eingeprägte Kraft nur das Gewicht G des Körpers und als Reaktion der schiefen Ebene, wie es für glatte Körper zutreffen würde, nur eine Normalkraft N zugelassen, so kann durch Einführung dieser beiden Kräfte allein ein Gleichgewicht nicht hergestellt werden. Es liegt auf der Hand, den wirklichen Sachverhalt durch die ergänzende Annahme zu beschreiben, daß die gegenseitige Einwirkung der beiden Körper eben nicht nur in einer normalen allein, sondern auch in einer tangentialen Komponente besteht, die in dem betrachteten Falle als die Reibungskraft der Ruhe oder Haftreibung oder oft auch kurz als Reibung

Fig. 736.



Gleichgewicht an der schiefen Ebene mit Berücksichtigung der Reibung.

bezeichnet wird. Nach Fig. 735 ist die notwendige Größe der Reibungskraft zur Herstellung des Gleichgewichts:

$$R = G \sin \alpha, \quad \text{und da} \quad N = G \cos \alpha,$$

so folgt daraus wegen $\alpha \leqq \varrho_0$:

$$tg\, \alpha = \frac{R}{N} \leqq tg\, \varrho_0 = f_0,$$

und weiter

$$R \leqq N\, tg\, \varrho_0 = f_0 . N \quad \cdots \cdots \cdots \cdots (1)$$

worin $f_0 = tg\, \varrho_0$ als die Reibungszahl bezeichnet und als eine den beiden in Berührung stehenden Körpern eigentümliche Konstante angesehen wird.

Ein ähnlicher Sachverhalt tritt auch ein, sobald der Körper auf der schiefen Ebene (mit $\alpha > \varrho_0$) unter dem Einfluß einer Kraft K_0 in der aus Fig. 736 ersichtlichen Anordnung im Gleichgewicht liegt. Es ist dann zunächst Gleichgewicht möglich, sobald

$$K_0 = G \sin \alpha \quad \text{und wieder} \quad N = G \cos \alpha$$

ist, ohne daß irgend eine tangentiale Einwirkung in Anspruch genommen werden müßte. Verändert man nun die Kraft K_0, indem man das aufgelegte

Gewicht entweder vergrößert oder verkleinert, so beobachtet man, daß nicht sofort eine Aufwärts- oder Abwärtsbewegung des Körpers einsetzt, sondern daß diese Veränderung ein gewisses Maß überschreiten muß, damit eine solche Bewegung Platz greift. Die Größe der größten möglichen Reibungskraft, die von selbst aufgebracht werden kann, wird wieder durch die Gleichung $R = f_0 . N$ gegeben sein, so daß bei einer Zunahme von K_0 auf $K_1 > K_0$ von selbst eine nach abwärts gerichtete, bei einer Abnahme von K_0 auf $K_2 < K_0$ eine nach aufwärts gerichtete Reibungskraft ins Spiel tritt. Es gilt somit für den Grenzwert bei der Zunahme:

$$K_1 = G \sin\alpha + R_1 = G \sin\alpha + f_0 . N$$
$$= G \sin\alpha + tg\,\varrho_0 . G \cos\alpha = G \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho_0)}{\cos\varrho_0} > K_0$$

und bei der Abnahme:

$$K_2 = G \sin\alpha - R_2 = G \sin\alpha - f_0 N$$
$$= G \sin\alpha - tg\,\varrho_0 . G \cos\alpha = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos\varrho_0} < K_0.$$

Diese Werte von K_1 und K_2 können nach dem Kräfteplan in Fig. 736b in einfacher Weise dadurch erhalten werden, daß man beiderseits von N den Winkel ϱ_0 aufträgt und die Schenkel mit der Richtung von K zum Schnitt bringt.

Als ein wesentliches Merkmal für das Auftreten der Reibung muß der Umstand hervorgehoben werden, daß die Berührung der beiden Körper unter einem gewissen Druck erfolgt. Weiter sei bemerkt, daß für die Größe der Reibung selbst durch die Aussage (1) eine Ungleichung und nicht eine Gleichung vorgeschrieben ist, was zur Folge hat, daß es nicht eindeutige Gleichgewichtslagen, sondern stets ganze Bereiche für die Gleichgewichtsstellungen (in Fig. 735 sind es alle Werte von $-\varrho_0 < \alpha < +\varrho_0$) bzw. der zur Herstellung des Gleichgewichts notwendigen Kräfte (in Fig. 736 sind es alle Kräfte, die durch die Bedingung $K_2 < K < K_1$ gekennzeichnet sind) gibt.

Der in der Aussage (1) gegebene einfache Ansatz ist als das Coulombsche Reibungsgesetz bekannt und ist auch heute noch die Grundlage der rechnungsmäßigen Behandlung der Reibungserscheinungen. Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen läßt sich in die folgende Aussage zusammenfassen:

I. Bei der Berührung zweier Körper unter Druck kann eine in der Richtung der gemeinsamen Berührungsebene liegende Reibungskraft auftreten, die in dieser Ebene eine beliebige Richtung haben, und deren Größe den Betrag $f_0 . N$ nicht überschreiten kann; dabei bezeichnet N den Berührungsdruck und f_0 eine von der Beschaffenheit der Körper (und anderen Umständen, siehe unter § 2) abhängige Konstante, die die Reibungszahl genannt wird.

Wenn daher durch Anbringung einer solchen Reibungskraft $\pm f_0 . N$ ein Gleichgewicht überhaupt hergestellt werden kann, dann tritt dieses auch ein; ist eine Kraft von der Größe $+ f_0 . N$ hierzu nicht ausreichend, dann kommt es unfehlbar zu einer Bewegung der beiden Körper gegeneinander.

Bezüglich einer solchen relativen Bewegung zweier Körper gegeneinander, die unter Druck in Berührung stehen, lehrt weiterhin schon die allereinfachste Erfahrung, daß hierzu in allen praktisch vorkommenden Fällen die dauernde Aufwendung einer Kraft nötig ist. Den Gegenwert dieser Kraft, also den mit ihr gleich großen, der Bewegung entgegengerichteten Widerstand, bezeichnet man als Bewegungsreibung oder Gleitreibung. Auch für sie ist die Berührung der Körper unter Druck (gegebenenfalls unter dem Eigengewicht allein) ein wesentliches Kennzeichen. Die Größe dieser Reibungskraft wird wieder dem Normaldruck N proportional gesetzt, so daß wir diesen Sachverhalt in die folgende Aussage kleiden können:

II. Bei der Bewegung zweier Körper gegeneinander, die unter Druck in Berührung stehen, tritt eine der Bewegung entgegengesetzt gerichtete Kraft auf, die man als Bewegungsreibung bezeichnet, und deren Größe durch die Gleichung gegeben ist:

$$R = fN \qquad (2)$$

in der f die Reibungszahl der Bewegung genannt wird.

Man beachte den Unterschied, der darin liegt, daß die Richtung der Bewegungsreibung durch die Gegenrichtung der Bewegung eindeutig vorgeschrieben ist, und daß auch ihre Größe durch die Gleichung (2) festgelegt ist; dagegen kann die Haftreibung in der gemeinsamen Berührungsebene jede beliebige Richtung und innerhalb der angegebenen Grenzwerte auch jede beliebige Größe haben. Demgemäß und in Übereinstimmung mit dem in § 63 des Kap. V eingeführten Unterschiede zwischen eingeprägten und Reaktionskräften wird die Bewegungsreibung (Gleitreibung) als eine eingeprägte und die Haftreibung als eine Reaktionskraft angesehen.

§ 2. Physikalische Auffassung der Reibungserscheinungen. Aus den eben erwähnten und allen übrigen hierher gehörigen Beobachtungstatsachen geht unmittelbar hervor, daß die Ursache für das Auftreten der Reibung in der Beschaffenheit der Oberflächen der in Berührung stehenden Körper zu suchen ist. Man wird zunächst in Betracht ziehen müssen, daß die druckhafte Berührung zweier Körper stets gewisse Verformungen hervorbringen muß, die sich vor allem in den nahe an den Oberflächen liegenden Gebieten bemerkbar machen, und zwar erkennt man unmittelbar, daß die Körper in Richtung des gegenseitigen Druckes zusammengedrückt und gleichzeitig in Richtung der berührenden Oberflächen gedehnt werden. Diese Verformungen werden bei der Weiterbewegung des einen Körpers nicht vollständig zurückgebildet, ein Teil von ihnen ist immer bleibend (plastisch), und zu seiner Ausbildung ist ein gewisser Energieaufwand erforderlich, der mechanisch verloren ist, d. h. in Wärme übergeht. Außerdem kommt in Betracht, daß die Oberflächen der Körper niemals vollständig eben sind, sondern stets gewisse, wenn auch kleine Unebenheiten aufweisen, die bei der Berührung der Körper — in Ruhe und Bewegung — ineinandergreifen und durch ein, wenn auch geringfügiges Anheben oder Abscheren (Abscheuern) überwunden werden müssen. Bei der

Reibungserscheinung wirken aber auch noch andere Umstände mit, wie die Adhäsion, Kapillarwirkungen der stets vorhandenen, wenn auch nur hauchartig dünnen Flüssigkeits- oder Gasschichten u. dgl.; diese Umstände machen in ihrer Gesamtheit das aus, was man die Oberflächenbeschaffenheit der Körper nennt; mögen sie in besonderen Fällen einzeln auch verschwindend klein sein, so wirken sie doch in einer solchen Weise zusammen, daß ihre vereinigte Wirkung ein von den bei glatten Körpern zu erwartenden Erscheinungen vollständig verschiedenes Verhalten ergibt.

Für die Untersuchung der Reibungserscheinung ist es nun von besonderer Bedeutung, daß es außerordentlich schwierig und heute kaum erst in den ersten Ansätzen möglich ist, diese Oberflächenbeschaffenheit in einer eindeutigen Weise zu beschreiben, und zwar so, daß ein Vergleich verschiedener Versuche miteinander und eine Wiederholung bestimmter Versuchsbedingungen zweifelsfrei möglich wäre. Überdies ist es heute ausgeschlossen, die Größe der Reibungskraft, die aus dem Zusammenwirken aller erwähnten Einzelerscheinungen hervorgeht, zahlenmäßig auch nur in den einfachsten Fällen zu berechnen. Es fehlt zwar nicht an allgemeinen Theorien, die die Erklärung der Reibungserscheinungen aus irgendwelchen allgemeinen Vorstellungen heraus zum Ziele haben, doch hat es bisher keine von ihnen vermocht, einen befriedigenden Anschluß an das durch unmittelbare Messungen gewonnene Zahlenmaterial herzustellen.

Die wissenschaftliche Erforschung der Reibungsfrage hat daher heute, ähnlich wie es in der Mechanik der nichtstarren Körper geschieht, nur die eine Möglichkeit, den induktiven Weg des direkten physikalischen Versuches und seiner messenden Verfolgung zu gehen, der allmählich sicher zur Auffindung jener Gesetzmäßigkeiten führen wird, die zur Kennzeichnung der Oberflächenbeschaffenheit der Körper nötig sind. Das Wenige, was bisher an allgemeinen Ergebnissen über das rein versuchsmäßig Gefundene hinaus bekannt ist, wird jeder, der auf eine einheitliche physikalische Theorie auf Grund einer exakten Begriffsbildung Wert legt, als außerordentlich unvollkommen bezeichnen müssen.

§ 3. Arten der Reibung. Es gibt mehrere Gesichtspunkte, unter denen man von verschiedenen Arten der Reibung sprechen kann; man unterscheidet:

a) Je nach dem Aggregatzustand der Körper: Reibung von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, und zwar unter sich oder gegeneinander. Man bezeichnet diese auch als trockene Reibung, Flüssigkeitsreibung, Gasreibung. Die Reibungskräfte zwischen festen Körpern sind immer größer als die zwischen flüssigen, und naturgemäß viel größer als die zwischen gasförmigen.

Wenn bei der Berührung zweier fester Körper oder bei ihrer Bewegung gegeneinander keinerlei Flüssigkeiten, insbesondere keine Schmiermittel angewendet werden, so spricht man von trockener Reibung oder von Reibung fester Körper. Es zeigt sich jedoch die eigentümliche Erscheinung, daß unter normalen Verhältnissen auch ohne besondere Anwendung von Schmiermitteln,

nämlich schon durch die Feuchtigkeit der Luft, ja selbst durch die an den Oberflächen haftenden Luftschichten selbst, eine Veränderung eintritt; werden jedoch durch besondere physikalische Hilfsmittel (exakte Glättung, Reinigung und Trocknung der Flächen und Anstellung der Versuche im Vakuum) diese Einflüsse ausgeschaltet, so verschwindet die Reibung der festen Körper fast vollständig; dies zeigt sich z. B. darin, daß es von der Genauigkeit der Meßinstrumente abzuhängen scheint, ob bei einer Versuchsanordnung nach Fig. 736 ein von Null verschiedener Grenzwinkel ϱ_0 überhaupt als vorhanden angenommen werden kann oder nicht.

Es ist daher in der Theorie die Annahme aufgetaucht, daß es eine Reibung der festen Körper gegeneinander strenggenommen gar nicht geben könne, sondern daß alle jene Erscheinungen, die man unter dieser Bezeichnung zusammenfaßt, eigentlich ihrem Wesen nach Erscheinungen der Reibung von flüssigen oder gasförmigen Körpern sein müssen, in die außerdem die Mechanik der nichtstarren Körper hineinspielt. Es werden daher — nach dieser Annahme — für die Reibungserscheinungen vor allem die Gesetze für die Flüssigkeitsreibung gelten müssen, die in diesem Werke in Kap. XII ausführlich behandelt werden.

Über die Beziehung der Reibung zur Theorie der elastischen Körper hat man erst in allerjüngster Zeit begonnen, systematische Untersuchungen — und zwar sowohl theoretische, als auch experimentelle — anzustellen; hierbei hat man insbesondere festgestellt, daß infolge der Dehnung der Fasern in der Längsrichtung eine (nicht umkehrbare, Energie zerstreuende, dissipative) Schlüpfung der Oberflächenschichten gegeneinander eintritt, die man als Formänderungsschlüpfung bezeichnet, und die im wesentlichen für den auftretenden Reibungsverlust verantwortlich zu machen ist.

Die Schmiermittelreibung besitzt wegen ihres Auftretens in den Lagern aller Maschinen als energieverzehrende Erscheinung praktisch eine kaum zu überschätzende Bedeutung. Die Schmiermittel selbst (Schmieröle) haben vor allem den Zweck, die trockene Gleitreibung, die für sich allein unter den praktisch obwaltenden Umständen unfehlbar in kürzester Zeit eine Zerstörung der Zapfen und Lager der Maschine verursachen und jeden Betrieb unmöglich machen würde, zuverlässig durch die viel kleinere Schmiermittelreibung zu ersetzen, und anderseits auch für die beständige Ableitung der entstehenden Wärme zu sorgen; die Temperatur der Zapfen und Lager darf im Beharrungszustande einen bestimmten Grenzwert nicht übersteigen.

So stellt sich die „natürliche" Reibungsfrage praktisch als ein zusammengesetztes und verwickeltes Gebiet dar, das erst noch durch feinere Untersuchungen in seine Einzelerscheinungen zerlegt werden muß.

b) Je nach der Bewegung der Körper gegeneinander: in unmittelbar verständlicher Bezeichnung Gleit-, Roll- und Bohrreibung, je nachdem die Bewegung der Körper gegeneinander eine Parallelbewegung (Schiebung, Gleitung), eine Drehung um eine in der gemeinsamen Berührungsebene liegende und durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehende Gerade

(Rollung) oder eine Drehung um die gemeinsame Normale zur Berührungsebene (Bohrung) ist.

Es ist klar, daß in diesen verschiedenen Fällen alle früher für das Auftreten der Reibung verantwortlich gemachten Umstände in verschiedener Weise zur Geltung kommen werden. So werden z. B. die Formänderungen bei der Rollbewegung darin bestehen, daß das belastete Rad in die führende „Schiene“ um einen gewissen, wenn auch kleinen Betrag einsinkt und dabei die Oberflächenfasern in der Bewegungsrichtung ausdehnt; bei der Vorwärtsbewegung des Rades werden immer neue Gebiete diesen Formänderungen unterworfen, die aber hinter dem Rad nicht mehr in denselben Zustand zurückkehren, den sie vor der Verformung gehabt haben. Die genaue Verfolgung dieser Erscheinungen nach den Methoden der Elastizitätstheorie ist heute noch nicht möglich. Der Fehlbetrag kommt physikalisch in der Tatsache zum Ausdruck, daß es des fortgesetzten Aufwandes einer Kraft (bzw. Arbeit) bedarf, um eine (gleichförmige!) Bewegung des Rades aufrecht zu erhalten. Ganz ähnliche Betrachtungen und Folgerungen gelten natürlich auch für die Gleitreibung.

§ 4. Reibungszahlen. Gegenüber der verwickelten Beschaffenheit der Reibungserscheinungen, wie sie schon in den vorhergehenden kurzen Betrachtungen zum Ausdruck kommt, haben sich als theoretische Ansätze zu ihrer gesetzmäßigen Erfassung bis heute nur die einfachen, von Coulomb herrührenden, erhalten, die im wesentlichen aus den Gleichungen (1) und (2) bestehen. In ihnen werden die Reibungszahlen f_0 und f als Festwerte für die in Berührung stehenden Körper angenommen. Die Beschaffenheit der in Berührung stehenden Flächen wird gewöhnlich nur durch die ganz ungenauen Wortbezeichnungen: „trocken“, „geschmiert“, „mit Wasser“ u. dgl. beschrieben. Dadurch wird verständlich, daß die Zahlenwerte für die Reibungszahlen, die von verschiedenen Forschern angegeben wurden, so stark voneinander abweichen (es gibt eben bis heute kein Mittel, um die Oberflächenbeschaffenheit in einer der Reibungsfrage angepaßten Art mit hinreichender Genauigkeit zu kennzeichnen). Hierzu kommt auch noch der Umstand, daß bei den für technische Zwecke angestellten Untersuchungen meist mit nicht besonders hergerichteten Versuchskörpern gearbeitet wurde, diese vielmehr gewöhnlich so in die Versuchsanordnung eingesetzt wurden, wie sie die Praxis zur Verfügung stellte.

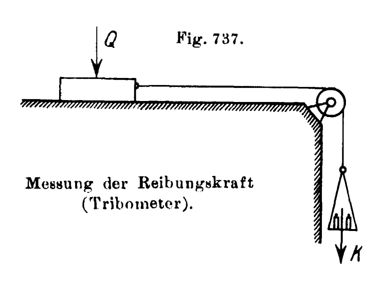


Fig. 737.
Messung der Reibungskraft (Tribometer).

Die Versuchseinrichtungen, die früher zu solchen Messungen verwendet wurden, waren die denkbar einfachsten: die schiefe Ebene nach Fig. 735 oder 736 und das Tribometer nach Fig. 737, ein belasteter Schlitten, der mit der Führungsschiene aus dem zu untersuchenden Stoffpaar besteht; durch Ver-

bindung mit einer Waagschale kann sowohl die für den Eintritt als auch die zur Aufrechterhaltung einer Bewegung erforderliche Kraft K (die fast immer kleiner als die erstere ist) ermittelt werden. In neuerer Zeit werden die Anordnungen der sogenannten Reibungsräder (s. unten) den Messungen zugrunde gelegt. Versuche über die Rollreibung werden mit schweren zylindrischen Walzen, die man längs einer schiefen Ebene herunterrollen läßt, ausgeführt.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Zahlenwerte für die Gleitreibungszahlen, die bei den verschiedenen Versuchen gefunden wurden, ist in der folgenden Zahlentafel enthalten.

Tafel der Reibungszahlen f_0 und f.

Reibungszahlen	f_0 (Haftreibung)			f (Bewegungsreibung)		
Stoffpaar	trocken	geschmiert	mit Wasser	trocken	geschmiert	mit Wasser
Stahl auf Stahl	0,15	0,12–0,11	—	0,09–0,03	0,009	—
Metall auf Holz	0,6–0,5	0,1	—	0,5–0,2	0,08–0,02	0,26–0,22
Holz auf Holz	0,65	0,2	0,7	0,4–0,2	0,16–0,04	0,25
Leder auf Metall (Draht)	0,6	0,25–0,12	0,62	0,5–0,25	0,15–0,12	0,36
Lederriemen auf Eichentrommel	—	0,12	0,38	0,27	—	—
Hanfseil auf rauhem Holz	0,5	—	—	—	—	—
Hanfseil auf pol. Holz .	0,33	—	—	—	—	—
Holz auf Stein	bis 0,7	0,4	—	0,3	—	—
Stein auf Ziegel	0,73–0,5	—	—	—	—	—
Mauerwerk auf Beton .	0,76	—	—	—	—	—
Mauerwerk auf gewachsenem Boden	0,65–0,3	—	—	—	—	—
Stahl auf Eis	0,027	—	—	0,014	—	—

Die weiten Grenzen, zwischen denen diese Angaben schwanken, lassen vermuten, daß die Versuchsbedingungen und die Art der Versuchskörper sehr verschieden gewesen sein mußten. Man erkennt jedoch unmittelbar, daß bei Verwendung von Schmiermitteln die Reibungszahlen nicht nur kleiner, sondern auch merklich einander gleich werden, so daß der Einfluß der Beschaffenheit der festen Körper selbst sehr stark in den Hintergrund tritt. Bei der Verwendung von Schmiermitteln handelt es sich eben nicht mehr um eine Reibung von festen Körpern, sondern von zähen Flüssigkeiten, die an den Oberflächen der in Berührung stehenden Körper haften, und die nahezu die gleiche Größe haben muß, wie auch die Körper selbst beschaffen sein mögen. Aus der Zahlentafel ist auch zu ersehen, daß das Wasser eine Ausnahmestellung einnimmt; es wirkt nämlich manchmal als Schmiermittel, manchmal als Gegenschmiermittel, das die Reibung vergrößert; doch ist bisher noch keineswegs festgestellt, worin diese eigentümliche Sonderstellung des Wassers begründet ist.

Außer den bisher erwähnten sind noch andere Umstände auf die Größe der Reibungszahl von Einfluß, die in den Ausdrücken des Coulombschen Gesetzes nicht zutage traten: die Größe des auf die Einheit der Berührungsfläche entfallenden Druckes, die Berührungsdauer, die Faserrichtung (die Walzrichtung bei Stahl, Faserung bei Holz u. dgl.) und bei der Bewegungs-

reibung vor allem die Geschwindigkeit. Was diese letztere betrifft, so ergeben die Messungen eine Abnahme der Reibungszahl mit wachsender Geschwindigkeit; der Verlauf ist in Fig. 738 angegeben und läßt sich mit großer Annäherung in die folgende Formel zusammenfassen, die auch den diesbezüglichen Festsetzungen des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen zugrunde liegt:

$$f = \frac{1 + 0{,}0112 \,.\, v}{1 + 0{,}06 \,.\, v} \cdot f_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei für trockene Flächen $f_0 = 0{,}45$ und für nasse $f_0 = 0{,}25$ zu setzen und v in m/s anzugeben ist. Nach dieser Formel ist für $v = 0 : f = f_0$, Reibungszahl der Ruhe, und für $v = \infty : f = 0{,}186 \, f_0$.

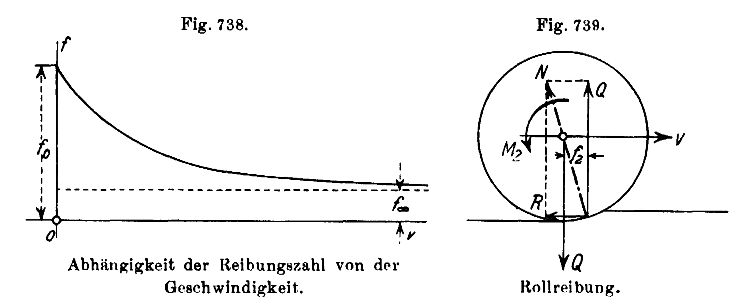


Fig. 738. Abhängigkeit der Reibungszahl von der Geschwindigkeit.

Fig. 739. Rollreibung.

Ganz entsprechend der Form der bisher besprochenen Coulombschen Reibungsgesetze für Gleitreibung sind auch die Ansätze für die Roll- und Bohrreibung gebildet worden. Da es sich dabei um Drehbewegungen handelt, ist es vorteilhaft, den Roll- und Bohrwiderstand in Form von Momenten anzusetzen, und zwar werden beide ganz so wie in der Coulombschen Theorie dem Berührungsdruck N proportional gesetzt. Man schreibt daher

für das Moment der Rollreibung: $M_2 = f_2 \,.\, N$ . . . . . . (4)

„ „ „ „ Bohrreibung: $M_3 = f_3 \,.\, N$ . . . . . . (5)

Aus Dimensionsgründen müssen beide Reibungszahlen f_2 und f_3 die Bedeutung von Längen haben. Für die Rollreibung kann f_2 als jene Länge gedeutet werden, um die die lotrechte Komponente des Normaldruckes unter dem Einfluß der Verformung der Rollflächen an dem Schwerpunkt des rollenden Rades vorbeigeht (Fig. 739).

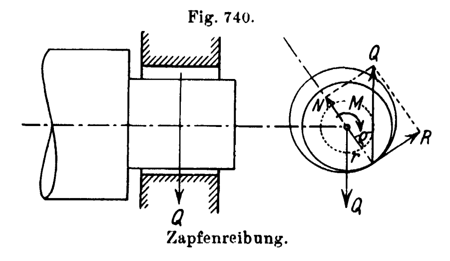
Was die Größe der Rollreibungszahl anlangt, so mögen als ungefähre Anhaltspunkte die folgenden gelten:

Eisenbahnräder auf Schienen oder Pockholz auf Pockholz . . . . $f_2 = 0{,}05$ cm
Ulmenholz auf Pockholz . . . . $= 0{,}08$ cm
Fahrgestellräder mit Gummibereifung auf Wiesengrund (Anlauf und Landung von Flugzeugen) $f_2 = 1$ bis $1{,}5$ cm.

§ 5. Physikalische und technische Anwendungen der Reibung.

Vorgänge und Verfahren, bei denen die Reibung eine ausschlaggebende Rolle spielt oder doch einen merklichen Einfluß ausübt, lassen sich im Gebiete der Physik und der Technik in außerordentlich großer Zahl anführen. Man kann fast behaupten, daß es kaum eine Erscheinung der physikalischen und technischen Wirklichkeit und kaum irgend eine menschliche Beschäftigung gibt, bei der nicht die Reibung in irgend einer Weise zur Geltung kommen würde. Man bedenke, daß es ohne die Reibung kein Gehen, kein Fahren, kein Reiten gibt, der gesamte Eisenbahnverkehr beruht auf der Mitwirkung der Reibung. Die meisten Geräte, von der Gabel angefangen bis zum Kraftwagen benutzen die Eigenschaften der Reibung. Diese umfassende Bedeutung macht die Reibung zu einer der wichtigsten Erscheinungen der Physik und Technik überhaupt.

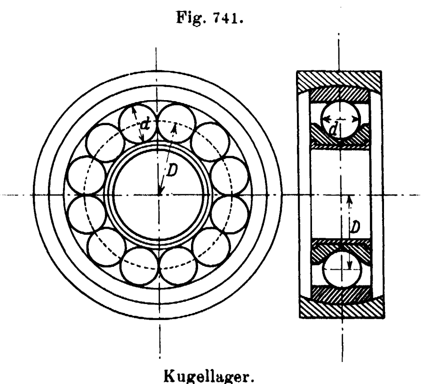
Fig. 740.



Zapfenreibung.

Aus der großen Zahl der Anwendungen seien im folgenden nur jene hervorgehoben, bei der die Wirkung der Reibung auf Grund der Coulombschen Gesetze in einfacher Weise verfolgt werden kann, und die eine praktische Bedeutung erlangt haben.

Fig. 741.



Kugellager.

a) Zapfen und Lager. Den Widerstand, der zur Bewegung eines belasteten Zapfens in einem umschließenden Lager — eine Anordung, die bei allen unseren Maschinen vorkommt — fortgesetzt zu überwinden ist, hat man unter Verwendung des Coulombschen Reibungsgesetzes zu berechnen gesucht. Nach Fig. 740 verlangt das Gleichgewicht des mit Q belasteten Zapfens an der Berührungsstelle zwischen Zapfen und Lager das Auftreten eines Normaldruckes N und einer Reibungskraft R, die zusammen wieder Q ergeben müssen, so daß ein Moment von der Größe

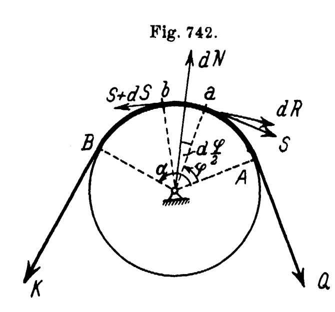
$$M = Q \cdot r \sin \varrho = f_1 \cdot Q \quad \cdots \cdots \quad (6)$$

welches das Zapfenreibungsmoment genannt wird, dauernd aufzuwenden ist, um die Reibung zu überwinden. Den auftretenden Beiwert $f_1 = r \cdot \sin \varrho$ nennt man die Zapfenreibungszahl, der man die Dimension einer Länge zuschreiben muß. Da jedoch eine Bewegung eines jeden solchen

Zapfens ohne Verwendung von Schmiermitteln, durch die der ganze Vorgang eine Erscheinung der Flüssigkeitsreibung wird, nicht denkbar ist, so kann dieser Ansatz eigentlich kaum als eine Darstellung der wirklichen Verhältnisse angesehen werden. Trotzdem ist er noch fast allein im Gebrauch. Genauere Versuche haben auch ergeben, daß auf die Größe der Lagerreibung vor allem auch die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens (Gleitgeschwindigkeit) und der Einheitsdruck von Einfluß sind.

Das wirksamste konstruktive Mittel zur Verminderung der Zapfenreibung sind die Kugel- und Walzenlager. In Fig. 741 ist eine schematische Darstellung eines solchen Kugellagers wiedergegeben, bei dem die Kugeln in passend geformten Rillen angeordnet sind. Die Kugeln stehen entweder (wie in Fig. 741) in unmittelbarer Berührung miteinander, oder es sind besondere „Käfige" eingesetzt, welche diese unmittelbare Berührung verhindern. Die Zwischenräume zwischen den Kugeln sind mit Öl ausgefüllt. Derartige Kugellager werden sowohl als Querlager (zur Aufnahme einer Querbelastung) als auch als Längslager (zur Aufnahme eines Axialschubes) verwendet und stehen heute in ungeheuerem Ausmaße, von den kleinsten Abmessungen für physikalische Apparate angefangen, über mittlere Abmessungen (bei Fahrrädern, Automobilen, Transmissionen usw.) bis zu den größten Abmessungen für rein technische Zwecke (z. B. bei Kranen) in Verwendung.

Fig. 742.



Kräfte am Seil über einer rauhen Walze.

b) Riemen und Seil. Wird nach Fig. 742 um eine rauhe Scheibe oder Walze ein Riemen oder ein Seil herumgelegt, so beobachtet man, daß zur Überwindung einer an einem Ende des Seiles wirkenden Last Q an dem anderen eine wesentlich größere Kraft K nötig ist, oder auch, daß man mit einer kleinen Kraft K an einem Ende einer viel größeren Last am anderen das Gleichgewicht halten kann.

Um die auftretenden Beziehungen zahlenmäßig zu verfolgen, betrachten wir ein Teilchen $a\,b$ des Seiles mit dem kleinen Zentriwinkel $d\,\varphi$, an dem die Seilspannungen S, $S + d\,S$, der Normaldruck $d\,N$ und die Reibung $d\,R$ angreifend zu denken sind. Die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte in der Richtung der Normalen ergibt die Beziehung:

$$d\,N = 2\,S \sin \frac{d\,\varphi}{2} = S \,.\, d\,\varphi,$$

und in der Richtung der Tangente:

$$d\,S = d\,R = f_0 \,.\, d\,N = f_0 \,.\, S\,d\,\varphi.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{d\,S}{S} = f_0\,d\,\varphi$$

und durch Integration, wenn für $\varphi = 0 : S = Q$ sein soll:

$$S = Q \cdot e^{f_0 \varphi}.$$

Im besonderen wird für $\varphi = \alpha$, $S = K$:

$$K = Q \cdot e^{f_0 \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

woraus hervorgeht, daß die Kraft K bei großen Werten des Winkels den Wert von Q außerordentlich überwiegen kann. Die gesamte am Umfang der Scheibe auftretende Reibung hat die Größe:

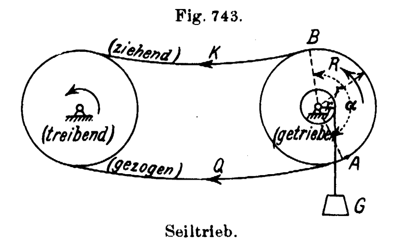
$$R = K - Q = Q\,(e^{f_0 \alpha} - 1) = K \cdot \frac{e^{f_0 \alpha} - 1}{e^{f_0 \alpha}} \quad \ldots \ldots \quad (7a)$$

Wenn die Kraft K' zu bestimmen ist, die zum Halten der Last Q nötig wäre, so ist zu beachten, daß in diesem Falle die Reibung von selbst der Kraft K zu Hilfe kommt; ihr Richtungssinn ist daher umzukehren und es folgt:

$$K' = Q / e^{f_0 \alpha} = Q \cdot e^{-f_0 \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Diese Erscheinung findet Anwendung beim sogenannten Riemen- oder Seiltrieb nach Fig. 743. Durch einen Riemen oder ein Seil wird eine treibende

Fig. 743.



Seiltrieb.

Scheibe, die mit der Antriebsmaschine in Verbindung steht, mit einer getriebenen Scheibe in Verbindung gebracht, wodurch an der Welle der getriebenen Scheibe irgend eine Arbeitsleistung (Hebung eines Gewichts, Antrieb einer Arbeitsmaschine u. dgl.) ausgeführt werden kann. Es ist bekannt, daß der Riemen oder das Seil mit einer bestimmten kleinsten Spannung um die Scheiben herumgelegt werden muß, damit eine solche „mechanische Kraftübertragung" tatsächlich möglich ist. Nach den obigen Formeln muß die am Umfang der getriebenen Scheibe auftretende Reibung (Umfangskraft) groß genug sein, um das Drehmoment der Belastung, das in Form $G \cdot r_1$ angesetzt werden soll, zu überwinden; es muß also

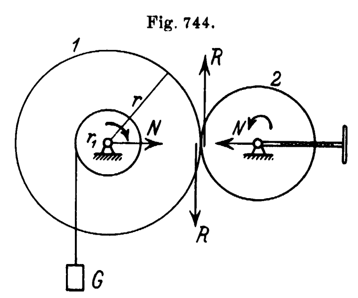
$$R \cdot r \geqq G \cdot r_1$$

sein, und durch Benutzung der obigen Werte für K ergeben sich für die Spannungen im gezogenen und ziehenden Seilstück die Werte:

$$\left.\begin{aligned} Q &\geqq \frac{1}{e^{f_0 \alpha} - 1} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot G \\ K &\geqq \frac{e^{f_0 \alpha}}{e^{f_0 \alpha} - 1} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot G \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

c) Reibungsräder in der Ausführung nach Fig. 744 dienen ebenfalls zur Übertragung einer Leistung von einer Welle, die mit einer Kraftmaschine in Verbindung steht, auf eine andere, an der, wie zuvor, irgend ein belasten-

Fig. 744.



Reibungsräder.

des Drehmoment $G \cdot r_1$ überwunden werden soll. Es ist hierzu das Auftreten der Reibung R (Umfangskraft) von bestimmter Größe an der Berührungsstelle erforderlich, die wieder durch die Gleichung gegeben ist:

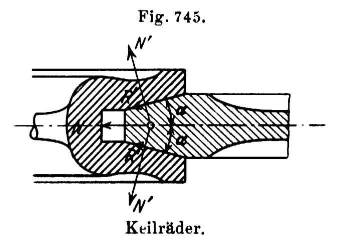
$$R \cdot r \geqq G \cdot r_1.$$

Zur Ausbildung dieser Reibung müssen die beiden Räder mit einer Kraft N aneinander gepreßt werden, die nach dem Coulombschen Reibungsgesetz in der Form $N = R/f_0$ anzusetzen ist, so daß für die Größe dieses Normaldruckes die Gleichung folgt:

$$N = \frac{R}{f_0} \geqq \frac{1}{f_0} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot G \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Um bei gleichem N die Umfangskraft R zu vergrößern oder bei gleicher Umfangskraft einen kleineren Achsendruck N verwenden zu können, werden

Fig. 745.



Keilräder.

die Reibungsräder in Form von Keilrädern nach Fig. 745 ausgebildet. Für die Umfangskraft ergibt sich sodann:

$$R = 2 f_0 \cdot N',$$

und die Beziehung zwischen dem Achsendruck N und dem auf die Keilflächen ausgeübten Druck N' folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für die Richtung des Achsendruckes:

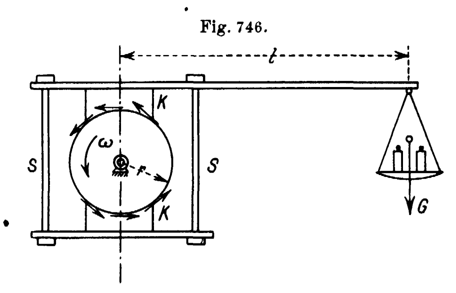
$$N = 2 N' \sin\alpha + 2 f_0 N' \cos\alpha = 2 N' (\sin\alpha + f_0 \cos\alpha),$$

und damit folgt die Größe des Normaldruckes N, der zur Überwindung des belastenden Drehmomentes nötig ist, in der Form:

$$N = \frac{\sin\alpha + f_0 \cos\alpha}{f_0} \cdot R \geqq \frac{\sin\alpha + f_0 \cos\alpha}{f_0} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot G \cdot \ldots \ldots \quad (11)$$

d) Der Pronysche Zaum nach Fig. 746 dient zur Messung der Leistung kleinerer Maschinen durch direkte Wägung. Auf der Welle der Maschine wird eine Scheibe aufgesetzt und auf diese werden passend geformte und mit

Fig. 746.



Pronyscher Zaum.

entsprechenden Packungen versehene Holzklötze K gelegt, die mittels der Schrauben S, S angezogen werden können. Das von der Scheibe auf diesen Zaum ausgeübte Drehmoment $R.r$ (R = gesamte Umfangskraft) kann sodann unmittelbar durch die auf eine Waagschale aufgelegten Gewichte G am Arm l abgewogen werden, so daß das Drehmoment der Maschine in der Form erscheint:

$$M = G.l \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Wenn die Drehzahl n der Maschine in der Minute an einem Drehzeiger (Tachometer) abgelesen wird so ergibt sich ihre Leistung in PS in der Form:

$$N = \frac{2\pi}{60 \, . \, 75} \cdot G \cdot l \cdot n = 0{,}0014 \, G \cdot l \cdot n \cdot \ldots \ldots \quad (13)$$

e) Die einfachen Maschinen sind seit altersher bekannte einfache Vorrichtungen, die den Zweck haben, mit einer kleinen Kraft größere Lasten zu überwinden. Im Altertum und Mittelalter sind sie anscheinend fast allein als Hilfsmittel zur Herstellung der großartigen Bauwerke verwendet worden, die noch heute unsere Bewunderung erregen. Es gibt sechs solcher einfachen Maschinen: Den Hebel, die schiefe Ebene, den Keil, die Schraube, die Rolle und das Wellrad. Wegen der kleinen Arbeitsgeschwindigkeiten, die dabei in Frage kommen, werden die Beziehungen zwischen Kraft und Last einfach durch die Gleichgewichtsbedingungen geregelt, die durch Einführung der an allen Berührungsstellen (Zapfen, Lagern, Führungen u. dgl.) auftretenden Reibungen und der übrigen auftretenden Widerstände zu ergänzen sind. Als Wirkungsgrad (η) bezeichnet man

das Verhältnis der Last Q, die durch eine solche Anordnung tatsächlich, d. h. mit Berücksichtigung der Reibung überwunden werden kann, zu jener ideellen Last Q_0, die bei fehlenden Reibungen, also im günstigsten Fall durch die gleiche aufgewendete Kraft überwunden werden könnte. Es ist also

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} \; (< 1) \qquad (14)$$

Die Reihe der wichtigen technischen Anwendungen der Reibungserscheinungen ließe sich hier noch wesentlich vermehren; aus den angegebenen Beispielen dürften aber die Eigenschaften und die Wirkungsweise der Reibung genügend klar hervorgehen.

Neuntes Kapitel.

Der mechanische Aufbau des festen Körpers in atomistischer Betrachtung[1].

Einleitung.

§ 1. Ziel der atomistischen Betrachtung. Soweit die atomistische Betrachtung des festen Zustandes mechanische Probleme betrifft, hat sie zwei Hauptziele: erstens einen atomistischen Unterbau unter die herkömmliche Mechanik der Kontinua (Elastizitätslehre) zu errichten, und zweitens über die Grenzen hinaus vorzudringen, an denen die Kontinuumsbetrachtung zunächst stehen bleiben mußte. Bei der zweiten Aufgabe handelt es sich hauptsächlich um die Aufstellung von Gesetzen für alle diejenigen mechanischen Erscheinungen der wirklichen Körper, die über den Geltungsbereich des Hookeschen Gesetzes hinausgehen: Festigkeit, Ermüdung, Nachwirkung. Die Versuche, zu einer rein beschreibenden „phänomenologischen" Erfassung der Gesetzmäßigkeiten dieser Erscheinungen zu gelangen, haben zu sehr geringen Erfolgen geführt. Erst das Studium der metallischen Einkristalle lehrte, wie individuell verschieden die Grundgesetze sind, und erklärte, wieso aus technischen Versuchen mit vielkristallinem Material keine allgemeingültigen Gesetze erschlossen werden können. Da die Untersuchungen an Metalleinkristallen mit der atomistischen Darstellung und den prinzipiellen Vorstellungen vom Aufbau in engem Zusammenhang stehen, sollen sie im zweiten Abschnitt dieses Kapitels besprochen werden.

Der Hauptteil des ersten Abschnittes hingegen soll der atomistischen Grundlegung der mechanischen Kontinuumsgesetze des festen Körpers gewidmet werden, das ist im wesentlichen des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes. Doch wird eine Reihe anderer, prinzipiell wichtiger Erscheinungen gestreift werden. In Anbetracht der geringen Kenntnis, die wir von den Atomkräften selbst haben, kann es sich zunächst nur darum handeln, den formalen Übergang von der Atomistik zur Kontinuumsdarstellung zu finden — analog etwa, wie die Maxwellschen Gleichungen in Körpern durch die Elektronentheorie formal „begründet" werden. Die Aufgabe zerfällt in zwei Abschnitte: einmal die Form der beschreibenden Gesetze aus möglichst allgemeinen Ansätzen der Atomistik wiederzugewinnen, und zweitens die Materialkonstanten, die in diese Gesetze eingehen, auf die (unbekannten)

---

[1]) Von Prof. Dr. P. P. Ewald in Stuttgart.

fundamentalen Konstanten der atomaren Kraftwirkungen zurückzuführen, d. h. sie durch Summen über die Atomkräfte („Gittersummen") auszudrücken. Für ihre numerische Berechnung sind genauere Vorstellungen über die Einzelkräfte der Atome unumgänglich, und daher kommt es, daß der Erfolg nur in seltenen Fällen gut ist.

§ 2. Einkristall und Vielkristall. Der Ausdruck „fester Körper" muß sofort stark eingeschränkt werden, wenn auf ihn die folgenden Ausführungen anwendbar sein sollen. Von den „festen Körpern" im Sinne der technischen Mechanik sind zunächst alle diejenigen auszuscheiden, die inhomogen sind: Hölzer, Faserstoffe, Gesteine, Metalle. Ihre Erforschung ist offenbar durch die Grobstruktur erschwert. Man erwartet Aufklärung über ihre — technisch so wichtigen — mechanischen Eigenschaften mittelbar durch das Studium der einfacheren homogenen Stoffe.

Auch von den homogenen Stoffen scheiden wir eine große Zahl von den folgenden Betrachtungen aus, weil über ihren Aufbau noch zu wenig bekannt ist: es sind Stoffe wie Glas, Pech, Gele (Leim, Opal), die als amorph bezeichnet werden. Im Gegensatz zu den Kristallen besitzen sie keine regelmäßige Atomlagerung. Man faßt sie als unterkühlte Flüssigkeiten mit sehr großer innerer Reibung auf, weil sie auch geringen Kräften bei lange dauernder Einwirkung schließlich durch bleibende Formänderung nachgeben. Zudem sind ihre Eigenschaften mit der Temperatur stark und kontinuierlich variabel. Weder in der Dichte noch in der Viskosität oder der spezifischen Wärme zeichnet sich ein Schmelzpunkt durch eine scharfe Sprungstelle aus, wie es bei kristallinen Substanzen der Fall ist.

Somit bleiben als die typischen einfachsten Vertreter des festen Zustandes die Kristalle übrig. Von ihnen wissen wir seit der Laue-Friedrich-Knippingschen Entdeckung der Röntgeninterferenzen in Kristallen [1912] [1]), daß sie durch einen streng gesetzmäßigen inneren Aufbau ausgezeichnet sind. Durch die Röntgeninterferenzen haben sich viele Substanzen, deren kristalliner Aufbau vorher nicht bekannt war, als mikro- oder kryptokristallin erwiesen, z. B. Metalle, deren Korngröße jenseits des Auflösungsvermögens der Mikroskope liegt, kolloidal verteilte Metalle, Kohle und ähnliche. Auch in organischen Strukturen wie Pflanzenfasern, Sehnen, Perlen hat die Röntgenuntersuchung kristalline Elemente als Grundlage für den Aufbau aufgedeckt, und zwar in mehr oder weniger regelmäßiger Anordnung kleiner Kriställchen. Man spricht, sobald bei mikrokristallinen Substanzen nicht eine völlig ungeregelte Lagerung der Kriställchen vorliegt, von geregelten Substanzen. Es ergibt sich bei ihnen die neue Aufgabe, ihre mechanischen Eigenschaften mit der Besonderheit ihrer „Regelung" oder „Textur" in Zusammenhang zu bringen — eine Aufgabe, die für eine gegebene Substanz nur so gelöst werden kann, daß zunächst die mechanischen Eigenschaften des einfachen kristallinen

---

1) W. Friedrich, P. Knipping, M. Laue, Sitzungsber. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1912, S. 303.

Bausteins ermittelt und die Eigenschaften des Ganzen durch geeignete Summenbildungen daraus gewonnen werden. Daher wird in den meisten Fällen für die Einsicht in das mechanische Verhalten dieser großen Klasse von Substanzen, die auch als Polykristalle oder Vielkristalle bezeichnet werden, die Vorbedingung sein, daß man ihre Bausteine in genügend großen Formen als Mono- oder Einkristalle zur Untersuchung erhalten kann. Gerade bei Metallen beruhen die Fortschritte der letzten Jahre auf neuen Methoden, Einkristalle herzustellen, d. h. den Baustein des polykristallinen Materials zu studieren.

Auch von diesem Gesichtspunkt aus erscheint also der Kristall als der typische Vertreter des Festkörpers. Seine Anisotropie (d. h. die gesetzmäßige Verschiedenwertigkeit der Richtungen in ihm) ist die primäre Eigenschaft des festen Zustandes; die Isotropie, die bequemlichkeitshalber oder mangels besserer Ansätze in den früheren Versuchen, die Mechanik des festen Zustandes zu erfassen, vorausgesetzt wurde, ist entweder nicht vorhanden oder entsteht bestenfalls als Mittelwert über ungeregelte Einzelkriställchen.

§ 3. Polare, nichtpolare und metallische Kristalle. Es erweist sich bei dem heutigen Stande unserer Kenntnis als notwendig, der folgenden Darstellung noch eine weitere Unterscheidung voranzuschicken: zwischen polaren und nichtpolaren bzw. metallischen Kristallen. Es handelt sich dabei um graduelle Unterschiede, die eng mit dem chemischen Verhalten der Stoffe zusammenhängen. Polar heißen Kristalle dann, wenn sie aus Ionen aufgebaut sind. Die Alkalihalogenide, z. B. NaCl, sind typisch polare Kristalle. Bezeichnend für sie ist, daß ihr inneres Kräftespiel wesentlich beeinflußt ist durch die Coulombschen Anziehungs- und Abstoßungskräfte, die zwischen den Ionenladungen entstehen. Im idealen polaren Kristall ist jedes Ion als in sich abgeschlossenes, starres Gebilde anzusehen, dessen Existenz durch die Gesetze der Atommechanik geregelt wird, ohne daß die Nachbarn Einfluß darauf hätten. Das Gegenstück bilden die ausgesprochen nichtpolaren Kristalle, in denen sich keine atommechanisch abgeschlossenen Gebilde abgrenzen lassen. Ein Beispiel dürfte Diamant sein; wie wenig wir über seinen Aufbau auch wissen — außer der Lage der Schwerpunkte der C-Atome, wie sie durch die Röntgenuntersuchung gelehrt wird —, so viel dürfte sicher sein, daß die Atome in ihren Lagen gehalten werden durch quantenmechanisch geregelte Wechselwirkungen. Dies soll heißen, daß sich entweder gar nicht genau abgrenzen läßt, was zum einzelnen Atom gehört (daß z. B. Elektronenbahnen mehrere Kerne umschlingen), oder mindestens, daß die Konfiguration des einzelnen Atoms (und damit auch seine Kraftwirkung nach außen) wesentlich von den umgebenden Atomen mitbestimmt wird. Ein Verständnis der aufbauenden Kräfte in einem nichtpolaren Kristall scheint mithin einen gleichen Grad der Beherrschung der Atommechanik vorauszusetzen wie die Berechnung eines nichtpolaren Moleküls — z. B. N_2, O_2. Hiervon sind wir leider noch weit entfernt. Daher kommt es, daß sich über die Theorie der Gitterkräfte nichtpolarer Kristalle kaum etwas Sicheres sagen läßt. Der Zugangsweg, der,

abgesehen von dem richtigen atommechanischen Aufbau[1]), am meisten Aussicht auf schnellen Erfolg verspricht, ist der Vergleich verschiedener Stoffe auf Grund ihrer chemischen Eigenschaften. Da dies aus dem Rahmen dieser Darstellung herausfällt, sei auf den Aufsatz von H. G. Grimm im Handbuch der Physik, Bd. XXIV (Springer, 1926) verwiesen. Dort wird auch eine Teilung der nichtpolaren Bindungsart in die der Nichtmetalle und die der Metalle vorgenommen. Vergleichen wir in der Tat typische Vertreter beider, etwa Diamant und Kupfer, so ergibt sich, daß außer den elektrischen und thermischen Leitfähigkeiten auch viele rein mechanische Eigenschaften quantitativ so verschieden bei Leitern und Nichtleitern der Elektrizität sind, daß eine Sonderung in zwei Gruppen von Stoffen mit ganz verschiedenen Gitterkräften unverkennbar ist. Im metallischen Leiter existieren freie bzw. leicht verschiebliche Elektronen, von deren Anordnung, Bahnen und Bindungsgrad wir uns nur schwer eine genauere Vorstellung machen können[2]). In Nichtleitern wie Diamant, Schwefel, organischen Verbindungen ist die nichtpolare Bindung keinesfalls mit einer annähernd so großen Verschieblichkeit der Elektronen durch das ganze Gitter verknüpft.

Die geschilderten Klassen von Gittern sind nicht schroff geschieden, sondern es gibt vielfache Übergänge. Zum Beispiel hört bei vielen aus Ionen bestehenden Substanzen die volle Selbständigkeit der Ionen auf, die oben für den ideal-polaren Kristall gefordert wurde. Man hat der Beinflussung durch die Umgebung dadurch Rechnung getragen, daß man eine „Polarisierbarkeit“ der Ionen eingeführt hat, d. h. eine Deformierbarkeit unter dem Einfluß der Nachbarn, die eine Verschiebung der positiven und negativen Ladungen des Ions und die Bildung eines Dipols oder höheren Poles gestattet. Der Grad dieser Deformierbarkeit ist aus der Refraktion zu entnehmen[3]). Diese induzierten Dipole ändern die Kraftwirkung der Ionen auf ihre Umgebung ab. Wird die Wechselwirkung benachbarter Ionen zu groß, so läßt sie sich nicht mehr durch Hinzufügung der Dipolwirkung annähern, und es stellt sich ein allmählicher Übergang von polarer zu nichtpolarer Bindung ein. Es liegt aber in der Natur der Sache, daß es nicht möglich ist, auf diesem Wege bis zum wahren Wesen der nichtpolaren Bindung vorzudringen.

Soweit sich ein Verständnis für das mechanische Verhalten der Kristalle auf Grund der Atomkräfte bisher hat erreichen lassen, betrifft es polare Kristalle. Hiermit werden wir uns daher im ersten Abschnitt (§ 4 bis 10) befassen, während wir im zweiten Abschnitt (§ 11 bis 15) bei den Metallen auf einem einfacheren, beschreibenderen Standpunkt bleiben müssen.

I. Die Gittertheorie der polaren Kristalle.

§ 4. Der Hauptansatz der Bornschen Theorie. Eine umfassende Theorie des Übergangs vom atomistischen Diskontinuum zum Kontinuum

[1]) Die Arbeiten von F. London und W. Heitler in Zeitschr. f. Phys. 1927 und 1928 scheinen die atommechanische Theorie der nichtpolaren (oder homöopolaren) Bindung einzuleiten.

[2]) Vgl. hierzu § 10, 3.

[3]) Über Atomrefraktion s. Optikband, I. Hälfte, Kap. VII, § 1.

der älteren Elastizitätstheorie wurde von M. Born [1]) 1915 in seiner „Dynamik der Kristallgitter" aufgestellt, nachdem schon einige Jahre früher vom gleichen Verfasser zusammen mit Th. v. Kármán [2]) im Anschluß an E. Madelung [3]) eine Theorie der spezifischen Wärme der Kristalle und von P. P. Ewald [4]) der formale Übergang zur Kristalloptik hergestellt worden war.

Die Bornsche Theorie betrachtet das Kristallgitter als ein Gegebenes. Über das Problem, warum die eine Substanz das eine, eine andere ein anderes Gitter bildet, weiß man noch recht wenig, vgl. § 10, 1. Für den Zusammenhang mit der Kontinuumstheorie kann diese Frage unerörtert bleiben, und es genügt, die Abweichungen des aus Atomen bestehenden mechanischen Systems von seiner Gleichgewichtslage zu betrachten.

Als Repräsentanten der Kristallgitter [5]) nehmen wir den allgemeinsten triklinen Kristall mit Basis, d. h. wir denken uns zunächst eine Gruppe von Atomen, die durch Indizes k („Basisindex") unterschieden werden und sich in Punkten befinden, die von irgend einem Ausgangspunkt aus durch Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_k$ („Basisfahrstrahlen") erreicht werden. Solche Atomgruppen, die „Basis", wiederholen wir in räumlich-periodischer Anordnung, indem wir uns die erste um alle ganzzahligen Vielfache von drei (nicht complanaren) Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ verschoben denken ($\mathfrak{a}_i$ = „Translationen" oder „Achsenvektoren"). Gitter von bestimmten Symmetrieeigenschaften können aus diesem allgemeinen Typ durch Spezialisieren der $\mathfrak{a}_i$ und der Basis gewonnen werden, doch interessiert uns das für das Folgende nicht.

Diese geometrische Schilderung des Gitters als homogenes Diskontinuum wird nach der dynamischen Seite hin ergänzt durch die Behauptung: das ideale Gitter ist ein mechanisches System in einer stabilen Gleichgewichtslage. Ideal nennen wir das Gitter, weil wir von Störungen durch Temperaturbewegung und durch Wachstumsfehler absehen wollen, die beim „Realkristall" berücksichtigt werden müssen (vgl. § 10, 4). Die Stabilität der Gleichgewichtslage ist durch die Erfahrung in den normalen Fällen bestätigt; andernfalls nämlich würde das Kristallgitter durch eine beliebig kleine Energiezufuhr zerstört oder grob abgeändert werden können. Die stabile Gleichgewichtslage der Atome ist die wichtigste Voraussetzung der Bornschen Theorie.

Wie aus der allgemeinen Theorie des Gleichgewichts bzw. der kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage bekannt ist, ist die unmittelbare Folge dieser Voraussetzung, daß bei einer Entfernung des Gitters aus der Gleichgewichtslage rücktreibende Kräfte entstehen, die zunächst linear mit dieser Entfernung wachsen. Hierin hat man den Ursprung des Hookeschen Gesetzes (Spannung proportional Deformation) zu sehen, es folgt aber auch

[1]) M. Born, Dynamik der Kristallgitter; Teubner, 1915. Die wesentlich vertiefte Darstellung in der Enzykl. d. math. Wiss. V, Art. 25 ist als zweite Auflage dieses Buches erschienen: Atomtheorie des festen Zustandes; Teubner, 1923.
[2]) M. Born und Th. v. Kármán, Physik. Zeitschr. **13**, 297, 1912.
[3]) E. Madelung, Gött. Nachr. 1909, S. 100.
[4]) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **49**, 117, 1916 (1912 erschienen als Dissertation).
[5]) Vgl. den Artikel Buchwald in Bd. II, 2, sowie Bd. III, 2, Kap. IV, § 3.

sofort sein Charakter als Näherungsgesetz und sein Versagen, sobald bei steigender Entfernung von der Ruhelage die Abweichungen zwischen den wahren Kräften und den linear extrapolierten merklich werden. In diesem Falle kommt man ein Stück weiter durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder in der Entwicklung der Kräfte nach den Verrückungen der Atome (vgl. § 7, 1). — Zunächst aber suchen wir am Beispiel des einfachen Hookeschen Gesetzes den Übergang von der atomistischen zur kontinuumsmäßigen Darstellung zu finden.

§ 5. Statische mechanische Eigenschaften (Elastizitätstheorie).

1. Die homogene Deformation. Unter einer homogenen Deformation des Gitters verstehen wir eine (kleine) Abänderung der Zelle und der Basis. An den Translationen $\mathfrak{a}_i$ werden somit Änderungen $\delta\mathfrak{a}_i$ angebracht, an den Basisvektoren $\mathfrak{r}_k$ Änderungen $\delta\mathfrak{r}_k$. Ein Atom ist im undeformierten Gitter durch den Fahrstrahl $\mathfrak{r}_k^l$ bestimmt, wobei l, der „Zellenindex", eigentlich ein Tripel ganzer Zahlen l_1, l_2 und l_3 ist und der ganze Fahrstrahl zum k-ten Atom in der l-ten Zelle sich offenbar folgendermaßen aufbaut:

$$\mathfrak{r}_k^l = l_1\mathfrak{a}_1 + l_2\mathfrak{a}_2 + l_3\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{r}_k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$\mathfrak{r}_k$ hat die in § 4 beschriebene Bedeutung des Basisfahrstrahls. Werden nun die Achsen und die Basis abgeändert, so wird die Lageänderung des Teilchens (l, k)

$$\delta\mathfrak{r}_k^l = \sum l_i\delta\mathfrak{a}_i + \delta\mathfrak{r}_k. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Für die äußere Form des Kristalls ist nur die Änderung $\delta\mathfrak{a}_i$ der Zelle wirksam, und zwar ergeben sich die Deformationsgrößen der Kontinuumstheorie für den ganzen Kristall genau so groß, als wenn man eine Zelle als Begrenzung eines Stückes Kontinuum betrachtet und dessen Deformation bestimmt. Infolgedessen lassen sich statt der Achsenänderungen $\delta\mathfrak{a}_i$ selbst die aus der Kontinuumstheorie geläufigen Deformationsgrößen $u_{xx}\ldots u_{xy}$ einführen (in Kap. VII, § 10, $\varepsilon_x\ldots\gamma_{xy}\ldots$ genannt). Bezeichnen wir die x-Komponente der Verrückung des Teilchens (l, k) statt durch $\left(\delta(\mathfrak{r}_k^l)\right)_x$ mit $\mathfrak{u}_{kx}^l$, ferner $\delta\mathfrak{r}_k$ mit $\mathfrak{u}_k$, so wird aus der letzten Gleichung

$$\mathfrak{u}_{kx}^l = \mathfrak{u}_{kx} + \sum_y u_{xy}\, y_k^l. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Hierin ist, in der durch Born eingeführten Schreibweise, y_k^l der Repräsentant für eine der drei Komponenten von $\mathfrak{r}_k^l$, und die Summe ist über alle y, d. h. über die drei Komponenten zu erstrecken. Die Gleichung sagt in anderer Form wieder, daß jede homogene Verzerrung besteht aus einem vom Zellenindex l unabhängigen ersten Teil (Verrückung der Teilgitter k gegeneinander, Basisdeformation) und einem zweiten Teil, bei dem die Abstände von Basis zu Basis geändert werden, als wäre die Basis starr und mit einem Punkt angeheftet an ein der Verzerrung unterworfenes Kontinuum. Die relative Abänderung der Basis ist direkt makroskopisch nicht nachweisbar. Trotzdem ist sie von großem Einfluß auf das elastische Verhalten, weil Basisform und Zellform einander bedingen. So verursacht z. B. in piezoelektrisch erregbaren Kristallen ein angelegtes elektrisches Feld primär eine Deformation der Basis,

indem es die positiven Basisbestandteile in der einen, die negativen in der entgegengesetzten Richtung zieht. Auf den ganzen Inhalt der Zelle entsteht durch das äußere elektrische Feld keine resultierende Kraft, da er ja neutral ist. Aber die Basisdeformation ihrerseits bewirkt eine Zelldeformation, welche die makroskopische Deformation des Kristalls zur Folge hat (Umkehrung des piezoelektrischen Effekts; Frequenznormalien der Radiotechnik mit schwingender Quarzplatte, siehe Akustikband, Kap. II, § 5). Die Basisdeformation ist erst von Born gebührend berücksichtigt worden; die Begründer der Elastizitätstheorie in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts (Navier, Cauchy) haben sie übersehen, und daher stimmte ihre atomistische Begründung der Kontinuumstheorie nicht mit der Erfahrung und diskreditierte die atomistische Vorstellungsweise lange Zeit.

Fig. 747.

Zur Definition der Spannung.

2. Definition der Spannung. Die atomistische Definition der Spannung im Gitter lehnt sich eng an ihr kontinuumsmäßiges Vorbild an. Bezeichnen wir zwei beliebige Atome mit P und P', und sei $\mathfrak{f}_{PP'}$ die Kraft zwischen ihnen bei ihrer tatsächlichen Lage im Gitter. Denken wir uns nun zur Definition der „Spannung" eine Ebene durch das Gitter gelegt, die es in eine rechte und eine linke — oder besser eine „ungestrichene" und eine „gestrichene" — Hälfte teilt. Als „Spannung" bezüglich dieser Ebene wird die gesamte Kraftwirkung definiert, die die ungestrichene Gitterhälfte ausübt auf diejenigen Atome der gestrichenen Gitterhälfte, welche in einem über der Flächeneinheit der Trennungsfläche errichteten Zylinder liegen (Fig. 747). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}$ die Normale der Trennungsfläche, mit $\mathfrak{S}$ den Spannungstensor, so wäre formelmäßig

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{n}) = \sum_{P'} \sum_{P} \mathfrak{f}_{PP'} \qquad (4)$$

(P und P' variieren in den in Fig. 747 gezeichneten Bereichen). Die Spannung stellt sich also als Gittersumme über die Atomkräfte dar. Man erkennt leicht, daß es auf die genaue Lage der Trennungsfläche nicht ankommt. Denn überstreicht diese bei einer Parallelverschiebung ein Atom, so daß es aus der ungestrichenen in die gestrichene Hälfte übertritt, so wird die Ebene von den am Atom mündenden, statt von den aus ihm austretenden Kraftlinien durchsetzt; da aber an jedem Atom Gleichgewicht herrscht, sind dies gleich viele, so daß die Spannung sich für die Ebene vor und hinter dem Atom gleich groß ergibt. Es wird gezeigt[1], daß bei kleinen Deformationen die gittertheoretisch definierte Spannung Tensorcharakter hat, d. h. eine lineare Vektorfunktion der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ ist.

3. Natürlicher Zustand; Kohäsion; Zerreißfestigkeit. Die Spannung ist ein wichtiger Begriff zur Definition des natürlichen Zustandes eines Gitters. Darunter wird der spannungsfreie verstanden.

[1] M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, S. 546.

Im spannungsfreien Zustand ist die innere Energie des Gitters ein Minimum; für jeden anderen Zustand ist diese Energie [1]) vermehrt um die elastische Energie, die als Spannungsenergiefunktion durch eine quadratische Form in den Spannungskomponenten [mit den Elastizitätsmoduln als Koeffizienten] [2]) oder als Verzerrungsenergiefunktion als quadratische Form der Verzerrungskomponenten (mit den Elastizitätskoeffizienten) ausgedrückt wird. Nur im spannungsfreien Kristall stellt sich der normale Gitterabstand unter dem Einfluß der Atomkräfte ein. Denkt man sich das Gitter durch eine Ebene in zwei Hauptgitter aufgeteilt, so übt die eine Gitterhälfte auf die zweite im natürlichen Zustand zunächst keine resultierende Kraft aus. Sobald aber der Versuch gemacht wird, die zweite Gitterhälfte von der ersten zu entfernen, entsteht eine rücktreibende Kraft — die Kohäsion. Diese wächst bis zu einem Maximum, um sodann mit weiter zunehmender Entfernung der beiden Halbgitter schnell gegen Null abzunehmen. Ihr Maximalwert heißt die theoretische Zerreißfestigkeit. Wir kommen darauf später (§ 9, 2) zurück.

Da bei der homogenen Deformation die Spannungen sich für alle parallelen Lagen der Trennungsfläche gleich ergeben, gilt dies auch für die äußersten Atomschichten. Hieraus folgt, daß am Rande äußere Kräfte auf die Atome wirken müssen, damit auch an den Randschichten Gleichgewicht herrscht: ein homogenes Spannungsfeld und homogene Deformation entstehen nur unter dem Einfluß geeigneter äußerer Flächenkräfte (Spannungen).

4. Zusammenhang zwischen Deformation und Spannung (Hooke). Um nun den Zusammenhang zwischen Deformationen und Spannungen und somit das Koeffizientenschema der beschreibenden Elastizitätslehre zu gewinnen, muß berechnet werden, welche Spannungen bei der allgemeinsten homogenen Deformation auftreten, die den Kristall aus dem natürlichen Zustand entfernt.

Wir setzen dabei voraus, daß die Kraftwirkung zwischen irgend zwei Atomen P und P' (etwa aus den in Fig. 747 bezeichneten Bereichen) durch die ersten Ableitungen (den „Gradienten") eines Potentials $\varphi_{PP'}$ darstellbar sei. Verändert man den Abstand PP', so wird die Veränderung der Kraftwirkung durch das Produkt aus den zweiten Ableitungen des Potentials und den zugehörigen Verschiebungen der Atome gegeben. Will man nun die Gesamtkraft aufstellen, die bei einer Verzerrung des Gitters am einzelnen Basisatom (l, k) angreift (x-Komponente $\mathfrak{K}^l_{kx}$), so muß man die Summe der zweiten Ableitungen von φ mal den Atomverrückungen über das ganze Gitter bilden; will man andererseits die Spannungskomponente K_{xy} bilden (y-Komponente der Kraft pro Flächeneinheit einer quer zur x-Richtung gedachten Trennungsfläche), so muß die Summe aller Kraftänderungen festgestellt werden, welche infolge der Abstandsänderungen der Punkte P und P' in Fig. 747 entstehen. In beiden Fällen hat man die Verschiebungen $\mathfrak{u}^l_k$ bzw. ihre Kom-

[1]) Bei konstant gehaltener Temperatur ist eigentlich die „freie Energie" (Bd. III, 2, Kap. IV, § 21) um die Verformungsarbeit vermehrt. Doch ist der Unterschied gegen die Änderung der inneren Energie gering.

[2]) Vgl. Kap. VII, § 20, Gl. 58.

ponenten $\mathfrak{u}^l_{kx}$ [Gl. (3)] der homogenen Verzerrung einzuführen, mit denen die zweiten Ableitungen des Potentials multipliziert werden. Bei der Summation treten die vom Zellenindex l unabhängigen Größen $\mathfrak{u}_k$ (Basisverzerrung) und u_{xy} (Deformationskomponenten des Kontinuums) heraus; sie sind multipliziert mit gewissen, über das Gitter zu erstreckenden Summen der Potentialableitungen, die wir als Koeffizienten der $\mathfrak{u}_k$ bzw. u_{xy} bezeichnen.

In Bornscher Schreibweise wird so:

$$\mathfrak{K}_{kx} = \sum_{k',y} \begin{bmatrix} k\,k' \\ x\,y \end{bmatrix} \mathfrak{u}_{k'y} - \sum_{yz} \begin{bmatrix} k \\ x\,y\,z \end{bmatrix} u_{yz} \quad \ldots \ldots \quad (5\text{a})$$

$$K_{xy} = -\sum_{k,z} \begin{bmatrix} k \\ x\,y\,z \end{bmatrix} \mathfrak{u}_{kz} - \sum_{x'y'} [x\,y\,x'y']\, u_{x'y'} \quad \ldots \quad (5\text{b})$$

Diese Formeln bedürfen der Erläuterung. Die Koeffizienten der $\mathfrak{u}_k$ und u_{xy} sind als Klammern geschrieben. Die erste Klammer z. B. heißt, daß hier ein Koeffizient (Gittersumme) steht, der von den Kombinationen kx sowie $k'y$ abhängt. Dieser Koeffizient gibt nämlich an, welcher Beitrag zur x-Komponente der Kraft auf das k-te Basisatom geliefert wird durch die y-Komponente der Verschiebung des Teilgitters k'. k und k' sowie x, y, x' usw. sind Repräsentanten für die Basisbestandteile bzw. die Koordinaten. Die $\sum\limits_{k',y}$ z. B. heißt, daß über alle Basisatome und alle drei Komponenten ihrer Verrückungen zu summieren ist. Die resultierende Kraft selbst ist bei einer homogenen Verzerrung für alle Atome des gleichen Teilgitters k dieselbe; darum ist sie $\mathfrak{K}_{kx}$, nicht $\mathfrak{K}^l_{kx}$ geschrieben. Insgesamt sagt die erste Zeile der Gleichungen: Bei einer homogenen Gitterdeformation kann eine resultierende Kraft auf die einzelnen Basisbestandteile entstehen. Sie setzt sich linear aus den Anteilen zusammen, welche a) durch die Basisverschiebungen $\mathfrak{u}_k$ und b) durch die Zellverzerrungen u_{yz} geliefert werden. Die Koeffizienten dieser linearen Beziehung sind Gittersummen aus den zweiten Ableitungen der Potentiale.

Ebenso lesen wir jetzt die zweite Zeile: die bei der homogenen Deformation im Gitter entstehenden Spannungen setzen sich linear aus Beiträgen der Basisverschiebungen und der Zelldeformationen zusammen. Auch wenn keine Zelldeformation stattfindet, entstehen also Spannungen durch die inneren (makroskopisch nicht bemerkbaren) Basisverzerrungen.

Bei einer homogenen Verzerrung darf keine resultierende Kraft auf die Basis entstehen. Denn sie wäre die gleiche für jede Zelle, und der Kristall könnte nicht in Ruhe bleiben. Es ist daher $\sum\limits_k \mathfrak{K}_{kx} = 0$, wie man an den expliziten Darstellungen der Gittersummen auch ablesen kann.

Bislang ist die homogene Deformation dargestellt durch 9 Größen u_{xy}, welche den 9 Komponenten der 3 vektoriellen Translationsänderungen $\delta\,\mathfrak{a}_i$ gleichwertig sind, sowie durch s vektorielle Änderungen $\delta\,\mathfrak{r}_k$ der s Basisfahrstrahlen $\mathfrak{r}_k$, die zu den $3s$ Komponenten $\mathfrak{u}_{kx}$ führen. Von den u_{xy} sind nur 6 wesentlich, die als Deformationskomponenten übrigbleiben, wenn wir starre Drehungen des Gitters als uninteressant ausschließen. Von den $\mathfrak{u}_{kx}$ fallen 3 als unwesentlich fort, da ja nur die relativen Lagen der s Basisatome physikalisch von Belang sind.

Hätten wir ein Gitter aus einer einzigen Atomsorte ($s = 1$, „einfaches“ Gitter), so hieße die obige Bedingung $\sum_k \mathfrak{K}_{kx} = 0$ einfacher $\mathfrak{K}_x = 0$, da wir überhaupt keinen Basisindex k einzuführen hätten. In der Tat verschwinden alle Kraftkomponenten am Atom des einfachen Gitters, weil in diesem auch bei homogener Verzerrung jedes Atom Symmetriezentrum der ganzen Anordnung bleibt. Wir hätten ferner, da kein wesentliches $\mathfrak{u}_{kx}$ vorhanden,

$$K_{xy} = -\sum_{x'y'} [x\,y\,x'\,y']\,u_{x'y'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hiermit hätten wir für das einfache Gitter die Spannungskomponenten als lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten dargestellt, d. h. das Hookesche Gesetz gewonnen. Für die Koeffizienten, die in anderer Schreibweise als c_{ik} bezeichnet werden, erhält man hier Gittersummen $[x\,y\,x'\,y']$, von denen man leicht zeigen kann, daß sie bei beliebigen Vertauschungen der x, y, x', y' ungeändert bleiben[1]). Nun gibt es aus den drei Werten x, y, z nur 15 verschiedene Koeffizienten dieser Art (3 mit 4 gleichen Zeichen; 6 mit 3 gleichen; 3 mit 2 verschiedenen Paaren; 3 mit nur 2 gleichen). Mithin ergibt sich für ein einfaches Gitter ein Schema von **15** verschiedenen elastischen Koeffizienten. Dies ist das Resultat der „Rarikonstantentheorie“, das von Cauchy stammt. Die Symmetrieeigenschaften, die man durch spezielle Wahl der Translationen $\mathfrak{a}_i$ für das Gitter erreichen kann, setzen die Zahl 15 weiter herab, so daß z. B. für ein kubisches Gitter nur noch zwei übrigbleiben. Ebenso würden auch für vielkristalline Aggregate, die aus kubischen Kriställchen aufgebaut sind, sich nur zwei unabhängige Konstanten ergeben, bzw. das Poissonsche Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation müßte $\sigma = 1/4$ sein. Die Messungen an Metallen, für die die Voraussetzung einfacher Gitter gemacht wurde (die sich fast 100 Jahre später durch die Röntgeninterferenzen bestätigt hat), zeigten die Unhaltbarkeit der Cauchyschen Rechnung und diskreditierten die atomistische Begründung der Elastizität.

Wir wenden uns nunmehr einem aus s Basisteilchen zusammengesetzten Gitter zu, indem wir auf die Gl. (5) zurückgreifen. In einem solchen Gitter ist die Deformation im einzelnen durch die $9 + 3s$ Größen u_{yz} und $\mathfrak{u}_{kx}$ bzw. durch die $6 + 3(s - 1)$ wesentlichen unter ihnen bestimmt. Will man auf einen direkten Zusammenhang zwischen den makroskopischen Deformationskomponenten u_{yz} und den Spannungen K_{yz} kommen, so müssen die Basisverrückungen $\mathfrak{u}_{kx}$ aus Gl. (5b) eliminiert werden. Dies ist in der Tat möglich. Denn damit Gleichgewicht herrscht, genügt es nicht, daß die Resultierende aller Basiskräfte $\sum_k \mathfrak{K}_{kx} = 0$ ist, sondern an jedem Basisatom muß das einzelne $\mathfrak{K}_{kx} = 0$ sein. Das ergibt, in Gl. (5a) eingetragen, $3s$ lineare Beziehungen zwischen den $\mathfrak{u}_{ky}$ und den u_{yz} und gestattet, diese $3s$ inneren Deformationsgrößen durch die 9 äußeren linear auszudrücken. Physikalisch bedeutet dies, daß zu einer gegebenen Zelldeformation eine ganz bestimmte

---

1) Born, Atomtheorie, S. 548.

Basisdeformation gehört, durch welche erst erreicht wird, daß das Gleichgewicht an jedem einzelnen Basisteilchen entsteht. Setzt man nun diese Deformation $\mathfrak{u}_{kx}$ in Gl. (5 b) ein, so entsteht wiederum ein linearer Zusammenhang zwischen K_{xy} und $u_{x'y'}$:

$$K_{xy} = -\sum_{x',y'}([x\,y\,x'\,y'] + [x\,y;\; x'\,y'])\,u_{x'y'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Der Koeffizient von $u_{x'y'}$ besteht erstens aus den uns vom einfachen Gitter her bekannten Gittersummen; zweitens treten durch den Eliminationsprozeß weitere Teile hinzu, bei denen (wie die Rechnung ergibt) nicht beliebig alle vier Angaben x, y, x', y' vertauscht werden dürfen, sondern nur die ungestrichenen unter sich, die gestrichenen unter sich oder das gestrichene Paar gegen das ungestrichene [also wie z. B. im Ausdruck $(x + y)(x' + y')$]. Im ganzen gibt es mit den drei Koordinatenrichtungen x, y, z **21** solche Koeffizienten, nämlich

$[x\,x;\; x\,x]$ . . . 3 mal	$[x\,x;\; y\,z]$ . . . 3 mal
$[x\,x;\; x\,y]$ . . . 3.2 „	$[x\,y;\; x\,z]$ . . . 3 „
$[x\,x;\; y\,y]$ . . . 3 „	$[x\,y;\; x\,y]$ . . . 3 „

Bei freier Vertauschbarkeit, wie bei den Koeffizienten $[x\,y\,x'\,y']$, fallen die beiden letzten Zeilen als selbständige Vertreter fort, da schon vorher Koeffizienten mit zwei x- und zwei y-Stellen (bzw. einer y- und einer z-Stelle) aufgeführt sind. Da aber natürlich die Symmetrie des ganzen Koeffizienten in Gl. (7) durch die des niedrigst-symmetrischen Teiles bedingt ist, haben wir in (7) das Hookesche Gesetz in der Form der Multikonstantentheorie vor uns: die Einstellung der Basis durch innere Verrückung übt eine solche Rückwirkung auf die Zelldeformation aus, daß die volle Zahl von 21 Koeffizienten erforderlich ist, um den Zusammenhang zwischen Deformationskomponenten und Spannungen zu geben. Die sechs Gleichheiten

$$[x\,y\,x\,z] = [x\,x\,y\,z] \quad \text{und} \quad [x\,y\,x\,y] = [x\,x\,y\,y] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

welche die zwei letzten Zeilen der obigen Aufzählung für die Koeffizienten mit unbeschränkter Vertauschbarkeit zum Fortfall bringen, heißen die Cauchyschen Relationen. Sie sollen nach der Gittertheorie nur dann gelten, wenn (wie im einfachen Gitter) jedes Atom Symmetriezentrum der ganzen Anordnung ist und deshalb bei jeder homogenen Deformation derselben im Gleichgewicht bleibt. Wie schon oben erwähnt, sprechen die Messungen nicht für die allgemeine Geltung der Rarikonstantentheorie. Hingegen finden sich die Cauchyschen Relationen erfüllt an Gittern wie NaCl und KCl (Messungen von W. Voigt), also bei polaren Kristallen, in denen jedes Ion ein Symmetriezentrum des Gitters ist. Die Anzahl von Kristallen, deren Elastizitätseigenschaften vollständig bekannt sind, ist sehr gering. Neuerdings sind die Metalleinkristalle eingehend von P. W. Bridgman[1]) untersucht worden. Obwohl viele von ihnen Gitter haben, in denen die Voraussetzungen für die Cauchyschen Relationen erfüllt sind, werden diese doch nicht bestätigt. Die folgende Tabelle stellt die Werte von Voigt bei Steinsalz und Sylvin, sowie die von Bridgman an einigen Metallkristallen den Cauchyschen

[1]) P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **60**, 305, 1925.

Relationen gegenüber (wobei statt der Bezeichnung durch vier Indizes die Voigtsche durch zwei Indizes benutzt ist).

Tabelle 1. Elastizitätskonstanten kubischer Kristalle in kg/mm²; Erfüllung der Cauchyschen Relation $C_{44} = C_{23}$.

Stoff	Autor	c_{11}	c_{44}	c_{23}	$\frac{c_{23} - c_{44}}{c_{44}}$	Cauchysche Relation $c_{23} = c_{44}$ sollte
NaCl	W. Voigt[1])	4 770	1 294	1 320	~ 0,02	erfüllt sein
KCl	K. Försterling[2])	3 760	650	640	~ 0,01	
Cu	W. Voigt[1])	13 420	5 590	6 575	~ 0,2	
W	P. W. Bridgman[3])	51 300	20 500	15 300	~ -0,25	
CaF_2	W. Voigt[1])	16 700	3 470	4 570	~ 0,3	nicht erfüllt sein
FeS_2	W. Voigt[1])	36 800	10 750	4 830	~ 0,6	
$NaClO_3$	W. Voigt[4])	6 330	1 218	-2 140	~ 3	

Die Erfüllung der Cauchyrelationen bei den extrem polaren Kristallen wird man als Stütze für die Bornsche Gittertheorie buchen. An diesen Kristallen bestätigen sich auch ihre sonstigen Folgerungen weitgehend. Auch zeigen sich die Relationen nicht erfüllt bei polaren Kristallen mit solcher Struktur, daß sie gittertheoretisch nicht erwartet werden dürfen. Wenn die Metalle die Cauchyrelationen trotz einfacher Struktur nicht erfüllen, so kann man entweder annehmen, daß die Elektronen der Atome so leicht verschieblich sind, daß sie als selbständige Gitterbestandteile nach Art der Atome (d. h. mit eigenen Gleichgewichtslagen) in Rechnung zu ziehen sind (also Vergrößerung der Zahl s der Basisbestandteile), oder aber, daß der ganze Bornsche Ansatz der statischen Gleichgewichtslage des Gitters auf Metalle nicht angewandt werden darf. Zwischen diesen beiden Möglichkeiten läßt sich heute wohl noch kaum entscheiden.

§ 6. Dynamische Eigenschaften (Gitterschwingungen).

1. Langsame und schnelle Gitterschwingungen. Wie jedes System, das aus einer stabilen Gleichgewichtslage gestört wird, kann auch das Kristallgitter mechanische Schwingungen ausführen. Sprechen wir zunächst von den freien oder Eigenschwingungen, so finden sich darunter solche, die einen direkten Anschluß an die Kontinuumstheorie gestatten. Das sind diejenigen, bei denen die Basis nur mit ihrer Gesamtmasse am Trägheitswiderstand beteiligt ist. Diese Art von Schwingungen läßt sich schildern als eine nicht ganz homogene, gegen die Abmessungen der Gitterzellen nur sehr langsam veränderliche Deformation, die das Gitter durchzieht und die Zellen als ganze verschiebt. Die lokal entstehenden Spannungen dienen im wesentlichen zur Beschleunigung der ganzen in den Gitterzellen befindlichen Massen, da die Basisverzerrung so klein ist bzw. so langsam geschieht, daß in ihr keine nennenswerte kinetische Energie aufgespeichert ist. Von dieser Art sind z. B.

[1]) W. Voigt, Wied. Ann. **36**, 642, 1888.
[2]) K. Försterling, Zeitschr. f. Phys. **2**, 172, 1920.
[3]) P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **60**, 305, 1925.
[4]) W. Voigt, Wied. Ann. **44**, 168, 1891.

akustische Schwingungen, die das Gitter durchziehen. Sie lassen sich berechnen, wenn man die bei statischen Deformationen gültigen Beziehungen zwischen Deformation und Spannung zugrunde legt, d. h. mittels der gewöhnlichen Elastizitätskoeffizienten.

Über die beschreibende Kraft der statischen Elastizitätstheorie hinaus geht die zweite Art von Schwingungen, bei der der Hauptteil der kinetischen Energie und der Trägheitswiderstand gegen die Bewegung in der schnell wechselnden Basisverzerrung steckt. Die Bewegung läßt sich etwa als ein Gegeneinanderschwingen der einzelnen Teilgitter k aus ungleichen Basisbestandteilen beschreiben. Da durch die Basisverzerrung starke Kräfte geweckt werden, die zur Beschleunigung geringer Massen dienen (beides im Vergleich zu den akustischen Schwingungen), so liegen die Frequenzen dieser Schwingungen sehr hoch („schnelle“ oder „ultrarote“ Schwingungen). Je mehr Atome die Basis enthält, um so mehr solche Schwingungen gibt es; jede hat eine eigene Schwingungsform (Polarisation im verallgemeinerten Sinn, von Born als „Eigenvektoren“ bezeichnet) und eine eigene Frequenz. Je nach der Richtung und Wellenlänge, mit der die Schwingung das Gitter durchzieht, findet eine kleine Abänderung derjenigen Schwingungsform und Frequenz statt, welche eine einzige im Potentialfeld des im übrigen starr gehaltenen Gitters schwingende Basis aufweisen würde.

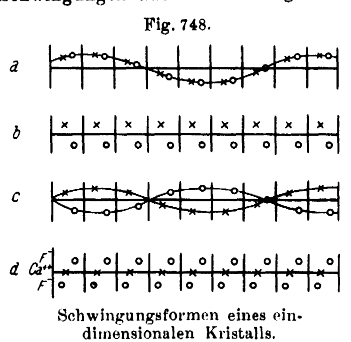
Als einfachstes Beispiel betrachten wir ein lineares Gitter aus abwechselnd positiven und negativen Ionen, also ein Gegenstück zum Steinsalzgitter. Fig. 748a stellt eine „langsame“ oder „akustische“ Transversalschwingung des Gitters dar. Die Inhalte der durch vertikale Striche abgeteilten Zellen werden im wesentlichen undeformiert auf und ab bewegt. Fig. 748b zeigt die ultrarote Schwingung von unendlich großer Wellenlänge, bei der die Teilgitter gegeneinanderschwingen, ohne daß eine Bewegung der Zellenschwerpunkte stattfände. Man kann die Bewegung als Schwingung der undeformierten Teilgitter gegeneinander beschreiben. Denkt man sich in Fig. 748a die Wellenlänge unendlich groß, so entsteht eine einfache Parallelverschiebung des undeformierten Gitters, und die rücktreibenden Kräfte verschwinden. Entwickelt man die zu den verschiedenen Schwingungsarten der Fig. 748 gehörenden Frequenzen ω nach der Wellenzahl $1/\lambda$ der Schwingung, so müssen also die Frequenzen der Schwingungen (a) eine Entwicklung erhalten von der Art $\omega = 0 + \omega^{(1)} \cdot 1/\lambda + \cdots$ Hingegen schließen sich an die Schwingungsform (b) mit der zugehörigen Frequenz $\omega^{(0)}$ bei Verkleinerung der Wellenlänge Schwingungen der in Fig. 748c dargestellten Art an, deren Frequenzen demgemäß Entwicklungen von der Art $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} 1/\lambda + \cdots$ besitzen. Das heißt: ihre Frequenz wird im wesentlichen durch die auf die einzelnen Basisteile wirkenden rücktreibenden Kräfte bestimmt, bei endlicher Wellenlänge aber modifiziert durch die Inhomogenität der auftretenden Verzerrung.

Die Gesamtheit aller Frequenzen, die das Gitter ausführen kann, heißt sein elastisches Spektrum. Es ist ein kontinuierliches, begrenztes Streckenspektrum; das heißt, es gibt (mit geeigneten Schwingungsweisen und Ausbreitungsrichtungen) alle Frequenzen zwischen gewissen Grenzen. Im Gegensatz dazu hat

eine Saite von endlicher Länge (vgl. Kap. IV, Teil V), also ein begrenztes Kontinuum ein unbegrenztes Punktsystem, nämlich eine Grundfrequenz und ihre unendlich vielen Oberfrequenzen. (Vgl. auch unten 2.)

Da die inneren Verrückungen der Basis in die Elastizitätskoeffizienten nur sehr summarisch eingehen, lassen sich die schnellen (ultraroten) Schwingungen aus ihnen nur größenordnungsmäßig vorhersagen. Zu ihrer Erregung bedarf es einer hinreichend schnellperiodischen Beeinflussung der inneren Kopplungen zwischen den Basisatomen, z. B. durch ultrarotes Licht. Hierbei entstehen erzwungene Schwingungen. Bei der Annäherung der erregenden Frequenz an eine Eigenfrequenz tritt durch Resonanz ein besonders starkes Ansprechen des Gitters auf, das sich in einer Erhöhung des Brechungsindex und in verstärkter Absorption bemerklich macht (Reststrahlen, ultrarote Absorptionsstreifen).

Fig. 748.



Schwingungsformen eines eindimensionalen Kristalls.

Allerdings gilt dies nur für die sogenannten optisch aktiven[1]) Eigenschwingungen (z. B. Fig. 748 b), d. h. jene, die zu einem elektrischen Moment der Basis führen. Eine Eigenschwingung von der Art von Fig. 748 d, die etwa in Flußspat $Ca^{++} F_2^{-}$ entstehen könnte, gehört mit ihrer großen Basisverzerrung ebenfalls zu den schnellen, aber, da trotz der Ladung der Ionen kein elektrisches Moment entsteht, zu den optisch nicht erregbaren, inaktiven Schwingungen. Die langsamen erzwungenen Schwingungen sind direkt nur erregbar, wenn periodich wechselnde resultierende Kräfte an der ganzen Basis entstehen, z. B. durch die Drucke auftreffender Schallwellen. Es ist aber eine indirekte Erregung auf dem Umwege über eine primäre Basisverzerrung möglich, z. B. in den Schwingungsnormalien aus Quarz in der Radiotechnik. Bei diesen entsteht als Folge der Basisverzerrung durch das elektrische Wechselfeld eine periodische Zelldeformation und daher eine Gestaltsänderung der ganzen Quarzplatte. Die Dimensionen der Platte sind so bemessen, daß die mechanische Eigenschwingung der ganzen Platte bei der gewünschten Radiofrequenz liegt. Die äußerst geringe Dämpfung der mechanischen Schwingungen im Quarz[2]) begünstigen das Anwachsen der Amplitude durch Resonanz derart, daß die Platten gelegentlich in Stücke zersprengt werden.

Wegen der inaktiven unter den hochfrequenten Schwingungen ist es nicht möglich, aus den Ultrarotbeobachtungen allgemein auf die Atomkopplungen zurückzuschließen. Nur ein beschränkter Schluß gelingt manchmal[3]):

---

[1]) J. Brester, Diss. Utrecht, 1923; Zeitschr. f. Phys. **24**, 324, 1924.

[2]) Einthoven bestimmte das logarithmische Dekrement für Torsionsschwingungen von Quarzfäden zu $4 \cdot 10^{-5}$ (Versl. Amsterd. Akad. **32**, 369 [1923]).

[3]) Vgl. hierzu vor allem die Arbeiten von Cl. Schaefer und Mitarbeitern; zusammenfassender Bericht von G. Laski in „Ergebnisse d. exakt. Naturwiss.", Bd. III, 1924. (Verlag J. Springer.)

dann nämlich, wenn festgestellt werden kann, daß Eigenfrequenzen von bestimmten eng verbundenen Atomen, etwa von einem Radikal, stammen. Diese Schwingungen sind meist im kurzwelligen Ultrarot gelegen, da die Bindung der Atome eines Radikals sehr fest ist. Sie wiederholen sich mit geringen Verschiebungen in einer Reihe von Kristallen, die das gleiche Radikal enthalten, z. B. CO_3 oder NO_3. Zu diesen Frequenzen finden sich auch meist Obertöne — eine Erscheinung, die durch nichtharmonische Schwingungsweise zu deuten ist (§ 7, 1). Die Schwingungen solcher Gruppen werden durch den Einbau der Gruppe ins Kristallgitter nur unwesentlich beeinflußt. Angenähert kann man ihre Frequenzen an den isolierten Gruppen berechnen (vgl. S. 937).

Abzählungen über die Anzahl Eigenschwingungen stammen von Born[1]), den Einfluß der Kristallsymmetrie hat Brester[2]) untersucht.

2. Gitterschwingungen und spezifische Wärme[3]). Von großer Wichtigkeit sind die verschiedenen Schwingungsarten des Kristalls für die Theorie seiner spezifischen Wärme. Die Eigenschwingungen können nämlich, gehörig normiert, zur Einführung von Normalkoordinaten benutzt werden, so daß sich ein beliebiger Bewegungszustand der Kristallatome durch sie darstellen läßt. Die in diesem enthaltene Gesamtenergie läßt sich als Summe über die in den einzelnen Normalschwingungen steckenden Energien erhalten. Die Normalschwingungen eines mechanischen Systems sind bekanntlich miteinander nicht gekoppelt, sondern ganz unabhängig voneinander, und verhalten sich wie eine Reihe von ungekoppelten Pendeln oder Resonatoren entsprechender Frequenzen. Born und v. Kármán[4]) haben daher den Ansatz gemacht, den Wärmeinhalt eines Kristalls nach der gleichen Weise auf die Normalschwingungen zu verteilen, wie es für eine Reihe unabhängiger Resonatoren der gleichen Schwingungszahlen $\nu = \omega / 2\pi$ nach der Planckschen Formel

$$u_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (9$$

zu geschehen hätte. Um diese Verteilung vornehmen zu können, muß die Zahl der in einen Frequenzbereich $d\nu$ fallenden Eigenfrequenzen, d. h. die Belegungsdichte des elastischen Spektrums des Kristalls, bekannt sein.

Das elastische Spektrum eines (unendlich groß gedachten) Kristallgitters ist ein begrenztes Streckenspektrum, beginnend mit 0 [der zur bloßen Verschiebung eines Gitters gehörenden Frequenz (siehe oben S. 937)] und endigend mit der höchsten, durch Basisverzerrung hervorgebrachten Frequenz. In einem zusammengesetzten Kristall kann das Streckenspektrum in verschiedene, durch Lücken getrennte Abschnitte zerfallen, so z. B., wenn in $CaCO_3$ die Eigenschwingungen des CO_3-Radikals weit höher liegen als die nächst schnellen Schwingungen der CO_3-Gruppe gegen das Ca-Ion. In diesem

[1]) M. Born, Verh. D. phys. Ges. **19**, 243, 1917.
[2]) J. Brester, Diss. Utrecht, 1923.
[3]) Vgl. Bd. III, 1, Kap. 7, S. 374 u. f., sowie Bd. III, 2, Kap. 4, § 10.
[4]) M. Born und Th. v. Kármán, Physik. Zeitschr. **13**, 297, 1912.

Falle hätte man eine lange Strecke von möglichen Frequenzen (von 0 bis zu der der geschilderten Schwingung von CO_3 gegen Ca), dann eine Lücke und schließlich eine oder mehrere kurze Strecken von Frequenzen, die infolge Verstimmung der Eigenfrequenzen der isolierten CO_3-Gruppe durch den Einbau ins Gitter entstanden sind (wobei zwar die Ausbreitungsrichtung der Welle mitbestimmend wird, aber die Schwingungsform und Frequenz im ganzen doch nur wenig abgeändert werden). Gibt man jeder möglichen Eigenfrequenz den ihr nach der Planckschen Formel zufallenden Energiebetrag, so stellt sich die Gesamtenergie angenähert dar: erstens durch ein „Debyesches Glied" und zweitens durch „Einsteinsche". Die Debyesche Funktion entsteht durch Integration der Planckschen Funktion über ein mit der Dichte $\varrho \sim \nu^2$ belegtes Streckenspektrum, bzw. besser über ein gleichmäßig belegtes dreidimensionales „Volumenspektrum"; die Einsteinschen Glieder sind nichts anderes als die Plancksche Funktion, genommen für mittlere Frequenzen der isolierten kurzen Stücke des Spektrums, die den Eigenschwingungen bestimmter Atomgruppen entsprechen. Näheres hierüber siehe in Bd. III, 2, Kap. 8, § 3. Die spezifische Wärme wird durch die Temperaturveränderlichkeit des Wärmeinhalts gegeben. Schwierigkeiten bereitet die Reduktion der Formeln, bis sie durch bestimmbare Größen ausgewertet werden können. Die numerische Rechnung stützt sich teils auf die Werte der Schallgeschwindigkeit, teils auf die optisch bekannten Ultrarotfrequenzen der Kristalle, und wird unzuverlässig, sobald die Wellenlängenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit (akustische Dispersion) berücksichtigt werden muss [vgl. Grüneisen und Goens][1]).

§ 7. Gittertheorie mit Berücksichtigung höherer Glieder in der Entwicklung der Gitterkräfte. Die formale Gittertheorie kann einen Schritt weiter durchgeführt werden, wenn nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten Potenzen der kleinen Verrückungen aus der stabilen Gleichgewichtslage berücksichtigt werden. Auf diese Weise lassen sich eine Reihe von Erscheinungen deuten, die vom Standpunkt der ersten Näherung aus unverständlich bleiben. Da starke Verrückungen aus der Ruhelage vor allem durch die thermische Bewegung entstehen, handelt es sich dabei um die Erklärung der thermischen Veränderlichkeit der schon in der ersten Näherung auftretenden Größen.

1. Der anharmonische Oszillator. Das Schema der Einwirkung der höheren Glieder erkennt man aus dem Studium des anharmonischen Oszillators, d. h. einer einzigen, aus einer stabilen Gleichgewichtslage um eine Länge x gestörten Masse, deren rücktreibende Kraft bis zu quadratischen Gliedern in x berücksichtigt wird. Ihre Bewegungsgleichung lautet, bezogen auf die Masseneinheit,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \beta x^2 \qquad (10)$$

[1]) E. Grüneisen und E. Goens, Zeitschr. f. Phys. **26**, 250, 1924 haben bei Cd- und Bi-Einkristallen eine bessere Wiedergabe der spezifischen Wärme ereicht, indem sie die Dispersion und Richtungsabhängigkeit der elastischen Wellen in Rechnung gesetzt haben.

Nimmt man $\beta x \leqslant \omega_0^2$ und setzt für die Frequenz ω der Schwingung und die Elongation x Entwicklungen nach β an:

$$x = x^0 + \bar{x}\beta + \bar{\bar{x}}\beta^2 + \cdots, \qquad \omega = \omega^0 + \bar{\omega}\beta + \bar{\bar{\omega}}\beta^2 + \cdots,$$

so erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$\ddot{x}^0 + \omega_0^2 x^0 = 0, \qquad x^0 = a \cos \omega_0 t,$$

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = x^{02} = {}^1/_2\, a^2 (1 + \cos 2\,\omega_0 t),$$

$$\ddot{\bar{\bar{x}}} + \omega_0^2 \bar{\bar{x}} = \cdots$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{a^2}{2\,\omega_0^2}\,(1 - {}^1/_3 \cos 2\,\omega_0 t),$$

so daß bis auf Glieder der Ordnung $\left(\frac{a\beta}{\omega_0^2}\right)^2$ als Lösung entsteht:

$$x = a\left[\cos \omega_0 t + \frac{a\beta}{2\,\omega_0^2}\,(1 - {}^1/_3 \cos 2\,\omega_0 t) + \cdots\right] \quad \cdots \cdot (10')$$

Das heißt, es superponiert sich über die rein harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 eine doppelt so schnelle Schwingung (1. Oberton), und außerdem entsteht eine zu β und dem Amplitudenquadrat a^2 proportionale Verschiebung $\xi = a^2\beta / 2\,\omega_0^2$ des Schwingungsmittelpunktes — eine Folge davon, daß die rücktreibende Kraft nunmehr einen für beide Vorzeichen von x gleichgerichteten Bestandteil hat.

Das Auftreten des Obertones von der Frequenz $2\,\omega_0$ bzw. noch höherer ist bei den auf S. 938 erwähnten Ultrarotschwingungen der Radikale beobachtet worden und zeigt, daß man bei ihnen mit dem linearen Kraftgesetz nicht mehr auskommt.

Daß die mit der Energie proportionale Verschiebung des Nullpunktes der Grund ist für die mit der Temperatur lineare Wärmeausdehnung, hat als erster Debye[1]) erkannt.

2. Allgemeine Zustandstheorie des festen Körpers. Wärmeausdehnung. Die Nullpunktsverschiebung des anharmonischen Oszillators ließe sich durch eine zeitlich konstante äußere Kraft, die an der Oszillatormasse angreift, unterdrücken. Beobachtet man eine Kette von — sagen wir drei — aneinandergekoppelten Oszillatoren, so würden die Schwingungsmittelpunkte nur dann unverschoben bleiben, wenn eine (mit dem Quadrat der Schwingungsamplitude wachsende) äußere Kraft an den Randatomen angebracht wird. Das heißt: falls die Ausdehnung verhindert wird, entsteht ein thermischer Druck, und umgekehrt entsteht eine Ausdehnung, falls sie nicht durch äußeren Druck verhindert wird. Es wäre genau das gleiche bei einer Kette von beliebig vielen Oszillatoren, die nichtharmonisch aneinandergebunden sind. Im Innern der Kette werden die Abstände aus Symmetriegründen überhaupt unbestimmt bleiben, aber am Rande — sobald die Einwirkung der

[1]) P. Debye in Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Göttingen 1913 (Teubner, 1914).

Atome von rechts und von links nicht mehr gleich ist — wird sich ein Atomabstand einstellen, der von der Anbringung äußerer Kräfte an den Randatomen beeinflußt wird, und dieser Abstand setzt sich durch das Innere des Kristalls bis zum anderen Rande fort. Diese Art von Indifferenz des Kristallinnern gegen die Dimensionierung bringt es mit sich, daß durch Druckkräfte, die nur an den Randatomen angreifen, alle Atomabstände sich gleicherweise abändern können und eine homogene Deformation entsteht. Statt für die Frage der Dimensionierung bis auf die Randatome zurückzugreifen, kann mit Born die Forderung der Spannungsfreiheit für das Kristallinnere („natürlicher Zustand") zur Ergänzung der bloßen Gleichgewichtsbedingung dienen — man erkennt die Gleichwertigkeit beider Verfahren auf Grund der Überlegungen von § 4, 2. Für das Entstehen der Wärmeausdehnung bei einer Kette von nichtharmonisch gebundenen Oszillatoren erkennen wir aus dieser Überlegung, daß die Gleichgewichtsbedingungen im Innern allein keine Wärmeausdehnung liefern — wie es wegen der Symmetrie im Innern sofort ersichtlich ist —, sondern daß man entweder bis zu den Randatomen vorschreiten, oder die Bedingung der Spannungsfreiheit hinzunehmen muß.

Born[1]) hat eine Gittertheorie unter Berücksichtigung der quadratischen Kraftglieder durchgeführt, indem er, wie Debye, die Einwirkung dieser Glieder auf die „freie Energie" des Kristalls ermittelte. In dieser Theorie, die am besten als eine allgemeine Zustandstheorie des festen Körpers gekennzeichnet wird, spielt die Art der Quantelung eine wichtige Rolle. Während für die harmonischen Eigenschwingungen der oben geschilderten Theorie der spezifischen Wärme die quantenhafte Energieverteilung gemäß der Planckschen Funktion die gegebene war, müssen für die anharmonischen Eigenschwingungen besondere Näherungsverfahren auf Grund der Störungsrechnung benutzt werden, die Debye[2]) sowie Born und Pauli[3]) entwickelt haben. Jeder Umstand, der eine Veränderung der wirksamen Frequenzen herbeiführt, bewirkt eine Abänderung der freien Energie und sämtlicher aus ihr nach den Gesetzen der Thermodynamik durch Differentiation zu gewinnenden Größen. So verursacht jede Gitterdeformation durch elastische Beanspruchung eine Änderung der spezifischen Wärme; aber auch die Wärmeausdehnung des Gitters selbst bewirkt das gleiche. Wie man am Beispiel des anharmonischen Oszillators sieht, ist die Verlagerung ξ proportional zu a^2, also zur Energie des Oszillators (wenn in dieser nur der von der harmonischen Schwingung stammende Teil berücksichtigt wird). Mithin ist die Temperaturabhängigkeit der Verlagerung und der inneren Energie die gleiche, d. h. das Verhältnis des Wärmeausdehnungskoeffizienten zur spezifischen Wärme temperaturunabhängig (Satz von Grüneisen). Zur spezifischen Wärme selbst tritt bei hohen Temperaturen ein von T abhängiges Glied, das den experimentellen Befund der Inkonstanz der spezifischen Wärme auch bei hohen Temperaturen bzw. der Überschreitung des Dulong-Petitschen Wertes

[1]) M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, Ziff. 30 (S. 667 u. f.).
[2]) P. Debye, s. Zitat a. S. 941.
[3]) M. Born und W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. 10, 137, 1922.

wiedergibt. Auch eine Reihe anderer, großenteils beobachteter Temperaturwirkungen ergibt sich aus dem Ausdruck der freien Energie des Gitters. Es ist aber nicht notwendig, darauf hier näher einzugehen. Über die Temperaturabhängigkeit der elastischen Koeffizienten würden sich erst bei einer noch weiter gehenden Näherung Aussagen ergeben.

§ 8. Spezielle Ansätze über die Atomkräfte. 1. Der Bornsche Ansatz von Zentralkräften. Die Bornsche Theorie ist zunächst ein Schema, nach dem mit vollem Erfolg die Eigenschaften der festen Körper in ihrer formalen Gesetzlichkeit dargestellt werden können, ohne eine andere Annahme zugrunde zu legen, als daß der ideale Kristall die stabile Ruhelage seiner Atome ist. Die in den formalen Gesetzen auftretenden Koeffizienten (Materialeigenschaften) werden durch Summen über die Gitterkräfte dargestellt. Da es sich um Störungen des Kräftegleichgewichts bei kleinen Verschiebungen handelt, treten die räumlichen Ableitungen der Atomkräfte bzw. die um eine Ordnung höheren Ableitungen der Einzelpotentiale der Atome aufeinander als Summanden in den Gittersummen auf. Es ergeben sich bereits durch diese Betrachtungen Beziehungen zwischen den Koeffizienten, die einer experimentellen Nachprüfung fähig sind. Z. B. sei an den Zusammenhang zwischen den Ultrarotschwingungen und der spezifischen Wärme erinnert, oder an die Cauchyschen Relationen zwischen den Elastizitätskoeffizienten. Solche Beziehungen haben sich oft gut bestätigt gefunden.

Will man über den formalen Inhalt hinaus zu einer tatsächlichen Berechnung der Materialeigenschaften gelangen, so müssen die Atomkräfte spezialisiert werden, bis die Gittersummen sich zahlenmäßig berechnen lassen. Dies ist von Born und seinen Schülern in zahlreichen Arbeiten durchgeführt worden[1]). Hierbei hat sich für eine Gruppe von Körpern, nämlich für die ideal polar gebauten (s. § 3), der Ansatz für das Potential zweier Ionen p und p' von den Ladungen q und q' im Abstand $r_{pp'}$ bewährt:

$$\varphi_{pp'} = \frac{q\,q'}{r_{pp'}} + \frac{b}{r_{pp'}^n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Der erste Teil dieses Potentials ist durch eine Coulombsche, von den Gesamtladungen der Ionen erzeugte Anziehungs- oder Abstoßungskraft hervorgerufen; der zweite durch eine Kraft, die, falls der Exponent n groß genug ist, nur auf ganz kurze Entfernungen wirksam wird. Es ergibt sich, daß dies stets eine Abstoßungskraft ist. Eine solche Kraft muß zur Coulombschen notgedrungen hinzugenommen werden, um z. B. im NaCl-Gitter ein Zusammenfließen aller Ladungen in einem Punkt zu verhindern. Sie entspricht einer gewissen Volumenbeständigkeit der Atome. Daß diese abstoßende Kraft als reine Zentralkraft angesetzt wird, ist ein Versuch, dessen Berechtigung nur nach dem Erfolg beurteilt werden kann. Er dürfte nach unseren derzeitigen

[1]) Vgl. hierzu die zusammenfassenden Berichte über Gittertheorie von: a) Born und Bollnow, Handb. d. Phys., Bd. XXIV, Kap. 5 (1927); b) G. Heckmann, Ergebn. d. exakt. Naturw., Bd. IV, 1925; c) W. Braunbek, ebenda, Bd. VI, 1927.

Vorstellungen vom Atom- bzw. Ionenbau nur dort berechtigt sein, wo er auf Ionen mit abgeschlossenen Edelgasschalen (von hoher Symmetrie) angewandt wird. Demgemäß bewährt er sich bei den Alkalihalogeniden, genügt aber z. B. nicht bei Zinkblende, ZnS, in welcher nach der Meinung von Sommerfeld und Grimm[1]) die beiden Atome nur bis auf eine „Untergruppe" von 4 oder sogar nur (2 + 2) Elektronen (nach dem Stonerschen Schema) ab- bzw. aufgebaut sind. Auch beim Diamant deutet das azentrische Streuvermögen[2]) für Röntgenstrahlen auf eine von der Kugelsymmetrie stark abweichende Einwirkung des Atoms nach außen hin und läßt sich schwer mit der Vorstellung von Zentralkräften zwischen den Atomen vereinen.

2. Absolutdimensionen der Kristallgitter. Auf Grund des obigen Ansatzes läßt sich ein Einblick in die Entstehung der absoluten Dimensionen der Kristallgitter (bei gegebenem Anordnungstyp) gewinnen. Die gesamte innere potentielle Energie des Kristalls ist durch die halbe Summe der Potentiale gegeben, die alle Atome auf alle anderen ausüben. Man muß sie beim unendlichen Gitter auf die Volumeneinheit beziehen und spricht daher besser von Energiedichte; bezieht man sie bei thermochemischen Rechnungen (Bornscher Kreisprozeß, s. Bd. III, 2, Kap. 4, § 12) auf das Mol, so heißt sie Gitterenergie pro Mol. Wird nun die absolute Dimensionierung des Gitters zunächst offengelassen, und ist δ irgend eine Entfernung im Gitter, so besteht die Gitterenergie, wie das Einzelpotential, aus einem zu δ^{-1} und einem zu δ^{-n} proportionalen Teil:

$$G = +\frac{A}{\delta} - \frac{B}{\delta^n}.$$

Das natürliche Gleichgewicht des Gitters entspricht der minimalen Gitterenergie und wird daher bestimmt durch die Forderung

$$\frac{dG}{d\delta} = -\frac{A}{\delta^2} + n\frac{B}{\delta^{n+1}} = 0.$$

Die Konstante A läßt sich durch Summation der bekannten Coulombschen Einzelpotentiale für jeden Typ leicht ausrechnen (Madelungsche Konstante); Methoden hierzu sind von Madelung[3]), Ewald[4]) und anderen angegeben worden. Hingegen ist B unbekannt, da es sowohl vom Exponenten n als auch von den Konstanten b der Einzelpotentiale abhängt, die je nach den aufeinander wirkenden Ionenarten verschieden sind (z. B. für zwei $Na^+ \rightarrow Na^+$-Ionen anders als für $Cl^- \rightarrow Cl^-$ oder für $Na^+ \rightarrow Cl^-$).

Man benutzt daher die obige Gleichgewichtsbedingung nicht zur Berechnung des Gleichgewichtsabstandes δ_0, sondern zur Elimination von B, für das sich ergibt:

$$B = \frac{A}{n}\delta_0^{n-1}.$$

[1]) A. Sommerfeld und G. H. Grimm, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36 (1926).
[2]) W. Ehrenberg, P. P. Ewald und H. Mark, Zeitschr. f. Krist. **66**, 1927.
[3]) E. Madelung, Physik. Zeitschr. **19**, 524 (1918).
[4]) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **64**, 253, 1921.

Setzt man B in die Formel für die Gitterenergie ein, so wird diese für den Gleichgewichtszustand

$$G_0 = \frac{A}{\delta}(1 - 1/n).$$

Man sieht hieraus, daß die Abstoßungskräfte bei hohen Exponenten n nur eine geringfügige Abänderung der in der Hauptsache von den Coulombschen Kräften stammenden Energie des Gitteraufbaues verursachen.

Zwischen dem Abstoßungsexponenten n und der Kompressibilität besteht ein enger Zusammenhang[1]), der leicht begreiflich ist, da im wesentlichen die Abstoßungskräfte ins Spiel treten, wenn man die Atome über die Gleichgewichtslage hinaus nähern will. Born und Brody[2]) haben daher n aus der Kompressibilität unter Benutzung der Absolutdimensionen (Dichte) bestimmt. Sie finden folgende Werte:

	NaCl	NaBr	NaJ	KCl	KBr	KJ
$n =$	7,84	8,61	8,45	8,86	9,78	9,31

Dieser hohe Wert von n läßt sich elektrostatisch deuten durch die Wirkung zweier „Würfelionen" aufeinander. Hierunter sei ein positiver Kern mit 7 bzw. 9 Ladungseinheiten e verstanden, der von 8 Elektronen im Abstand a bzw. a' in Würfelanordnung umgeben ist. Das gegenseitige Potential φ der Würfel hängt von ihrer Orientierung ab; sind f_5 und f_9 Kugelflächenfunktionen, so ist

$$\varphi = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2(a^4 - a'^4)}{r^5} f_5 + \frac{e^2 a^4 a'^4}{r^9} f_9 + \cdots$$

Bei fast gleich großen Ionen (z. B. KCl) überwiegt das Glied mit r^{-9}, so daß eine Deutung für die experimentellen Werte von n nahegelegt ist. Nach den neuen Vorstellungen über Atombau ist die Deutung durch elektrostatische Ladungsanordnung nicht aufrechtzuerhalten. Wie Unsöld[3]) gezeigt hat, gelangt man jedoch auch auf Grund der Vorstellungen, die die Wellenmechanik über die Ladungsverteilung in einem Alkali- oder Halogenion gibt, zum Verständnis eines hohen Abstoßungsexponenten. Die Wellenmechanik löst die Elektronen eines Atoms in eine Wolke negativer Ladung auf, die mit allmählich abfallender Ladungsdichte den Kern umgibt. Nähern sich zwei Ionen soweit, daß die Kerne jeweils in die negative Wolke des andern Ions eindringen, so ist nach den allgemeinen elektrostatischen Gesetzen nur noch ein Teil der Wolke für die Anziehung wirksam. Daher wird die Abstoßung der beiden positiven Kerne aufeinander schnell größer — wobei die wellenmechanisch berechnete Ladungsverteilung gerade ein Anwachsen der Abstoßungskraft hervorruft, das in der Nähe der Gleichgewichtsentfernung der Ionen sich durch ein v^{-n}-Gesetz mit $n \sim 9$ annähern läßt. Daß sich bei der Anwendung dieses Gesetzes auf Ionen mit nicht abgeschlossenen Schalen

[1]) M. Born und A. Landé, Verh. D. phys. Ges. **20**, 210, 1918.
[2]) M. Born und E. Brody, Zeitschr. f. Phys. **7**, 217, 1922.
[3]) A. Unsöld, Zeitschr. f. Phys. **43**, 563, 1927; vgl. L. Pauling, Zeitschr. f. Krist. **67**, 377, 1928.

(z. B. auf ZnS) Schwierigkeiten ergeben[1]), sieht die Wellenmechanik voraus. Wieviel das einfache Bornsche Kraftgesetz aber bei ausgesprochen polaren Substanzen (d. h. solchen mit abgeschlossenen Ionen) leistet, zeigt sich insbesondere in der vorzüglichen Übereinstimmung zwischen der theoretischen und der aus experimentellen Daten berechneten Gitterenergie der Alkalihalogenide[2]).

3. Ansatz polarisierbarer Ionen. Bei nicht idealpolaren Gittern führt die Vorstellung polarisierbarer Ionen, wie auf S. 928 geschildert, ein Stück weiter. Sie ist von Fajans und Joos[3]) auf Probleme der Refraktion und der Adsorption angewandt worden, und Born und Heisenberg[4]) haben die Polarisierbarkeit mit optischen Termwerten in den Serienspektren in Zusammenhang gebracht. Die Einarbeitung dieser Vorstellung in die Gittertheorie ist von G. Heckmann[5]) durchgeführt worden. Wie jeder Influenzvorgang, setzt auch die Deformation der Ionen zu Dipolen (oder die Verstärkung solcher, falls sie schon vorhanden waren, durch Induktion) den Energieinhalt des Systems herab. Man findet also bei gleicher makroskopischer Deformation des Kristallgitters eine geringere Energie vor, wenn man den Ionen erlaubt, im Sinne einer gegenseitigen Polarisation aufeinander einzuwirken; d. h. die Polarisierbarkeit bewirkt eine Verkleinerung der elastischen Koeffizienten, die ja zugleich die Koeffizienten der quadratischen Verzerrungsenergiefunktion sind. Allerdings werden die Koeffizienten nicht alle beeinflußt. Vorbedingung dafür ist nämlich, daß bei den Verzerrungen, für die sie gelten, aus Symmetrierücksichten Dipole entstehen können. Das ist z. B. bei dem Zinkblendegitter nicht der Fall, wenn Normaldrucke längs den kristallographischen Achsen wirken, daher sind ihre elastischen Koeffizienten c_{11} und c_{12} unverändert durch die Polarisierbarkeit. Hingegen verliert sich die hinderliche Symmetrie bei einer reinen Schiebung, der die Gitterzelle unterworfen wird, und daher sind die Koeffizienten c_{14} und c_{44}, welche die Schiebungsdeformation y_z mit dem Normaldruck X_x bzw. der Schubspannung Y_z verknüpfen, empfindlich gegen die Polarisierbarkeit. Heckmann zeigt im Falle der Zinkblende, daß die Empfindlichkeit so groß ist, daß schon ein Bruchteil der — refraktorisch bestimmten — Polarisierbarkeit der Zn^{++}- und S^{--}-Ionen genügt, um die Werte der Konstanten einigermaßen richtig darzustellen. Vor allem verschwindet durch die Polarisierbarkeit die in Zinkblende nicht erfüllte Cauchysche Bedingung (S. 935) auch theoretisch.

Daß die Polarisierbarkeit der Ionen auch das elastische Spektrum des Kristalls verändert, ist offenbar; damit ist auch ein Einfluß auf die spezifische Wärme und auf die Temperaturabhängigkeit dieser und anderer Eigenschaften verknüpft. Dies ist noch nicht berechnet worden. Hingegen findet

---

[1]) M. Born und E. Bormann, Ann. d. Phys. **62**, 218, 1920.
[2]) Vgl. die Tabelle bei M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, S. 751, oder im Artikel Herzfeld, Bd. III, 2, Kap. 4, § 12.
[3]) K. Fajans, Die Naturwiss. **11**, 165, 1922; K. Fajans und G. Joos, Zeitschr. f. Phys. **23**, 1, 1924.
[4]) M. Born und W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **23**, 388, 1924.
[5]) G. Heckmann, Zeitschr. f. Krist. **61**, 250, 1925.

Heckmann allgemein, daß in den Kristallen eine weit geringere Polarisierbarkeit angesetzt werden muß, als es für die Berechnung der optischen Daten für ein isoliertes Ion zu geschehen hat.

§ 9. Mechanik der Kristalloberflächen. 1. Oberflächenspannung. Neben den bisher besprochenen, auf das Innere des festen Körpers bezüglichen Aussagen gewinnt die Bornsche Theorie einige Aussagen über die Berandung des Körpers. Diese Rechnungen sind bisher meist für Steinsalz, als einfachstes Beispiel, durchgeführt worden. Man legt ein „unendliches Halbgitter" zugrunde, d. h. man zerschneidet das unbegrenzte Gitter zwischen zwei Netzebenen. Die Arbeit zur Entfernung der einen Gitterhälfte von der anderen gibt die Kapillarkonstante σ für die betreffende Netzebenenstellung (vgl. Bd. III, 1, Kap. 11, § 1 u. 2, sowie Bd. III, 2, Kap 4, § 13). Sie stellt sich allgemein als Summe über Einzelpotentiale zwischen den Atomen dar und läßt sich ausführen, wenn z. B. das auf S. 943 genannte Einzelpotential (mit $n = 9$) zugrunde gelegt wird. Allerdings werden in beiden Gitterhälften nach ihrer Entfernung die Atome, die der Oberfläche nahe liegen, sich etwas aus den bisher eingenommenen Gitterorten wegbegeben, da sie der Einwirkung der — durch das andere Halbgitter nicht mehr kompensierten — inneren Schichten unterliegen. Das bedeutet eine gewisse Energieverminderung oder eine Verkleinerung der Oberflächenspannung. Sie ist von J. Biemüller[1]) abgeschätzt worden zu 1 bis 40 Proz. der elektrostatischen Energie bei undeformierbaren Ionen.

Die absolute Berechnung der Oberflächenspannung bei Alkalihaliden führt auf Werte von der gleichen Größenordnung, wie sie an den geschmolzenen Salzen gemessen worden sind, ein direkter Vergleich ist aber nicht möglich. Interessanter sind deshalb die Verhältnisse der für verschiedene Flächen geltenden Werte σ; für Steinsalz wurde $\sigma_{(111)} : \sigma_{(110)} : \sigma_{(100)} = 5{,}81 : 2{,}71 : 1$ von Born und Stern[2]) berechnet. Diese Verhältniswerte geben nach der thermodynamischen Theorie der Kristallform[3]) für einen Kristall, dessen Flächen im thermodynamischen Gleichgewicht miteinander stehen, die relativen Entfernungen der Flächen vom Kristallzentrum an. Da $2{,}71 > \sqrt{2}$, $5{,}81 > \sqrt{3}$ ist, dürfen Rhombendodekaederflächen (110) und Oktaederflächen (111) an solchen Kristallen nicht auftreten — im Einklang mit der üblichen (jedoch durch Harnstoffzusatz zur Lösung zu beeinflussenden) Kristallform des Steinsalzes. W. D. Kusnezow[4]) zeigt, daß die (110)-Flächen, die beim Spalten von Steinsalz gelegentlich erhalten werden, in Wahrheit durch Stufen von Würfelflächen angenähert sind — wie sich auch theoretisch daraus vorhersagen läßt, daß zu deren Ausbildung eine geringere Energie erforderlich ist als für die glatte (110)-Fläche. Auch die Abschleifarbeit an

---

[1]) J. Biemüller (Diss. Göttingen), Zeitschr. f. Phys. **38**, 759, 1926.
[2]) M. Born und O. Stern, Berl. Ber. 1919, S. 901.
[3]) P. Curie, Bull. Soc. min. de France **8**, 145, 1885; Oeuvres, S. 153. Die Theorie verlangt, daß die gesamte Oberflächenenergie — bei gegebenem Volumen des Kristalls — ein Minimum wird.
[4]) W. D. Kusnezow, Zeitschr. f. Phys. **42**, 302, 1927.

(100)-, (110)- und (111)-Flächen bei Steinsalz, die der Verfasser experimentell bestimmt[1]), steht in dem Verhältnis, das zu erwarten ist, falls beim Schleifprozeß kleine Würfel abgesprengt werden. Obwohl also zwischen Beobachtung und Rechnung im Fall des Steinsalzes darin Übereinstimmung besteht, daß die Würfelflächen vor den übrigen bevorzugt sind, kann man aus dieser Tatsache allein noch nicht auf die Richtigkeit der thermodynamischen Theorie der Kristallgestalt schließen.

2. Zerreißfestigkeit. Eine weitere wichtige Anwendung findet die Berechnung des Trennungsvorgangs eines Gitters in zwei Halbgitter zur Ermittlung einer theoretischen Zerreißfestigkeit. Denkt man sich die abzutrennende Gitterhälfte vorsichtig aus ihrer stabilen Ruhelage entfernt, so wird zwischen den beiden Hälften eine zunächst ansteigende rücktreibende Kraft entstehen, da die Ausgangslage ja die stabile Gleichgewichtslage war. Diese Kraft wird durch ein Maximum gehen, da sie bei weiterer Abtrennung bald verschwindend klein wird. Das Kraftmaximum pro Flächeneinheit entspricht der Zerreißspannung. Sie ergibt sich aus der Gittertheorie für die Würfelflächen von NaCl zu 200 kg/mm^2 [2]) — fast 500 mal so groß, als im gewöhnlichen Zugversuch (450 g/mm^2). Joffé und Mitarbeiter[3]) glauben diesen Widerspruch darauf zurückführen zu sollen, daß die Oberflächen von wirklichen Kristallen nicht vollkommen, sondern von feinen Rissen durchsetzt sind, die die in der Technik als „Kerbwirkung" bekannte entfestigende Eigenschaft haben. Durch Zerreißen unter Wasser bei gleichzeitigem Lösen der Kristalloberfläche läßt sich zwar die Festigkeit immerhin bis auf 5000 g/mm^2 steigern, doch dürfte die Deutung der experimentellen Befunde als Zerreißbarkeit senkrecht zur Würfelfläche nicht einwandfrei sein, da bei den Versuchen Gleitung (s. § 12) eintritt.

§ 10. Über die Bornsche Gittertheorie hinausgehende Probleme und Ansätze; Ideal- und Realkristall. Sowohl die allgemeine, wie die mit speziellen elektrostatischen Kraftansätzen arbeitende Bornsche Gittertheorie bietet, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, einen ganz großzügigen Rahmen, der große Klassen von physikalischen Gesetzen aufnehmen kann. Außer für die betrachteten mechanischen, gilt dies auch für elektrische und optische Erscheinungen. Bei den typisch polaren Kristallen gerät auch die Ausrechnung der Materialkonstanten, die in den Gesetzen auftreten, mit dem einfachen Ansatz der Zentralwirkung von Atom zu Atom überraschend gut.

Im folgenden soll zunächst auf einige von der Gittertheorie noch ungelöste mechanische Probleme hingewiesen werden. Dabei sei das fundamentale Problem, wie die Theorie abzuändern ist, um auf nichtpolare und metallische Kristalle anwendbar zu sein, nicht erörtert. Vielmehr beschränken wir uns

---

[1]) W. D. Kusnezow, Zeitschr. f. Phys. **44**, 228, 1927.
[2]) F. Zwicky, Physik. Zeitschr. **24**, 131, 1923.
[3]) A. Joffé und Mitarbeiter, Zeitschr. f. Phys. **22**, 286, 1924; vgl. Bd. III, 2, Kap. 4, § 13.

auf solche Probleme, von denen man erwarten sollte, daß sie wenigstens für polare Kristalle mit den bisherigen Mitteln der Gittermechanik lösbar wären.

1. Das Problem des Kristalltyps. Im Vordergrund steht hier die Frage, warum eine Substanz in einer bestimmten Anordnung (Kristalltyp) kristallisiert. Nimmt man die Atomkräfte als gegeben an, etwa durch das Bornsche Zentralpotential, so muß der realisierte Kristalltyp sich vor allen anderen Anordnungen durch das Minimum an Gitterenergie auszeichnen. Das Problem wäre also z. B., zu zeigen, daß für Ionen Na^+ und Cl^-, die durch die bekannten Werte der Ladungen e, der Koeffizienten b und Exponenten n im Potentialansatz Gl. (11) ausgezeichnet sind, der Steinsalztyp die Möglichkeit zu absolut geringster Gitterenergie bietet (selbstverständlich im „natürlichen Zustand", d. h. unter freier Einstellung der Gitterdimensionen; durch Druck könnten sich die Verhältnisse ändern: polymorphe Umwandlung durch äußeren Druck). Die Atomkonstanten bei $Cs^+ Cl^-$ hingegen müßten in einem anderen Wertbereich liegen, so daß der Cäsiumchloridtyp sich aus ihnen bildet.

Dies Problem ist von Born und Emersleben[1]) in Angriff genommen worden, aber nur in beschränktem Umfang. Erstens nämlich ist die Rechnung nur für 1 und 2 Dimensionen durchgeführt worden; zweitens aber werden zum Vergleich mit der „räumlichen Schachbrettanordnung" des NaCl-Gitters nur solche Anordnungen herangezogen, die aus dem NaCl durch Vertauschung von Ladungen (unter Innehaltung der besetzten Punkte) entstehen. Drittens wird nur der Energieanteil der Coulombschen Kräfte berücksichtigt, der allerdings nach den Betrachtungen in § 8, 2, der überwiegende ist. Ob der NaCl- oder der CsCl-Typ bei gegebenen Atomkonstanten realisiert wird — dies Problem wird durch die angeführte Untersuchung nicht berührt.

Hiergegen gibt eine Arbeit von F. Hund[2]) einen wertvollen Beitrag zu dieser Frage, ohne aber über die einfachsten Fälle hinauszukommen. Hund betrachtet zunächst unpolarisierbare Ionen und vergleicht die Gitterenergien (pro Mol) des CsCl-, NaCl- und ZnS-Typs für Verbindungen der Form AB und der CaF_2-, TiO_2- und Cu_2O-Typs für Verbindungen der Form AB_2 untereinander und mit der Energie eines isolierten Moleküls. Hierbei wird das Bornsche Zentralkraftgesetz (11) mit beliebigem Exponenten n angenommen und die Energiewerte gegen n aufgetragen. Bei sehr hohem n („inkompressible" Ionen, $n \gtrsim 40$) ist am stabilsten der CsCl-Typ, da hier jedes Ion von 8 anderen, entgegengesetzt geladenen, umgeben ist, der NaCl-Typ mit je 6 Ionennachbarn folgt nahe, der ZnS-Typ mit je 4 Nachbarn hat schon höheren Energieinhalt. Mit abnehmendem Exponenten n greift die Abstoßung auf weiter entfernte Ionen über und die Reihenfolge kehrt sich um. Zwischen $n \doteq 35$ und $n = 7$ ist der NaCl-Typ, darunter der ZnS-Typ am stabilsten. Ähnlich gilt für $n = 10$: CaF_2-Typ stabiler als TiO_2-Typ, dieser stabiler als Cu_2O-Typ. Das isolierte Molekül ist erst für recht weitreichende Abstoßungskräfte, nämlich für $n = 4$ am stabilsten.

[1]) M. Born und O. Emersleben, Physik. Zeitschr. **24**, 73, 97, 1923.
[2]) F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **34**, 833, 1925.

Nimmt man also den Exponenten $n \sim 9$ für Na^+ und Cl^- als gegeben an, so erklärt diese Überlegung wohl die Kristallisation im NaCl-Typ.

Weiter betrachtet Hund den Einfluß der Polarisierbarkeit auf den Gittertyp. Wir hatten schon oben (§ 8) betont, daß das Eintreten der Polarisation eine Energieabgabe des Gitters bedeutet. Ist die Polarisierbarkeit groß genug, wie es bei den großen negativen Ionen der Fall sein kann, so kann eine symmetrische Anordnung der Ionen wie in NaCl, CsCl usw. unter Energieabgabe in eine unsymmetrische übergehen. Es finden sich dann entweder Atomgruppen zu Molekülen zusammen (Molekelgitter), oder die vorher gleichmäßigen Abstände der mit Atomen besetzten Netzebenen werden ungleich und es entstehen „Schichtengitter". Solche Schichtengitter sind mechanisch durch besonders hohe Gleitfähigkeit ausgezeichnet — ein Beispiel ist MoS_2, das äußerlich von Graphit kaum zu unterscheiden ist.

Erst wenn das Problem des Gittertyps für den ideal regelmäßigen Kristall rechnerisch und physikalisch klar liegt, kann man hoffen, den Temperatureinfluß berücksichtigen und die Theorie der polymorphen Umwandlung bzw. der Begrenzungslinien im Zustandsdiagramm von der statistisch-mechanischen Seite aus fördern zu können. Es handelt sich dabei um geringe Energiedifferenzen; denn die Wärmetönungen bei Abänderung des Gittertyps (polymorpher Umwandlung) sind ja recht klein gegen die gesamten Gitterenergien, wie sie rechnerisch oder aus dem Bornschen Kreisprozeß (s. Art. Herzfeld, Bd. III, 2, S. 253) ermittelt werden.

2. Das Problem der Kristallgestalt und ihrer Änderung. Nach dem Curieschen Ansatz soll die Kristallform, die als Endform im thermodynamischen Gleichgewicht entsteht, diejenige geringster Oberflächenenergie sein. Die eigentümliche Regelmäßigkeit des inneren Aufbaus verhindert beim Kristall die Ausbildung der Kugelform, die bei Flüssigkeiten nach demselben Gesetz auftritt. Daß die gittertheoretische Berechnung der Oberflächenspannung von Steinsalz (100) und (110) Werte liefert, die die Würfelfläche als äußere Begrenzungsfläche bevorzugt erscheinen lassen, ist schon auf S. 947 gesagt worden.

Es ist aber doch unwahrscheinlich, daß mit dem Curieschen Ansatz schon die wesentliche Ursache für die tatsächlich zu beobachtende Kristallgestalt erfaßt ist. Diese wird vielmehr offenbar stark bedingt durch den Mechanismus des Kristallwachstums[1]). Damit fällt die Entscheidung über die tatsächliche Kristallform aus dem Rahmen der bisherigen gittermechanischen Ansätze heraus und wird zu einem Problem, bei dem die Gittermechanik nur die Berechnung des äußeren Kraftfeldes liefern kann, das der wachsende Kristall in die Lösung oder Schmelze hineinschickt und unter dessen Einfluß sich die Bestandteile heranbewegen, die in den Gitterverband aufgenommen werden müssen. Je nach der Art und Stärke dieser Felder wird der Antransport und die endgültige Festlegung des Baustoffes schneller oder langsamer vor

[1]) Vgl. die interessanten Studien von C. H. Saylor, Calcite and Aragonite, Journ. Phys. Chem. 32, 1441, 1928, sowie von W. Kossel in „Quantentheorie und Chemie". S. Hirzel, 1928.

sich gehen, und die Wachstumsgeschwindigkeiten der einzelnen Flächen bestimmen die Kristallform. Die Herstellung der idealen Carieschen Gestalt und damit des endgültigen thermodynamischen Gleichgewichts würde durch die Trägheit des Materialtransports, dem der kleine zu erzielende Energiegewinn gegenübersteht, verzögert werden.

Daß an Kristalloberflächen besondere, ungewohnte Zustände herrschen, lehren beispielsweise die Versuche von Vollmer und Estermann über die Lösung von Benzophenonkristallen in Quecksilber. Sie sind in erster Linie angestellt, um zu zeigen, daß Quecksilberoberflächen diesen Stoff zu lösen vermögen, obwohl sich im Innern des Quecksilbers kein gelöstes Benzophenon in vergleichbarer Menge aufhalten kann. Sodann zeigen sie aber, daß ein Benzophenonkristall auf allen seinen Flächen Substanz verliert, auch wenn nur ein Eckchen des Kristalls mit dem vorbeitropfenden Quecksilber in Berührung kommt. Dieser Versuch spricht für eine große Beweglichkeit der Kristallsubstanz an der Kristalloberfläche, es ist so, als ob unter dem Einfluß des Kristallstreufeldes (wie man das aus der Kristalloberfläche austretende Feld in Analogie zum Kondensatorstreufeld nennen kann) an der Oberfläche eine stark verdichtete adsorbierte Gashaut der Kristallsubstanz sich aufhielte (eventuell vermischt mit anderen Bestandteilen). Die genaue Untersuchung dieser Verhältnisse ist von großer Wichtigkeit für unsere Vorstellungen von Kristalloberflächen und, wie wir am Ende dieses Paragraphen sehen werden, dadurch für unser Verständnis des „Realkristalls".

3. Das Problem der Wärmeleitung[1]) und der elektrischen Leitung. Ganz in den Rahmen der Bornschen Gitterdynamik scheint zunächst der Vorgang der Wärmeleitung zu fallen, dessen Erklärung sich an die Vorstellung vom Wärmeinhalt des festen Körpers (§ 6, 2) und seiner Temperaturabhängigkeit (spezifische Wärme) anschließen müßte. Es treten aber hier Schwierigkeiten auf, die noch keine endgültige Lösung gefunden haben.

Langsame elastische (akustische) Wellen pflanzen sich mit einer Schallgeschwindigkeit fort, die mindestens nach Hunderten von Metern pro Sekunde zählt, und aus den numerischen Rechnungen zur Theorie der spezifischen Wärme wissen wir, daß auch die schnellen elastischen Schwingungen, die Träger des Hauptteiles der thermischen Energie bei gewöhnlicher Temperatur, ähnliche Geschwindigkeit haben. Warum pflanzt sich die Wärme nicht auch mit Schallgeschwindigkeit nach allen Richtungen fort? Für ein Medium mit linearen Schwingungsgleichungen wäre dies die einzige mögliche Folgerung — genau wie in der Optik die durch eine Spiegelklappe in einer Gefäßhälfte aufgespeicherte Strahlungsenergie nach Fortnahme der Klappe nicht anders als mit Lichtgeschwindigkeit in die andere Gefäßhälfte einströmen kann.

P. Debye hat zuerst eine plausible Erklärung für die geringe Wärmeleitfähigkeit des festen Körpers gegeben, die für elastische Wellen ein Gegenstück zur optischen Theorie des Himmelsblaus von Lord Rayleigh[2]) bildet. Die Grundvorstellung Debyes ist, daß die Homogenität des Körpers in elastischer

[1]) Vgl. Bd. III, 2, Kap. 4, § 11c.
[2]) Vgl. Bd. II, 1, Kap. 16, § 14.

Beziehung aufgehoben ist, und zwar durch seine Temperaturbewegung selbst, die lokal engbegrenzte, zeitlich nicht allzu schnell veränderliche Dichteschwankungen verursacht. Diese entstehen bei einem nichtlinearen Kraftgesetz durch die in § 7, 1 besprochene Nullpunktsverschiebung, bzw. sie können als lokale Wärmeausdehnungen infolge Anhäufung von Wärmeenergie gedeutet werden. Hand in Hand hiermit geht eine Abänderung der elastischen Koeffizienten, bzw. der von Debye allein herangezogenen Kompressibilität. Eine elastische Welle, die dies in doppelter Hinsicht inhomogene Medium durchsetzen will, wird durch Beugung an den Inhomogenitäten zerstreut werden und ihre anfangs einseitige Energieströmung wird bald nach allen Richtungen gehen. Wie in der Theorie des Himmelsblaus, unterliegen die kürzesten Wellen dieser Zerstreuung am meisten. Jede Welle wird also nur eine kleine Laufstrecke haben, in der sie einen gerichteten Energietransport besorgt und es wird eine Art Diffusionsvorgang für den gerichteten Transport der Energie über größere Strecken maßgebend werden — und hierdurch ist der formale Anschluß an die Gesetze der Wärmeausbreitung erreicht. Debye bestimmte für Steinsalz unter Benutzung des experimentellen Wärmeleitungskoeffizienten, der Reststrahlfrequenz, Kompressibilität, Wärmeausdehnung, Dichte usw. die „mittlere Transportlänge" für den einzelnen Wellenvorgang; sie ergab sich sehr klein, größenordnungsmäßig zwischen 1,4 und $44 \cdot 10^{-7}$, also zwischen 5 und 15 Ionenabständen.

Die Debyesche Theorie ist in der mathematischen Durchführung nur eine Skizze und ihre Richtigkeit ist bestritten worden; da aber auch die Gültigkeit der Einwände nicht restlos geklärt ist, scheint es immerhin wahrscheinlich, daß allein auf Grund der Nichtlinearität der Kräfte eine Dissipation in der von Debye vermuteten Art entsteht. Eine Gittertheorie der Wärmeleitung bleibt aber als mathematisch wie physikalisch höchst bedeutsames Problem bestehen.

Von den neueren Untersuchungen über Wärmeleitung seien nur die Grüneisenschen[1]) erwähnt, die im Anschluß an Ideen von J. Koenigsberger sowie A. Eucken die metallische Wärmeleitung in zwei Bestandteile aufspalten: eine Wärmeleitung des Atomgitters und eine solche des Elektronengases, das im Metall zwischen den Atomen anzunehmen ist. Dieser zweite Bestandteil ist durch das Wiedemann-Franzsche Gesetz (Bd. III, 1, Kap. 21, § 20) mit der elektrischen Leitfähigkeit verknüpft. Auf den ersten Bestandteil allein sollten gittertheoretische Rechnungen anzuwenden sein, die aber zu den obigen Schwierigkeiten führen.

Daß Störungen im regelmäßigen Kristallwachstum, Inhomogenitäten und Korngrenzen — also gewissermaßen sekundäre, wenn auch unvermeidbare Umstände, auf die thermische und elektrische Leitung vielleicht von bestimmendem Einfluß sind, betont Benedicks. Die elektrische Leitfähigkeit in Metallen wurde von jeher auf Grund des Wiedemann-Franzschen Gesetzes von der Proportionalität der elektrischen und der thermischen Leit-

[1]) E. Grüneisen, Zeitschr. f. Phys. **46**, 151, 1928; dort Hinweis auf die früheren ...ndlungen des Verfassers.

fähigkeit mit dieser letzteren in engen Zusammenhang gebracht. Die Vorstellung von freien Leitungselektronen, die zwischen den Metallatomen gasartig herumschwärmen, genügte jedoch in der Behandlungsweise, mit der die klassische Elektronentheorie [Riecke, Lorentz, J. J. Thomson][1]) an dies Bild herantrat, den berechtigten Forderungen nicht (Schwierigkeiten der klassischen Theorie bei der spezifischen Wärme des Elektronengases und bei der zahlenmäßigen Wiedergabe der verschiedenen „Effekte"). Erst als die neue, von Fermi[2]) eingeführte Quantenstatistik von Sommerfeld[3]) auf das Elektronengas angewandt wurde, lösten sich diese Schwierigkeiten auf. Aus der Elektronentheorie wurde neben dem ganzen Modell des Elektronengases auch die Vorstellung von der mittleren „freien Weglänge" zwischen zwei Zusammenstößen des Elektrons mit Metallatomen übernommen, zunächst ohne von letzterer weitere Rechenschaft zu geben. Hierzu erwies sich aber die Wellenmechanik von de Broglie-Schrödinger fähig: nach ihr findet die Bewegung der statistischen Gesamtheit von Elektronen nach den gleichen Regeln statt, wie die Ausbreitung einer ebenen Welle in einem Medium, dessen Brechungsindex von Ort zu Ort variiert (die potentielle Energie der Atome auf ein Elektron tritt an Stelle des Brechungsindex). Es tritt infolgedessen eine Streuung der Welle beim Fortschreiten ein, d. h. eine Schwächung, die einer mittleren Reichweite oder freien Weglänge der klassischen Gastheorie entspricht. Wie Houston[4]) gezeigt hat, ist in einem Kristall die Stärke der Streuung bedingt durch die relativ langsamen Veränderungen des Mittelwertes des Brechungsindex infolge von lokalen Temperaturschwankungen. Es besteht also eine ganz enge formale und sachliche Analogie zwischen der Sommerfeldschen Theorie der elektrischen und der Debyeschen Theorie der Wärmeleitfähigkeit. Beide Erscheinungen können als im wesentlichen aufgeklärt gelten, ohne daß aber bisher eine befriedigende gittertheoretische Behandlung gelungen wäre.

4. Platzwechselerscheinungen. Gehen wir von den Metallen zu der Gruppe der polaren Kristalle über, deren Kräftespiel wir zu überblicken glauben, so findet sich bei ihnen eine elektrische Leitfähigkeit nicht durch Elektronen-, sondern durch Ionenwanderung. Diese Leitung ist als elektrolytische anzusprechen, indem, wie insbesondere die Arbeiten der Tubandtschen[5]) Schule dargetan haben, zu jeder überführten Elektrizitätsmenge eine nach dem Faradayschen Gesetz äquivalente Stoffmenge gehört, die den Kristall von Elektrode zu Elektrode durchwandert hat und zur Abscheidung kommt.

Ähnliche Wanderungs- und Platzwechselvorgänge äußern sich in zahlreichen Erscheinungen. Hier sind vor allem die Diffusionsvorgänge in festen Körpern zu nennen, die teils als Fremddiffusion (Eindringen von Ni in Cu, von KCl in KBr), teils als Selbstdiffusion vorhanden sind. Die Selbstdiffusion ist von G. v. Hevesy in eleganter Weise nachgewiesen

---

[1]) Vgl. die zusammenfassende Darstellung durch Riecke in Handb. d. Radiologie Bd. 6. Leipzig 1925.

[2]) E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. 36, 902, 1926.

[3]) A. Sommerfeld, ebenda 47, 1, 1928.

[4]) W. V. Houston, ebenda 48, 449, 1928.

[5]) Siehe zusammenfassend: B. Gudden, Ergebn. d. exakt. Naturw., Bd. III (Springer, 1924).

worden, indem er in Bleichlorid radioaktive Bleiatome (Polonium) zwischen nichtaktive hat hineindiffundieren lassen und den Anstieg der Aktivität der einzelnen Schichten maß. Da die äußeren Kraftfelder isotoper Atome die gleichen sind, ist anzunehmen, daß die Radioaktivität der einen Atomsorte den Vorgang der Diffusion nicht beeinflußt hat, und daß der Platzwechsel im Innern polarer Kristalle zu den regulären Erscheinungen gehört, sozusagen konstitutionell ist.

Die Gittertheorie von Born bietet zum Verständnis der Platzwechselvorgänge kaum irgendwelche Ansätze. Es sind ja auch Vorgänge, die nicht mehr unter das Schema kleiner Abweichungen von der Ruhelage fallen. Ein gewisses Verständnis dieses Vorgangs geben Betrachtungen von W. Braunbek [1]), die sich auf die energetischen Verhältnisse bei großen Ausschwingungen der Atome aus den Gitterorten beziehen und die die Aufstellung einer Zustandsgleichung für die festen Körper bezwecken. Der Braunbeksche Ansatz besagt, daß wegen der Periodizität der Potentiale ein Atom, um sich endgültig von seinem Gitterort entfernen zu können, eine gewisse Energieschwelle überschreiten muß. Von hier aus ergeben sich Aussagen über die Abweichungen der spezifischen Wärme vom Dulong-Petitschen Wert, über die Schmelztemperatur, die Schmelzwärme, die ultraroten Eigenfrequenzen und auch über die elektrolytische Leitfähigkeit, die teils auf bekannte Regeln (Richards, Lindemann), teils auf gute Übereinstimmung auch der Absolutwerte mit der Erfahrung führen. Da aber die gittertheoretische Durchführung dieser Ansätze noch sehr primitiv ist, möge der Hinweis auf die Arbeiten genügen. Die gleiche Form des Potentialansatzes wie bei Braunbek findet sich in den später zu besprechenden Theorien der elastischen Hysterese von Prandtl und der Rekristallisation von Dehlinger, nur in anderer Weise rechnerisch verwertet (siehe § 18).

5. Smekals „Realkristall". Einen wichtigen Einwand gegen die Zuständigkeit der Bornschen Theorie zur Erklärung vieler stofflicher Eigenschaften erhebt in zahlreichen Arbeiten A. Smekal [2]). Er unterscheidet den tatsächlichen „Realkristall" von dem theoretisch betrachteten „Idealkristall". Auch wenn man von gröberen Wachstumsstörungen absieht, die sich ja häufig an Kristallen durch Unebenheiten oder Facettierungen der Flächen, durch akzidentelle Doppelbrechung oder sonstige Inhomogenitäten bemerkbar machen, soll der Realkristall Wachstumsstörungen enthalten, die für ihn wesentlich sind. Sie werden von Smekal teils als „Poren", teils als „Lockerstellen" bezeichnet.

An den Poren bzw. Lockerstellen besitzen die Atome eine abnorm große Beweglichkeit. Hier ist daher der eigentliche Sitz der Platzwechselerscheinungen und der elektrolytischen Leitung. Der von Gudden und Pohl [3]) erforschte lichtelektrische Effekt, durch den die Nichtleiter bei Belichtung eine gewisse Leitfähigkeit erhalten, spielt sich an den Lockerstellen ab. An ihnen sammeln

[1]) W. Braunbek, Zeitschr. f. Phys. 38, 549, 1926.

[2]) A. Smekal, siehe z. B. Physik. Zeitschr. 26, 707, 1925; Ann. d. Phys. 83, 1202, 1927; Zeitschr. techn. Phys. 8, 203, 1927; Zeitschr. f. Elektroch. 24, 472, 1928 usw.

[3]) Zusammengefaßt in B. Gudden, Erg. d. exakt. Naturw. Bd. III (Springer, 1928).

sich auch die im Gitter „vagabundierenden“ Bestandteile [Hüttig][1]) an, wie z. B. die kleinen Verunreinigungen, die die Mineralfärbungen verursachen. Die Lockerstellen erscheinen so als innere Oberflächen, an denen die Atome sich in einem Zustand großer Beweglichkeit befinden, ähnlich dem durch die Benzophenonversuche Vollmers für die Außenfläche von Kristallen festgestellten (§ 10, 2). Aus der ultramikroskopischen Untersuchung von Steinsalz, das mit Alkalidampf gefärbt war (Siedentopf), folgert Smekal als Porenabstand mindestens $2 . 10^{-4}$ cm, als Porendurchmesser rund $4 . 10^{-6}$ cm, also rund 10000 bzw. 1500 Ionenabstände.

Auf die mechanischen Eigenschaften des Gitters sind die Poren nach Smekal, der hierin einen Gedanken von A. A. Griffith aufgreift, von größtem Einfluß infolge der „Kerbwirkung“ [2]). Nach einer von Griffith stammenden Formel läßt sich die Herabsetzung der Festigkeit durch Poren bestimmter Ausmaße für ein isotropes Material überschläglich berechnen. Für Glas kann man die „theoretische“ Festigkeit aus der Oberflächenspannung ungefähr abschätzen. Der Vergleich mit den gemessenen Werten läßt auf Poren von 10^{-3} bis 10^{-4} cm Länge schließen. Ist schon diese Porengröße unangenehm, da sie optisch wahrnehmbar sein sollte, so liegen bei Zinkeinkristallen nach Polanyi die Verhältnisse noch ungünstiger. Die Festigkeit der Basisfläche ist bei diesen nur $^1/_{5000}$ des nach der Oberflächenspannung des geschmolzenen Zinks zu erwartenden Wertes. Eine solch starke Festigkeitsminderung würde nach Griffiths Formel — deren Anwendbarkeit auch zu überschläglicher Rechnung jedoch in diesem Falle von Smekal bestritten wird — auf unmöglich lange [illegible]tten von rund 1 cm Länge führen. Auf experimenteller Grundlage wendet sich vor allem A. Joffé [3]) dagegen, die Lockerstellen als wesentliche Wachstumserscheinungen im Kristall anzusehen. Joffé glaubt mit seinen Mitarbeitern die theoretische Zerreißfestigkeit an Steinsalz von 200 kg/cm² annähernd erreicht zu haben — sei es durch Abätzen der rissigen Oberfläche während des Zugversuchs (vgl. § 9, 2) —, sei es, indem die hohe Spannung ausschließlich im Innern des Versuchsstücks erzeugt wurde (Erhitzen einer vorher abgekühlten Kugel aus Steinsalz [4]).

Auch für die Deutung der elektrolytischen Leitung wird die Zweckmäßigkeit der Smekalschen Vorstellungen bestritten (Braunbek). Gestützt werden sie durch sonstige Tatsachen, die für eine Unterteilung auch der ein-

---

[1]) G. Hüttig, Fortschr. d. Phys., Chem. und phys. Chem. 18, Heft 1, 1924.

[2]) Befindet sich im Innern eines Probestückes ein Riß oder auf seiner Oberfläche ein Kerb, so werden die Spannungslinien gezwungen, ihren Weg um den Riß oder Kerb herumzunehmen. Infolgedessen drängen sie sich — wie es die Stromlinien einer Wasserströmung tun würden —, am Ende des Risses oder Kerbs zusammen, d. h. dort herrschen viel höhere Spannungen als im homogenen Material. Durch diese kann der Riß sich erweitern, was zu einer noch stärkeren Spannung und schließlich zum Bruch des Materials führt. Die Kerbwirkung spielt in der technischen Festigkeitslehre eine große Rolle. Um sie zu vermeiden, müssen z. B. Nietenhälse sorgfältig gerundet werden. Das Glasschneiden beruht auf der Kerbwirkung des Diamantritzes.

[3]) A. Joffé, The Physics of Crystals, Mc Graw Hill Book Co., New York 1928, sowie Trans. Faraday Soc. 24, 1928 (Kongreß über Probleme der Kohäsion mit zahlreichen wichtigen zusammenhängenden Vorträgen).

[4]) A. Joffé und M. Lewitzky, Zeitschr. f. Phys. 35, 442, 1926.

heitlich erscheinenden Kristalle in ganz kleine Idealbereiche sprechen und die alle auf die gleiche Größenordnung der Bereiche (etwa 1000 Atome) hinweisen. Als solche sind nach Smekal anzuführen: die Intensität von Röntgeninterferenzen gemäß der Theorie von Darwin, die oben erwähnten Mineralfärbungen und schließlich die Untersuchungen über das Wachsen von Silber- und Quecksilberniederschlägen durch Sublimation (Estermann). Bei der ultramikroskopischen Untersuchung dieser Schichten zeigte sich, daß sie bei geringer Dicke aus Einzelkriställchen von mindestens 1000 Atomen bestanden, die erst in dickeren Schichten zusammenwachsen.

Im ganzen läßt sich heute wohl nur sagen, daß die Vorstellung „konstitutioneller“ Poren oder Lockerstellen manche Gründe für sich hat; daß sie aber quantitativ noch nicht brauchbar geworden ist. Selbst in qualitativer Hinsicht gehen verschiedene Vorstellungen nebeneinander her oder durcheinander, z. B. was die Größe der Lockerstellen betrifft, ob sie ortsfest sind oder sich wie ein dynamischer Zustand durch den Kristall fortbewegen und von welcher Art die Lockerung der Atome eigentlich ist.

II. Die mechanischen Eigenschaften der Metallkristalle.

§ 11. Die Herstellung von Metalleinkristallen. Von dem Kräftespiel, das die Atome eines Metalls in [illegible] Gitterlagen hält, wissen wir noch so gut wie nichts. Die Tatsache der [illegible]hen elektrischen Leitung durch Elektronen[1]), die ständig mehr oder [illegible] frei im Gitter anwesend sein und das Gitterpotential beeinflussen [illegible]richt genügend dafür, daß die Stabilitätsverhältnisse der Metallgitter [illegible] anders sein müssen, als die von Ionengittern.

Auch experimentell ist von der Physik der Metalle bis vor kurzem wenig bekannt gewesen, trotz der ungeheuren metallographischen Literatur. Das kommt daher, weil metallische Einkristalle sehr seltene Zufallsprodukte waren, die im allgemeinen nicht systematisch untersucht wurden. Die folgende Darstellung braucht daher die älteren Untersuchungen nicht zu berücksichtigen, die wir nur insoweit verstehen, um zu sehen, daß ihre Deutung in einer physikalischen Theorie so gut wie aussichtslos ist, solange nicht die weitaus prinzipielleren und einfacheren neugefundenen Erscheinungen an Einkristallen theoretisch faßbar sind.

Zur Herstellung von Einkristallen gibt es zwei Wege und verschiedene Ausführungsformen[2]).

Die Herstellung aus der Schmelze fußt auf den Tammannschen Untersuchungen über den Mechanismus des Kristallwachstums[3]). Hiernach bilden sich in der kälter werdenden Schmelze zunächst [als statistische Zufallsprodukte] Keime, die nun nach allen Richtungen mit Geschwindig-

[1]) Daß wirklich freie Elektronen die metallische Leitung besorgen, geht am unzweideutigsten aus den e/m-Bestimmungen in Metallen durch S. J. und L. J. H. Barnett hervor. Proc. Am. Acad. Arts Sci. **60**, 127, 1925.

[2]) Vgl. Bd. III, 1, Kap. 11, § 19 und Kap. 12, § 9.

[3]) G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen. Leipzig, J. A. Barth, 1903.

keiten weiterwachsen, welche durch die kristallographische Orientierung der Flächen und durch die Zähigkeit der Schmelze bestimmt sind. Ein Vielkristall entsteht aus vielen Keimen, die schließlich, zu Körnern oder Kristalliten ausgewachsen, in den Korngrenzen zusammenstoßen. Letztere sind bekanntlich am geschliffenen und polierten Metall durch Anätzen mit Säuren, Alkalien oder sonstigen chemischen Mitteln sichtbar zu machen.

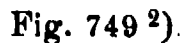
Will man Einkristalle erhalten, so ist dafür zu sorgen, daß nur ein Keim weiterwächst. Czochralski[1]), der als Erster systematische Untersuchungen an Einkristallen durchgeführt hat, zieht einen Kristallstab langsam nach oben aus der Schmelze heraus, mit einer (durch Versuch festzustellenden) Geschwindigkeit, die der Wachstumsgeschwindigkeit einer seiner Kristallflächen entspricht. Durch Zufall oder bis zu einem gewissen Grade durch Ansetzenlassen an einen geeignet orientierten Impfstab können Kristalle verschiedener Orientierung erzeugt werden, die meist runden Querschnitt von einigen Millimetern Durchmesser und Längen von 20 cm und mehr haben. Etwas anders wurde der gleiche Gedanke von Obreimow und Schubnikow[2]) und von Bridgman[3]) ausgestaltet: die Kristallisation findet in einem Gefäß von beliebiger Form statt, das unten in einer Kapillare endet. Die Abkühlung erfolgt durch langsames Senken des Gefäßes durch die untere Öffnung eines elektrischen Ofens. Die Kristallisation beginnt in der Kapillare, in der ein besonders günstig gerichteter Kristallkeim bald die Vorherrschaft gewinnt, weil seine Richtung schnellsten Wachstums axial in der Kapillare liegt; er wächst dann durch das ganze erstarrende Volumen hindurch. Auf diese Art lassen sich einkristalline Stäbe und Platten sofort in geeigneter Form für Zugversuche herstellen[4]).

Die zweite, prinzipiell andere Methode, Einkristalle zu erzeugen, beruht auf der Rekristallisation nach vorhergegangener Reckung. Sie ist insbesondere von Carpenter und Elam[5]) ausgebildet worden und eignet sich für Blechstreifen und runde Stäbe (weil nur in diesen beiden Formen eine über den Querschnitt genügend homogene Reckung erzielt werden kann). Das Verfahren besteht z. B. bei Aluminium darin, daß das angelieferte Material (von möglichst gleichmäßigem Korn) zunächst durch sechsstündiges Anlassen (= Erwärmen) auf 550° C von inneren Spannungen vollständig befreit, dann durch Zug um 1,6 bis 2 Proz. plastisch gedehnt und dann einer weiteren Wärmebehandlung unterworfen wird, die das Ziel hat, durch „Rekristallisation" zur Zerstörung der alten Keime und zur Bildung weniger großer Körner — womöglich eines einzigen — zu führen. Dies wird mit einer Ausbeute von etwa 30 bis 60 Proz. an Einkristallen erreicht durch viertägiges Anlassen bei langsam steigender Temperatur von 450 bis 550° C, das durch eine ein- bis

[1]) J. Czochralski, Zeitschr. f. phys. Chem. **92**, 219, 1918, vgl. auch seine „Moderne Metallkunde". Springer, 1924.
[2]) L. Obreimow und L. Schubnikow, Zeitschr. f. Phys. **25**, 31, 1924.
[3]) W. P. Bridgman, Proc. Am. Acad. Arts and Sci. **60**, 305, 1925.
[4]) Welche Vorsichtsmaßregeln unter Umständen gegen unerwünschten Zug zu ergreifen sind vgl. bei P. Kapilza, Proc. Roy. Soc. (A.) **119**, 358, 1928.
[5]) H. C. H. Carpenter und C. F. Elam, Proc. Roy. Soc. (A.) **100**, 329, 1921.

sechsstündige Erhitzung auf 600 bis 640° C abgeschlossen wird. Diese letzte bezweckt, einen oberflächlichen Belag von kleinen Kristallen zur Resorption in den Einkristall zu bringen, der inzwischen das Innere der Probe erfüllt hat. Von Vorteil ist es, bei der thermischen Behandlung den heißesten Punkt des Ofens an ein Stabende, nicht in die Stabmitte zu legen und die Stäbe zum Schluß noch oberflächlich abzuätzen [Karnop und Sachs][1]). Sehr wesentlich kommt es bei diesem Prozeß auf die Einhaltung der optimalen Dehnung an, wie Fig. 749 zeigt. Sie variiert von Metall zu Metall — ist z. B.

Fig. 749[2]).



Rekristallisierte Aluminiumstäbe nach Dehnungen von 10, 8, 6, 4, 2 und 0 Proz. (lin. Vergr. 0,85).

für Eisen mit 3,25 Proz. entschieden höher als für Al. Ist ein Metall inhomogen gereckt, so ist die Größe des rekristallisierten Korns örtlich verschieden. Man sieht dies an den Köpfen der Proben in Fig. 749, die bei der Dehnung eingespannt waren und offenbar auch bei den starkgereckten Proben nicht über die günstige Deformation hinauskamen.

Um die Abhängigkeit der Korngröße, die beim Rekristallisieren entsteht, von dem Reckgrad und der Anlaßtemperatur zu veranschaulichen, hat Czoch-

[1]) R. Karnop und G. Sachs, Zeitschr. f. Phys. **42**, 283, 1927.
[2]) Aus J. Czochralski, Moderne Metallkunde in Theorie und Praxis, mit freundlicher Erlaubnis des Verlags J. Springer, Berlin.

ralski „Rekristallisationsdiagramme" eingeführt, von denen dasjenige für Kupfer als Fig. 251 in Bd. III, 1, Kap. 11, § 19 wiedergegeben ist.

Das Rekristallisationsverfahren gelingt nicht bei allen Metallen. Bei Kupfer z. B. tritt eine Zwillingsbildung[1]) nach mehreren kristallographisch gleichwertigen Ebenen ein, so daß man Einkristalle bisher nur aus der Schmelze gewonnen hat.

Mit dem Rekristallisationsverfahren hängt das „Pintsch" verfahren[2]) zur Herstellung einkristallinen Wolframdrahtes für Glühlampen zusammen. Der aus Wolframpulver gepreßte und gesinterte Vielkristalldraht wird langsam durch einen Ofen gezogen, wobei die Rekristallisation (auch „Sammelkristallisation" bei den Mineralogen genannt) stattfindet. Ein kleiner Zusatz von Thoroxyd zum Wolfram ist für das Gelingen wesentlich.

Nicht ganz homogene, aber sehr schöne Einkristalle von Wolfram wurden von van Arkel[3]) auf einer „Seele" von Wolfram-Einkristalldraht erzeugt, indem dieser Draht in einer Atmosphäre von WCl_6 zum Glühen gebracht wurde. Hierbei zersetzt sich das gasförmige WCl_6 und das Wolframgitter der Drahtseele wächst in die Dicke. Bleistiftdicke Einkristalle wurden so erhalten.

Insgesamt hat man nach den obigen Methoden Einkristalle von Al, Zn, Sn, Bi, Cu, Ag, Au, Fe, Sb, Pb, Cd, Te sowie von Legierungen, z. B. Messing, hergestellt. Von diesen sind aber nur die ersten so gut in ihren mechanischen Eigenschaften untersucht, daß ein Bericht darüber nötig wäre.

§ 12. Die mechanischen Eigenschaften der Metalleinkristalle bei einfachem Gleiten. 1. Der einfache Dehnungsversuch. Ein Metalleinkristall kann so merkwürdige Festigkeitseigenschaften zeigen, daß man zunächst nicht glauben würde, den gleichen Stoff in Händen zu haben, den man im vielkristallinen Zustand kennt. Vor allem scheiden sich bei den meisten Metallen die Kristalle in „dehnbare" und „spröde". Die letzteren haben gegenüber Vielkristalldrähten eine sehr viel geringere Zugfestigkeit und reißen, wenn man sie zwischen den Fingern zu dehnen sucht, nach unmerklicher Längung irgendwo glatt ab — unter Ausbildung einer scharf spiegelnden, offenbar kristallographisch vorgeschriebenen „Reißebene".

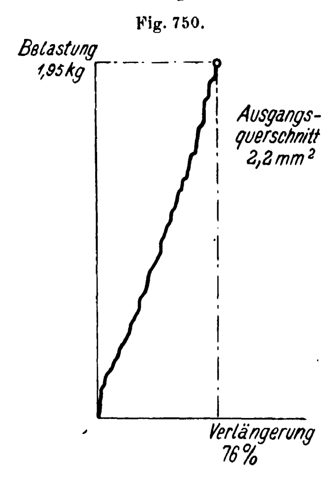
Bei den dehnbaren Kristallen, die wir zunächst betrachten wollen, ist oft die Dehnbarkeit erstaunlich. Es ist manchmal möglich, einen stricknadeldicken Einkristalldraht mit den bloßen Händen auf die doppelte Länge zu dehnen. Dabei wird seine vordem glatte Oberfläche schuppig, die Dehnung erfolgt ruckweise, unter deutlichen Knister- oder Knackgeräuschen. Der Widerstand gegen die Dehnung wächst an: es tritt „Verfestigung" ein.

Quantitativ sieht man diese Verhältnisse an dem Dehnungsdiagramm für Zink (Fig. 750) dargestellt, das einen Einkristall von mittlerer Dehnbarkeit

[1]) C. F. Elam, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**, 28, 1926.
[2]) Näheres bei R. Gross und N. Blassmann, Neues Jahrb. f. Min., Geol., Paläontol., Beil. Bd. **42**, 728, 1919.
[3]) A. E. van Arkel, Physica **3**, 76, 1923.

betrifft. Die maximale Verlängerung, bei der hier Bruch eintrat, betrug 76 Proz., die zugehörige Last 1,95 kg ist bequem herzustellen, indem man den Draht zwischen den Fingern hält. Es tritt kein „Fließen" ein, d. h. keine zeitlich konstante oder zunehmende Dehnungsgeschwindigkeit bei fester Last. Sondern jede Vermehrung der Dehnung muß durch Steigerung der Last erreicht werden. Der ruckweise Charakter der Dehnung zeigt sich an den Stufen der Dehnungskurve. Während der Dehnung entstehen auf der blanken und vorher glatten Oberfläche des Drahtes „Gleitellipsen" [1]). Sie sind ein Zeichen dafür, daß die Verlängerung des Drahtes dadurch zustande kommt, daß der Kristall in gewissen parallelen Ebenen von kristallographisch bevorzugter Stellung in ähnlicher Weise gleitet, wie dies etwa ein Stapel Postkarten bei einer scherenden Beanspruchung tut. Bei Zn ist die bevorzugte Gleitebene die Basisebene (0001), ebenso beim hexagonalen Bi. Bei anderen Kristallen, insbesondere hochsymmetrischen (kubischen), treten Gleitebenen verschiedener Stellung auf und komplizieren das Bild. Es ist daher zweckmäßig, den Untersuchungen von Polanyi, Schmid und Mitarbeitern folgend, die Vorgänge in den hexagonalen Kristallen voranzustellen.

Fig. 750.



Zug-Dehnungsdiagramm für Zink-Einkristalldraht.

2. Die Geometrie des einfachen Gleitens. Außer der Gleitebene ist in ihr eine Gleitrichtung kristallographisch festgelegt. Bei Zink ist dies eine digonale Achse (I. Art). Die Zeichnungen (Fig. 751) nach einem von Polanyi [2]) angegebenen Modell der Gleitung von Zink erläutern den Gleitvorgang. Der drahtförmige Ausgangskristall ist dargestellt durch einen Stoß gleich dicker Holzscheiben, deren Ober- und Unterseiten Basisebenen (0001) des Einkristalls sein sollen. Auf der obersten Fläche ist die kristallographische Orientierung durch ein Sechseck angegeben; die digonalen Achsen I. Art gehen vom Mittelpunkt nach den Ecken des Sechsecks (Pfeil der Figur). Die Lage zwischen kristallographischen Achsen und Drahtachse ist durch Angabe der Winkel χ und λ bestimmt (χ = Winkel Drahtachse/Basisebene, λ = Winkel Drahtachse/nächstgelegene digonale Achse I. Art). (Die hierbei noch bestehende Zweideutigkeit ist wegen der Symmetrie von keinem Einfluß.)

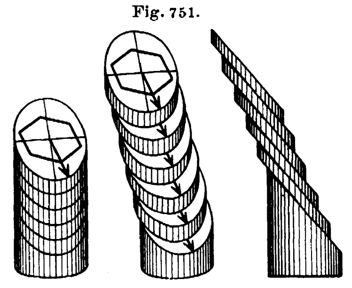
Wird nun der Kristall aus dieser Ausgangslage gedehnt, so gleiten im Modell die Holzscheiben in der Gleitrichtung aufeinander ab. Als Betrag der

[1]) Vgl. die „Gleitlinien" von Kap. VII, § 15.
[2]) H. Mark, M. Polanyi, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. 12, 58, 1922.

Gleitung oder als „**Abgleitung**" a bezeichnen wir mit **Sachs**[1]) die Strecke, um die sich zwei Gleitflächen in der Entfernung 1 (senkrecht zu den Flächen gemessen) verschoben haben.

Bezeichnen wir die Einheitsvektoren in der Gleitrichtung mit $\mathfrak{g}$, senkrecht zur Gleitfläche mit $\mathfrak{G}$, ferner mit $\mathfrak{l}_0$ und $\mathfrak{l}_1$ die Vektoren vom Anfangs- zum Endpunkt des Drahtes vor und nach der Gleitung, mit l_0 und l_1 ihre Beträge, mit a das Maß

Fig. 751.



Polanyis Modell der Gleitung an Zink.

Fig. 752.

Zur Geometrie des Gleitvorganges.

der Gleitung, wie es eben definiert wurde. In Fig. 752 liegen $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{g}$ in der durch Drahtachse und Gleitrichtung gegebenen Ebene, $\mathfrak{G}$ hingegen nicht. Denken wir das untere Drahtende O festgehalten, so ist die Verschiebung des oberen Drahtendes vektoriell

$$a\,(\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{G})\,.\,\mathfrak{g} \qquad \text{oder} \qquad a\,l_0 \sin\chi_0\,.\,\mathfrak{g}$$

(d. h. in Richtung $\mathfrak{g}$, von der Länge a mal Komponente OP der Drahtlänge senkrecht zur Gleitfläche). Also ist

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_0 + a\,(\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{G})\,.\,\mathfrak{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Die Dehnung des Drahtes erhält man auf zwei Weisen: durch Bildung entweder des Vektorproduktes mit $\mathfrak{g}$ oder des skalaren Produktes mit $\mathfrak{G}$ [bei dem $(\mathfrak{g}\,\mathfrak{G}) = 0$]:

$$[\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{g}] = [\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{g}], \text{ d. h. für die Beträge: } l_1 \sin\lambda_1 = l_0 \sin\lambda_0,$$
$$(\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{G}) = (\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{G}), \text{ d. h. „ „ „ } l_1 \sin\chi_1 = l_0 \sin\chi_0.$$

Die Dehnung[2])

$$d = l_1/l_0 = \frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda_1} = \frac{\sin\chi_0}{\sin\chi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

kann also aus den Neigungen der Drahtachse gegen Gleitrichtung oder Gleitebene in gleicher Weise entnommen werden.

Bilden wir das Quadrat der Gleichung (α), so gewinnen wir die Abgleitung a:

$$l_1^2 = l_0^2 + 2a\,(\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{G})(\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{g}) + a^2\,(\mathfrak{l}_0\,\mathfrak{G})^2 = l_0^2\,(1 + 2a \sin\chi_0 \cos\lambda_0 + a^2 \sin^2\chi_0),$$

$$a = \frac{1}{\sin\chi_0}\left(\sqrt{d^2 - \sin^2\lambda_0} - \cos\lambda_0\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

oder unter Benutzung von (β):

$$a = \frac{\cos\lambda_1}{\sin\chi_1} - \frac{\cos\lambda_0}{\sin\chi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma')$$

Die Abgleitung läßt sich also bei Kenntnis der Ausgangsorientierung allein durch Messen der Dehnung oder der Endorientierung bestimmen.

---

[1]) Siehe E. **Schmid**, Zeitschr. f. Phys. **40**, 54, 1926.

[2]) Die Dehnung wird entweder, wie oben definiert, als Verhältnis $d = l_1/l_0$ der Längen nach und vor der Deformation gemessen, oder als prozentische Dehnung $d' = 100\,\frac{l_1 - l_0}{l_0}$ (vgl. Kap. VII, § 3). d ist ein Längenverhältnis, d' ein Verlängerungsverhältnis!

Durch die Gleitung flacht sich der — ursprünglich als rund angenommene — Querschnitt des Drahtes ab, so daß der Draht mehr einem Band ähnelt. Da die Deformation durch Gleitung offenbar eine einfache affine Verzerrung ist, geht der kreisförmige Querschnitt in einen elliptischen über, dessen große und kleine Achse die Breite und Dicke des Bandes bilden. Die Breite bleibt dabei nur gleich dem Durchmesser des ungedehnten Querschnitts, wenn die Drahtachse in der durch Gleitebenennormale und Gleitrichtung bestimmten Ebene liegt. Bei anderer Lage ist die entstehende Bandbreite größer als jener Durchmesser. (In der Fig. 751 z. B. tritt eine kleine Verbreiterung ein.) Am gedehnten Band zeichnen sich die Spuren der Gleitebenen durch Gleitellipsen ab, aus deren mikroskopisch vermessener Lage rückwärts sowohl die Neigungen der Gleitebenen wie der Gleitrichtung gegen die Bandachse oder gegen die Achse des ungedehnten Kristalls ermittelt werden können. Wird nun noch mit Röntgeninterferenzen die kristallographische Lage der Drahtachse bestimmt, so gewinnt man die kristallographische Bezeichnung der Gleitebene und Gleitrichtung.

Die folgende Tabelle zählt die bisher gefundenen Gleitebenen und Gleitrichtungen sowie die Reißebenen auf. Soweit kristallographisch ungleichwertige Richtungen auftreten, sind sie in der Reihenfolge ihrer Häufigkeit aufgeführt.

Tabelle 2. Gleitelemente der Metalle[1]).

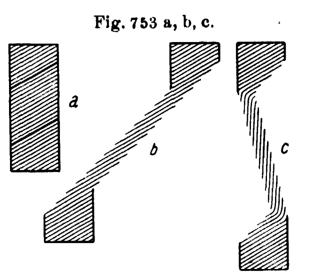
Metall	Struktur	Gleitrichtung $\mathfrak{g}$	Gleitfläche $\mathfrak{G}$	Reißfläche	Dichteste Gittergeraden	Dichteste Netzebenen
Zink Cadmium	hexagonale dichteste Packung	—	(0001)	(0001)	[10$\bar{1}$0]	(0001) (10$\bar{1}$0)
Zinn . .	tetragonal deformierter Diamanttyp	[001] [101] [111]	(100) u. (110)	—	[001] [100], [111], [101]	(100) (110)
Al, Cu, Ag, Au	kubisch flächenzentriert	[101]	(111)	—	[101]	(111)
Wolfram Eisen	kubisch raumzentriert	[111]	?	—	[111]	(111)
Wismut	rhomboedrisch, fast kubisch	[101] [110]	(111) (1$\bar{1}\bar{1}$)	(111) (111)	[101] [110]	(111) (1$\bar{1}\bar{1}$)
Tellur. .	rhomboedrisch	[10$\bar{1}$0]	(1010)	(10$\bar{1}$0)	[10$\bar{1}$0]	(0001)

Der Gleitvorgang kann in geometrischer Hinsicht genauer beschrieben werden als „Biegegleitung". So wie wir ihn bisher geschildert haben (reine Gleitung), müßte nämlich zugleich mit der Längung eine Schrägstellüng der Stabachse stattfinden, entsprechend Fig. 753 b. Da dies in Wirklichkeit nicht geschieht, muß notwendig eine Neigungsänderung der Gleitflächen erfolgen. Sie findet vorzugsweise an den Ansatzstellen des Bandes an die ungedehnten Kristallteile statt. Häufig bildet sich die in Fig. 753 c angedeutete Begrenzung infolge der Gleitung aus. Besitzen die Gleitebenen

[1]) Nach M. Polanyi, Die Naturwiss. 16, 289, 1928.

an den Übergangsstellen zwischen Kristallkörper und Band die Fähigkeit der Biegung, so genügt dies offenbar. Denn das bandförmige Mittelstück ist dann gewissermaßen an zwei Gelenken gelagert und kann bei weiterer Dehnung durch bloßes Gleiten (ohne Biegung) in der Zugrichtung bleiben. Sofern aber das bandförmige Stück sich nicht gleichmäßig ausbildet, wandert die Stelle der Biegung durch den Kristall fort. Daß an den Biegungsstellen die Gleitflächen anders als in der Mitte beansprucht werden, ist natürlich. Daher findet sich dort eine größere Deformationsenergie vor als in der Mitte. Die Biegegleitung ist zuerst von Mügge[1]) bei Untersuchungen über das Gleiten in nichtmetallischen Kristallen beschrieben worden; für Metalle hat Polanyi[2]) diese Vorstellung herbeigezogen.

Fig. 753 a, b, c.



Die Biegegleitung.

3. Die Dynamik des einfachen Gleitvorgangs. Wie steht es nun mit den Kräften beim einfachen Gleit- und Reißvorgang? Durch die schönen Untersuchungen von Taylor und Elam und von Schmid ist in direkter Weise bewiesen worden, daß Gleiten immer dann eintritt, wenn der Zug auf den Draht in der Gleitebene und Gleitrichtung eine Schubspannungskomponente erzeugt, die einen kritischen Wert übersteigt. Ist Z der Zug im Draht (d. h. Kraft pro Einheit des Querschnitts q senkrecht zur Achse), χ der Winkel zwischen Achse und Gleitebene, λ derjenige zwischen Achse und Gleitrichtung $\mathfrak{g}$, so ist die Zugkomponente längs $\mathfrak{g}$: $Z \cos \lambda$ und, bezogen auf die Gleitebene von Querschnitt $q/\sin \chi$, die Schubspannungskomponente $\tau = Z \cos \lambda \sin \chi$, während die Normalkomponente der Spannung in der Gleitebene $\nu = Z \sin^2 \chi$ ist.

Zunächst ist von Polanyi und Schmid[3]) gezeigt worden, daß allseitiger Druck auf einen Einkristalldraht (Zn und Sn) ohne Einfluß auf das Eintreten der Gleitung ist. Sie stellten den Dehnungsversuch in einer mit CO_2 füllbaren Bombe an. Dann aber hat Schmid den Eintritt des Gleitens in Abhängigkeit von der Orientierung der Stabachsen untersucht und gefunden, daß, wenn überhaupt Gleiten auftritt, es bei dem Zug beginnt, bei welchem die kritische Schubspannung τ_k überschritten wird, einerlei, wie groß dabei der Normaldruck ist.

Wie erwähnt, sind nicht alle Kristalle des gleichen Stoffs „dehnbar", d. h. zeigen die Gleitung. Es gibt auch „spröde" Kristalle, die bei zunehmender Last reißen, ohne sich plastisch verformt zu haben. Der kristallinen Eigenart entsprechend tritt auch das Reißen längs einer kristallographisch bestimmten Ebene ein, „Reißebene". Ob Gleiten oder Reißen eintritt, hängt von der Temperatur, der Belastungsgeschwindigkeit und der Orientierung der

---

1) Mügge, Neues Jahrb. f. Min., Geol., Paläontol. 1898 (I), S. 71.
2) H. Mark, M. Polanyi, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. 5, 58, 1922.
3) M. Polanyi, E. Schmid, ebenda 16, 336, 1923.

Drahtachse im Einkristall ab. Zinkkristalle z. B. bei der Temperatur der flüssigen Luft sind spröde und zeigen die Basisebene als Reißfläche. Näheres über Reißen vgl. unten. Für das Eintreten des Reißens ist die Schubspannung in der Reißebene belanglos und die Überschreitung einer kritischen Normalspannung ν_k Vorbedingung. Sind die kritischen Werte τ_k und ν_k bekannt (sie hängen selbst noch von der Temperatur und der Belastungsgeschwindigkeit ab), so läßt sich voraussagen, von welcher Orientierung ab der Draht aufhört, dehnbar zu sein: es ist offenbar der Bereich der Sprödigkeit jener Winkelbereich (χ, λ), in dem bei Steigerung des Zuges erst die Normalspannung ν_k erreicht wird. Für Wismut[1]) darf $\lambda = \chi$ gesetzt werden (die Gleitellipsen liegen nahezu symmetrisch im Band); aus den Dehnungsversuchen mit verschieden orientierten Kristallen folgt als Mittelwert für die kritische Schubspannung $\tau = 221$ g/mm² und aus Reißversuchen $\nu_k = 324$ g/mm². Mithin ergibt sich der Grenzwinkel χ zwischen dehnbar und spröde aus

$$\begin{aligned} \tau &= Z \cos\chi \sin\chi = 221 \\ \nu &= Z \sin^2\chi \quad\;\; = 324 \end{aligned}; \quad tg\,\chi = \frac{324}{221}; \quad \chi = 55^0\,42'.$$

In der Tat finden sich bei den untersuchten 25 dehnbaren Bi-Kristallen nur χ-Winkel von 28° bis 46° 30′, bei den 17 in den Tabellen aufgeführten spröden Kristallen nur Winkel von 55 bis 79°.

Die Temperatur beeinflußt den Wert der kritischen Normalspannung bei Bi nicht; die kritische Schubspannung hingegen fällt mit steigender Temperatur im Gebiet von 0 bis 200° C linear ab (221 g/mm² für 20° C, 100 g/mm² für 200° C).

Aus der Winkelabhängigkeit der kritischen Schubspannung ergibt sich als Wert für die Elastizitätsgrenze F (d. h. für denjenigen Zug, bei dem die erste bleibende Deformation eintritt)

$$F = \frac{\tau_k}{\cos\lambda\,\sin\chi} \quad \left(\frac{\tau_k}{\cos\chi\,\sin\chi} \text{ bei symmetrisch liegenden Gleitellipsen}\right)$$

bzw. für die Reißgrenze R

$$R = \frac{\nu_k}{\sin^2\chi}.$$

Wie man sieht, sind solche „Grenzen", die in der Technik zur Festlegung der mechanischen Eigenschaften kleinkristallinen Materials eine große Rolle spielen, für den elementaren Vorgang am Einkristall wegen ihrer Abhängigkeit von der zufälligen kristallographischen Orientierung als Materialkonstanten gänzlich uncharakteristisch.

Setzen wir nunmehr voraus, daß Gleiten eintritt. Aus dem Dehnungsdiagramm Fig. 750 wissen wir, daß der Widerstand gegen die Dehnung anfangs sehr steil, später etwas langsamer anwächst, und zwar im großen ganzen proportional mit der erreichten Dehnung. Dies Anwachsen ist durch ein bisher noch nicht restlos aufgeklärtes Ineinandergreifen verschiedener Ursachen bestimmt. Es wird insgesamt als „Verfestigung" bezeichnet und

[1]) Georgieff und Schmid, Zeitschr. f. Phys.. 36, 759, 1926.

hängt auf das engste mit der technisch äußerst wichtigen Verfestigung mikrokristallinen Materials zusammen.

Zunächst gibt es beim Dehnungsversuch einen rein geometrisch bedingten Anteil, die „Orientierungsverfestigung". Sie entsteht durch die bei dem Gleiten stets zunehmende Schrägstellung der Gleitebene gegen die Drahtachse. Hierdurch sinkt nämlich bei gleichbleibendem Zug im Draht die Schubspannung. Denn da nach der Definition der beiden Winkel[1]) stets $\chi < \lambda < 90^0$, so ist $\tau = Z \cos\lambda \sin\chi < Z \cos\chi \sin\chi = {}^1/_2 Z \sin 2\chi$. Überschreitet χ den Wert 45^0, so fällt τ ab.

Beziehen sich χ_0, λ_0 und der Querschnitt q_0 auf die Ausgangslage des Drahtes, so läßt sich vermöge (β) die Schubspannung in Gleitebene und -richtung durch die Ausgangslage und die Dehnung $d = l/l_0$ darstellen:

$$\tau = Z \cos\lambda \sin\chi = Z (l_0/l) \sin\chi_0 \sqrt{1 - (l_0/l)^2 \sin^2\lambda_0}$$
$$= Z \sin\chi_0 \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2\lambda_0}}{d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\delta)$$

Für kleine Winkel λ_0 oder große Dehnungen ist also annähernd $Z = \frac{\tau_k \cdot d}{\sin\chi_0}$. Bliebe für das Eintreten von Gleitung die kritische Schubspannung τ_k unverändert in Geltung, so würde sich als Spannungs-(Zug-)Dehnungsdiagramm für einen Zn-Kristall mit $\lambda_0 = \chi_0 = 40^0$ die gestrichelte Kurve in Fig. 754 ergeben. Der Vergleich der gestrichelten Kurve mit der ausgezogenen, am Zn-Kristall von der Anfangsorientierung $\lambda_0 = 40^0$ tatsächlich aufgenommenen zeigt, daß in Wirklichkeit im Laufe der Dehnung eine erhebliche „wahre" Verfestigung eingetreten ist. Wünscht man die Annahme eines unveränderlichen τ_k mit dem experimentell aufgenommenen Last-Dehnungsdiagramm[2]) zu vergleichen, so ist der Zug Z mit dem jeweiligen Querschnitt des Bandes $q = q_0 l_0/l$ (konstante Dichte!) zu multiplizieren. Die Last L wird

$$L = \frac{\tau_k q_0}{\sin\chi_0} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 - \sin^2\lambda_0}} \quad \ldots (\delta')$$

Diese Kurve hat für große Dehnung eine horizontale Asymptote.

Fig. 754.

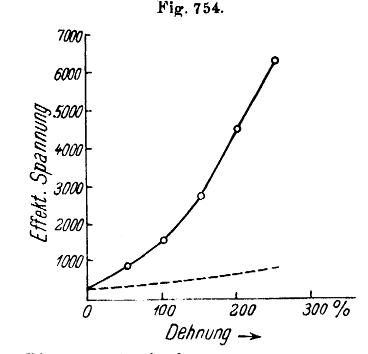


Diagramm der beobachteten Verfestigung (ausgezogen) und der reinen Orientierungsverfestigung (gestrichelt).

Experimentell ergibt sich also, daß die Orientierungsverfestigung nur einen kleinen Bruchteil der genannten Festigkeitszunahme deckt. Der überwiegende Teil ist auf eine Erhöhung der kritischen Schubspannung selbst zu schieben, die infolge der schon vorausgegangenen Gleitung eintritt (Kristallverfestigung, Widerstandserhöhung der Gleitflächen). Zum Beispiel stieg bei dem der Fig. 754 zugrunde liegenden Zn-Kristall

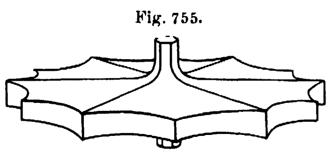
[1]) Nehmen wir eine positive Richtung für die Drahtlänge l an, so können die positiven Richtungen g und 𝔊 stets so gewählt werden, daß sie spitze Winkel mit $+l$ bilden. Dies ist bei den vorangehenden und folgenden Rechnungen vorausgesetzt.

[2]) Die „Last" ist die gesamte Kraft, die am Prüfobjekt angreift, der „Zug" ist die Last geteilt durch die jeweilige Fläche des Querschnittes.

die kritische Schubspannung von 145 g/mm² zu Beginn der Dehnung auf 1138 g/mm² bei $d = 3{,}5$ (250 Proz. Dehnung).

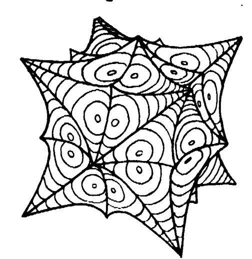
Immerhin ist es hiernach möglich, einen „Fließgefahrkörper" zu konstruieren, sobald feststeht, welche kritische Schubspannung für das erste Auftreten einer Gleitung maßgebend ist. Dies ist dann im wesentlichen ein Körper, der das Reziproke des Produktes $\cos\lambda \sin\chi$ für beliebige Achsenrichtungen $\mathfrak{a}$ darstellt, wobei unter λ und χ die Winkel von $\mathfrak{a}$ gegen das jeweils günstigst gelegene Gleitsystem zu verstehen sind. Schmid[1]) hat diesen Körper für Zink und Aluminium angegeben (siehe Fig. 755 und 756). Für Zn folgt, daß die Elastizitätsgrenzen sich für ungünstigste und günstigste Orientierung wie 1 : 8 verhalten. Wird der Zn-Kristall fast in der Richtung der hexagonalen Achse beansprucht, so erfolgt Reißen nach der Basis;

Fig. 755.



Fließgefahrkörper für Zn.

Fig. 756.



Fließgefahrkörper für Al.

dem entspricht die kleinere, fast senkrecht zur Hauptachse stehende Fläche, die das Modell oben und unten begrenzt. Die fast vertikalen Randflächen des Sternes bedeuten Abgleitung nach der Prismenfläche erster Art[2]), während die großen Ober- und Unterflächen des Modells zur Abgleitung nach der Basis gehören.

Um von der Beschränkung auf das Anfangsstadium des Gleitens frei zu kommen, müßte bekannt sein, welche Funktion die kritische Schubspannung τ_k von der schon erfolgten Abgleitung a, bzw. von deren Geschwindigkeit $\dot{a}$ ist. Setzt man die Geschwindigkeit $\dot{a}$ konstant (die Abweichungen sind bei konstanter Dehnungsgeschwindigkeit nicht groß), so ist nach Untersuchungen von Schmid[3]) an Zn die „Verfestigung" wiederzugeben durch ein lineares Anwachsen von τ_k mit der Abgleitung:

$$\tau_k = 187 + 240\,a \qquad [\text{in g/mm}^2].$$

Dies gilt bis auf $\pm$ 30 Proz. für Abgleitungen zwischen Null und 5.

Sachs[4]) hingegen stellt bei Aluminium den folgenden Zusammenhang auf:

$$\tau_k = 4300\,\sqrt[3]{a} \qquad [\text{in g/mm}^2],$$

---

[1]) Zeitschr. f. Metallkde. **19**, 154, 1927. Der Körper würde besser „Gleitgefahrkörper" genannt. Denn ob Fließen (d. h. dauerndes Abgleiten bei konstanter Last) stattfindet, hängt von der Verfestigung ab. Der Körper zeigt nur das Eintreten einer ersten Gleitung an, bestimmt also die Elastizitätsgrenze in Abhängigkeit von der Richtung.

[2]) Vgl. hierzu S. 973—974.

[3]) Zeitschr. f. Phys. **40**, 54, 1926.

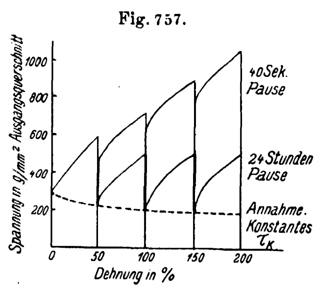
[4]) G. Sachs, Zeitschr. f. techn. Phys. **8**, 586, 1927.

der die Beobachtungen zwischen $a = 0$ und $a = 1$ gut wiedergibt. (Die später zu besprechende Doppelgleitung erweist sich als nicht störend.)

Insgesamt bleibt also die Verfestigungskurve $\tau_k(a)$ noch in weiteren Fällen festzustellen, bevor allgemeine Schlüsse daraus gezogen werden können.

4. **Der Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit auf die Dynamik des einfachen Gleitens.** Wiederholt ist bemerkt worden, daß die Verfestigung wesentlich bedingt ist durch die Geschwindigkeit der Belastung bzw. der Abgleitung, und zwar in dem Sinne, daß sie bei schneller Formänderung größer erscheint. Systematisch ist dieser Einfluß von Haase und Schmid[1]) an Zn, Bi und Sn mit ähnlichem Ergebnis untersucht worden, indem sie zwischen die Dehnungen „Erholungspausen" einschalteten, d. h. dem Kristall nach je 50 Proz. Dehnung erlaubten, unter geringem Sinken der Spannung (die durch eine federnde Aufhängung geliefert wurde) durch „Fließen" (weiteres Gleiten) einem statischen Gleichgewichtszustand zwischen Dehnung und Spannung zuzustreben. Schaltet man hierbei nur eine kleine Pause ein — $^1/_2$ bis 40 Minuten —, so tritt nur ein geringes Absinken der Spannung ein und die nächste Dehnung tritt erst bei einer höheren kritischen Schubspannung τ_k ein, als die vorhergehende. Die im Laufe der Dehnung hervorgebrachte Verfestigung hat sich mithin erst zu einem kleinen Teil verloren (obere Kurve, Fig. 757). Wartet man jedoch nach jedem Dehnungsabschnitt 24 Stunden (bei Zimmertemperatur), so ergibt sich die untere ausgezogene Kurve. Diese sitzt auf der gestrichelten Kurve auf, die für konstantes τ_k gelten würde (vgl. Fig. 754). Erst gegen Ende der Dehnbarkeit, kurz vor dem Zerreißen, geht die Verfestigung im Laufe von 24 Stunden nicht ganz wieder zurück.

Fig. 757.



Dehnungskurve an Zn mit Erholungspausen.

Diese Messungen zeigen, daß die Erholung, speziell die Schuberholung ein wichtiger Faktor zum Verständnis der Dehnungsdiagramme, namentlich bei kleinen Dehnungsgeschwindigkeiten ist. Die Erholungsgeschwindigkeit selbst steigt mit der Temperatur sehr schnell an.

Zusammenfassung über einfache Gleitung. Fassen wir nunmehr zusammen, was sich über den einfachsten Dehnungsvorgang eines Einkristalldrahtes sagen läßt, so ist es dies:

1. Die Dehnung besteht in einem Gleiten nach einer kristallographisch im Kristallgitter festliegenden Ebene $\mathfrak{G}$ und Richtung $\mathfrak{g}$.

2. Die maßgebenden Größen sind: die Orientierung der Drahtachse (des Zuges) gegen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ (Winkel χ und λ), sowie die Größe der Abgleitung.

[1]) Zeitschr. f. Phys. 33, 413, 1925.

3. Gleiten tritt ein, wenn eine kritische Schubspannung τ_k in Gleitebene und -richtung erreicht wird, Reißen tritt ein, wenn eine kritische Normalspannung ν_k senkrecht zur Gleit- (Reiß-) Ebene erreicht wird. Dies hängt bei gegebenem Zug von χ und λ ab.

4. Wird weder τ_k noch ν_k erreicht, so ist die Verzerrung nicht plastisch, sondern geht mit Aufhören der Spannung zurück (elastisch).

5. τ_k ist bei konstanter Abgleitgeschwindigkeit $\dot{a}$ Funktion von a, $\dot{a}$, der Temperatur T und (was oben nicht erwähnt wurde) stark beeinflußbar durch geringe Beimengungen anderer Atome (Legierung mit Konzentrationen c_i): $\tau_k\,(a, \dot{a}, T, c_i)$.

6. Die Abhängigkeit der τ_k von $\dot{a}$ und vielleicht auch von T entsteht durch das „Gedächtnis“ [1]), das der Kristall für die vorangegangene Abgleitung hat. Dies verliert sich bei Unterbrechung des Deformationsprozesses infolge einer zeitlich zunehmenden „Erholung“.

7. Neben der „Kristallverfestigung“ geht beim Dehnungsversuch eine „Orientierungsverfestigung“ einher.

8. Es läßt sich ein „Fließgefahrkörper“ konstruieren auf Grund derjenigen kritischen Schubspannung, die für jungfräuliches oder völlig erholtes Material gilt [2]).

9. Die experimentell realisierbare Dehnung entsteht durch „Biegegleitung“.

§ 13. Die mechanischen Eigenschaften der Metalleinkristalle bei mehrfachem Gleiten. 1. Kristallographisch gleichwertige Gleitsysteme. Nächst dem Zink ist Aluminium am besten untersucht, durch eine Gruppe englischer Forscher, Carpenter [3]), Elam, Taylor und Mitarbeiter, und durch Sachs und Mitarbeiter im Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung in Dahlem. Da Aluminium kubisch ist, müssen zu jeder Gleitebene und -richtung eine Reihe kristallographisch gleichwertiger auftreten. Dies führt zu einem „mehrfachen Gleiten“.

Die Methodik von Taylor und Elam bestand darin, einen ursprünglich runden, durch Recken und Anlassen hergestellten Einkristall (siehe § 11) auf quadratischen Querschnitt abzufräsen, auf den vier Seitenflächen mit einer Reihe von Längs- und Quermarken einzuritzen und ihn dann der Dehnung zu unterwerfen. Hierbei ändern sich nicht nur die Abstände der Marken, sondern auch ihre Neigungen gegen die Stabachse; auch bleibt der Stabquerschnitt nicht rechtwinklig. Aus diesen Daten kann die im Stabe erfolgte Deformation berechnet werden. Zugleich liefert die Röntgen-

[1]) So hat Th. v. Kármán treffend die Eigenschaften der Materie charakterisiert, die durch Integralgleichungen zu formulieren sind. Hierzu gehört die Erholung. Naturwiss. 4, 489, 1916.

[2]) Dies ist nur dann strenggenommen sinnvoll, wenn jenes τ_k sich als unabhängig von der Geschwindigkeit herausstellt, mit der der elastische Teil der Deformation durchlaufen wird.

[3]) Zusammenfassend berichtet H. C. H. Carpenter in J. Instit. of Metals, Mai 1926.

untersuchung [etwa nach dem Verfahren von Müller][1]) die kristallographische Orientierung der Stäbe. Das Ergebnis der Untersuchung[2]) war, daß bei Al die Oktaederebene (111) Gleitebene 𝔖 und die Würfelflächendiagonale [1$\bar{1}$0] Gleitrichtung g ist. Da Al eine kubisch flächenzentrierte Struktur hat (Fig. 758), ist 𝔖 die dichtest besetzte Ebene und g die dichtest besetzte Richtung im Gitter. In der Ebene (111) liegen die drei Gleitrichtungen [$\bar{1}$10], [10$\bar{1}$] und [01$\bar{1}$], nach denen in der Figur die (111)-Fläche schraffiert ist. Welche von diesen Gleitrichtungen in Tätigkeit tritt, hängt von der Richtung des Zuges, also von der Richtung der Stabachse ab. Nach dem, was wir als Gleitbedingung bei Zink kennengelernt haben, ist das Ergebnis von Taylor-Elam[3]) unmittelbar einleuchtend: das Gleiten beginnt nach jener Richtung, die dem Zug am nächsten liegt. Hat z. B. die Stabachse die Lage des Pfeils in Fig. 758, so wird das Gleiten auf der nach schräg oben links weisenden Schraffur [01$\bar{1}$] einsetzen. In dieser Richtung hat dann die Tangentialspannung der (111)-Ebene die größte Schubkomponente.

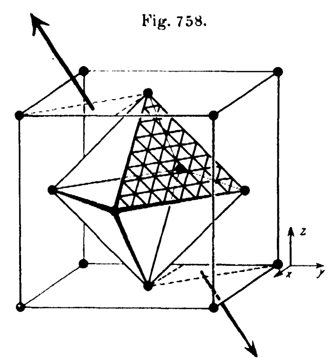


Fig. 758.

Der flächenzentrierte Würfel der Al-Struktur mit Gleitebene und -richtungen.

Ob überhaupt die schraffierte Ebene (111) oder eine der drei anderen gleichberechtigten in Tätigkeit tritt, hängt davon ab, in welcher Ebene nach einer der Gleitrichtungen zuerst die kritische Schubspannung τ_k erreicht wird, d. h. für welches Paar (𝔖, g) das Produkt $Z \cos\lambda \sin\chi$ zuerst diesen Wert erreicht. Da wegen der kubischen Symmetrie jede Richtung 47 völlig gleichberechtigte hat, genügt es, die Stabachse über $^1/_{48}$ der Oberfläche der Einheitskugel wandern zu lassen (zwischen den Richtungen der Würfel-, Oktaeder- und Rhombendodekaedernormalen), um alle Möglichkeiten für den größten Wert des Produktes $\cos\lambda \sin\chi$ zu erschöpfen. Es entsteht der von Schmid angegebene 48-flächige Fließgefahrkörper (Fig. 756), der zu jeder Richtung der Stabachse die Elastizitätsgrenze (d. h. den Zug, bei dem Gleiten eintritt) angibt. Dieser Körper ist somit das Reziproke zu der von v. Göler und Sachs[4]) benutzten Schablone, bei der in einer stereographischen Projektion des von den Richtungen [010], [$\bar{1}$10], [$\bar{1}$11] bestimmten 48stels der Kugelfläche eine Kotierung nach dem Wert des Produktes $\cos\lambda \sin\chi$ aufgetragen ist. In der Zeichnung Fig. 756 ist eine solche Kotierung benutzt, um die räumlichen Verhältnisse hervortreten zu lassen.

---

1) Müller, Proc. Roy. Soc. (A) **105**, 500, 1924.
2) G. J. Taylor, C. F. Elam, Proc. Roy. Soc. (A) **102**, 643, 1923.
3) Dieselben, ebenda **108**, 28, 1925; s. a. Mark, Polanyi und Schmid, Zeitschr. f. Phys. **12**, 58 (insbesondere S. 101), 1922.
4) Frhr. v. Göler und G. Sachs, Zeitschr. f. Phys. **41**, 113, 1927.

Um sich die Zuordnung zwischen den Teilen der Kugeloberfläche und den Gleitebenen und -richtungen klarzumachen, betrachten wir Fig. 759, welche die Durchstoßpunkte der Gleitrichtungen 0 und Gleitebenennormalen △ mit dem Würfel enthält, der um den Ursprungsort O dieser Richtungen beschrieben ist. Betrachten wir das Gleitsystem, das in der Figur hervorgehoben ist: Gleitebene schraffiert, Gleitebenennormale OE, Gleitrichtung OR, und fragen wir, in welchem 48stel der Kugeloberfläche, d. h. in welchem Achtel einer Würfelfläche der Durchstoßpunkt $\mathfrak{a}$ der Drahtachse liegen muß, damit das bezeichnete Gleitsystem das günstigste ist, oder damit $\cos\lambda \sin\chi$ den Maximalwert annimmt.

Da der Winkel λ zwischen $\mathfrak{a}$ und der Gleitrichtung nie kleiner als Winkel χ zwischen $\mathfrak{a}$ und der Gleitebene sein kann, kann $\cos\lambda \sin\chi$ nicht größer sein als $\cos\chi \sin\chi = \frac{1}{2}\sin 2\chi$; dieser Wert kann aber für jeden Winkel χ erreicht werden. Sein Maximum $\frac{1}{2}$ tritt für $\lambda = \chi = 45^0$ ein. Diese günstigste Lage läßt sich mit $\mathfrak{a}$ für das gekennzeichnete Gleitsystem erreichen: der Endpunkt M von $\mathfrak{a}$ liegt

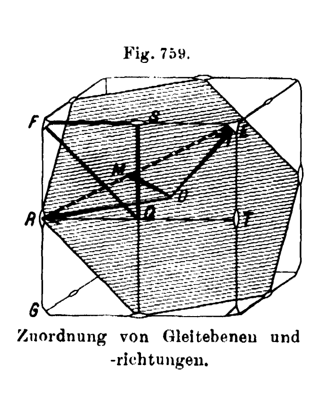


Fig. 759. Zuordnung von Gleitebenen und -richtungen.

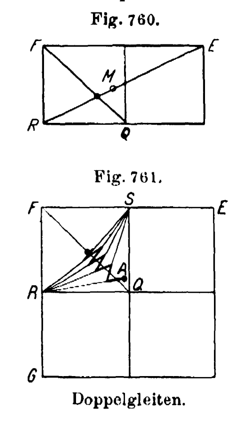


Fig. 760.

Fig. 761. Doppelgleiten.

dann in der Figur auf der Verbindungslinie RE, derart, daß der rechte Winkel ROE halbiert wird. Da die Strecken $OE : OR$ im Verhältnis $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ stehen, muß M näher an R als an E liegen, d. h. links von der vertikalen Symmetrielinie der vorderen Würfelfläche. M teilt die Strecke RE im Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dann muß aber M rechts von der diagonalen Symmetrielinie FQ der Würfelfläche liegen, denn diese (Fig. 760) teilt die Strecke RE im Verhältnis $1:2$, und es ist $\sqrt{2} : \sqrt{3} > 1:2$.

Die optimale Achsenrichtung für das durch die Punkte E und R dargestellte Gleitsystem liegt mithin innerhalb des in Fig. 759 stark gezeichneten Dreiecks. Das gleiche Gleitsystem muß aus Stetigkeitsgründen in der Umgebung des optimalen Punktes so lange das beste bleiben, bis ein anderes ebenso gut wird. Das geschieht, sobald $\mathfrak{a}$ auf eine der Symmetrielinien der Würfelfläche gelangt, d. h. an den Grenzen des hervorgehobenen Dreiecks. Und zwar bedeutet Überschreiten der Grenzen QS, daß F und T; QF, daß G und S; SF, daß E und U die Endpunkte der Gleitebenennormalen bzw. Gleitrichtungen werden.

Stellen wir uns vor, die Ausgangslage der Drahtachse $\mathfrak{a}$ befinde sich in dem stark gezeichneten Dreieck QSF der Fig. 759, so daß das Gleiten nach der Ebene E und der Richtung R beginnt. Durch den Gleitprozeß strebt die Drahtachse sich in die Gleitrichtung einzustellen; $\mathfrak{a}$ wandert also auf dem kürzesten Wege nach R hin (Fig. 761). Dabei gelangt $\mathfrak{a}$ unter allen Umständen an die Grenze QF, bei welcher das Gleitsystem (G, S) ebenso günstige Bedingungen erhält wie (E, R). Nach den Untersuchungen von Taylor und Elam tritt nach Erreichen dieser Grenze Doppelgleiten nach beiden Gleitsystemen ein: kleine Gleitbewegungen nach den beiden Systemen wechseln einander ab. Die Stabachse

wandert dabei auf einer Zickzacklinie unter fortwährendem Überschreiten der Grenze QF an dieser entlang. Ist die Ausgangsorientierung des Drahtes zufällig schon symmetrisch zu beiden Gleitsystemen, so tritt sofort Doppelgleiten ein.

Das Wandern der Stabachse bei der Doppelgleitung hört dann auf, wenn die Achse den zu R und S nächsten Punkt der Diagonalen QF erreicht hat (Fig. 761). Sie hat dann die Lage einer $[2\bar{1}1]$-Geraden, der Resultierenden aus den Gleitrichtungen $R = [1\bar{1}0]$ und $S = [101]$.

Als Endstellung bei der mehrfachen Gleitung ergibt sich also nicht eine solche, daß ein Gleitsystem optimal wirkt, sondern die symmetrische zu zwei Gleitsystemen.

Kinematik des Doppelgleitens. Seien $(\mathfrak{G}, \mathfrak{g})$ und $(\mathfrak{G}', \mathfrak{g}')$ die Einheitsvektoren der Gleitflächenormalen und der Gleitrichtungen von zwei Gleitsystemen, ferner $\mathfrak{g}^* = \frac{\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'}{|\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'|}$ der Einheitsvektor in Richtung der resultierenden Gleitrichtung, dann kann die Bewegung des Stabendpunktes $\mathfrak{l}$ durch Zusammensetzen unendlich kleiner Abgleitungen da und da' nach den beiden Gleitsystemen in Erweiterung der Formel (α) von S. 961 so dargestellt werden:

$$d\mathfrak{l} = da \,.\, \mathfrak{g}(\mathfrak{l}\mathfrak{G}) + da'\, \mathfrak{g}'(\mathfrak{l}\mathfrak{G}') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\varepsilon)$$

Die Stabachse $\mathfrak{l}$ muß, wenn es sich um kristallographisch und mechanisch gleichberechtigte Gleitsysteme handelt, symmetrisch zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie zu $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ liegen, d. h.

$$(\mathfrak{l}\mathfrak{g}) = (\mathfrak{l}\mathfrak{g}'); \qquad (\mathfrak{l}\mathfrak{G}) = (\mathfrak{l}\mathfrak{G}') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\zeta)$$

Hieraus oder unmittelbar anschaulich folgt, daß die Abgleitungen da und da' gleich sein müssen, wenn die symmetrische Lage erhalten bleiben soll. Man kann dann die Bewegung darstellen als

$$d\mathfrak{l} = da \,.\, |\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'|\, \mathfrak{g}^*(\mathfrak{l}\mathfrak{G}).$$

Hierdurch ist noch nicht die Form einer Gleitbewegung erreicht, da $(\mathfrak{g}^*\mathfrak{G}) \neq 0$; in der Tat ist es auch nicht möglich, die kombinierte Bewegung wieder als Gleitbewegung darzustellen. Führen wir den Einheitsvektor der resultierenden Ebene (aber nicht Gleitebene!) ein:

$$\mathfrak{G}^* = \frac{\mathfrak{G} + \mathfrak{G}'}{|\mathfrak{G} + \mathfrak{G}'|},$$

und setzen

$$da^* = da\, |\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'| \,.\, |\mathfrak{G} + \mathfrak{G}'| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\eta')$$

so wird[1])

$$d\mathfrak{l} = \tfrac{1}{2}\, da^*\, \mathfrak{g}^*(\mathfrak{l}\mathfrak{G}^*) \qquad [(\mathfrak{g}^*\mathfrak{G}^*) \neq 0!] \quad \ldots \ldots (\eta)$$

Wird $\mathfrak{l} = \lambda \,.\, [\mathfrak{G}\mathfrak{G}']$ gesetzt, so wird hiernach $d\mathfrak{l} = 0$. Das heißt, daß bei der Doppelgleitung solche Strecken Größe und Richtung beibehalten, die der Schnittkante der beiden Gleitebenen parallel sind.

Durch vektorielle Multiplikation von (η) mit $\mathfrak{g}^*$ entsteht

$$[d\mathfrak{l} \,.\, \mathfrak{g}^*] = 0 \quad \text{oder} \quad |[\mathfrak{l}\mathfrak{g}^*]| = const = |[\mathfrak{l}_0\mathfrak{g}^*]| \quad \ldots \ldots (\vartheta)$$

Bezeichnet ε den Winkel der Stabachse gegen die resultierende Gleitrichtung $\mathfrak{g}^*$, so heißt dies für die Dehnung

$$d = \frac{l}{l_0} = \frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\vartheta')$$

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{G}^*$ ermöglicht die Integration von (η):

$$\frac{(d\mathfrak{l} \,.\, \mathfrak{G}^*)}{(\mathfrak{l}\mathfrak{G}^*)} = \frac{1}{2}\, da^*(\mathfrak{g}^*\mathfrak{G}^*) \quad \ldots \ldots \ldots (\iota')$$

oder

$$\frac{1}{2}\, a^*(\mathfrak{g}^*\mathfrak{G}^*) = lg\, \frac{(\mathfrak{l}\mathfrak{G}^*)}{(\mathfrak{l}_0\mathfrak{G}^*)} = lg\, \frac{l \sin \chi}{l_0 \sin \chi_0} \quad \ldots \ldots (\iota)$$

1) Die Einführung des Faktors $\frac{1}{2}$ in diese Gleichung (η) statt in die vorhergehende Definition (η') der resultierenden Abgleitung a^* geschieht, um Übereinstimmung mit Göler und Sachs zu erzielen.

wo χ den Winkel von der Stabachse gegen die zu $\mathfrak{G}^*$ senkrechte „resultierende Ebene“ bedeutet. Die rechte Seite formen wir unter Benutzung von (ϑ') um, indem wir den (nur von den Gleitsystemen abhängenden) Winkel ψ von $\mathfrak{g}^*$ nach $\mathfrak{G}^*$ einführen:

$$(\mathfrak{g}^* \mathfrak{G}^*) = \cos\psi,$$

und berücksichtigen, daß, da notwendig $\mathfrak{l}$ in der Ebene von $\mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{G}^*$ liegt, $\psi = 90 - \chi + \varepsilon$ ist. Hiermit wird (ι):

$$lg\left(\frac{l}{l_0} \cdot \frac{\cos(\psi-\varepsilon)}{\cos(\psi-\varepsilon_0)}\right) = lg\,\frac{cotg\,\psi\; cotg\,\varepsilon + 1}{cotg\,\psi\; cotg\,\varepsilon_0 + 1} = \frac{1}{2}\,a^* \cos\psi \quad \ldots \quad (\varkappa)$$

Aus (ϑ') kann die Dehnung, aus ($\varkappa$) die „resultierende Abgleitung“ a^* vermittelst der Anfangs- und Endorientierung der Drahtachse gegen die resultierende Gleitrichtung $\mathfrak{g}^*$ entnommen werden.

Indem wir beiderseits in Gl. (η) zu den absoluten Beträgen übergehen und wie oben $\sin\chi$ durch $\cos(\psi - \varepsilon)$ ersetzen, ergibt sich für das Verhältnis von Dehnungs- zu Abgleitgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{l}\,\frac{dl}{da^*} = \frac{1}{2}\cos(\psi-\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

Beispiel: Wenden wir die vorletzte Formel auf das Gleiten nach den beiden Systemen

$$\mathfrak{G} = (111) \qquad \mathfrak{G}' = (\bar{1}11)$$
$$\mathfrak{g} = [\bar{1}10] \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}' = [011]$$

an. Es ist

$$|\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'| = \sqrt{6}, \quad |\mathfrak{G} + \mathfrak{G}'| = 2, \quad \mathfrak{g}^* = \frac{[\bar{1}21]}{\sqrt{6}}, \quad \mathfrak{G}^* = (010).$$

Ferner ist

$$\cos\psi = (\mathfrak{g}^* \mathfrak{G}^*) = 2/\sqrt{6}; \quad cotg\,\psi = \sqrt{2}.$$

Somit wird die resultierende Abgleitung

$$a^* = \frac{2}{\cos\psi}\,lg\,\frac{cotg\,\psi\; cotg\,\varepsilon + 1}{cotg\,\psi\; cotg\,\varepsilon_0 + 1} = \sqrt{6}\,lg\,\frac{1+\sqrt{2}\,cotg\,\varepsilon}{1+\sqrt{2}\,cotg\,\varepsilon_0}.$$

Die Dynamik des doppelten Gleitens ist weiter von Frhrn. v. Göler und Sachs [1]) gefördert worden, indem sie die Höchstlast für gleichmäßige Dehnung eines Stabes durch Doppelgleiten mit den geometrischen Daten verknüpfen konnten. Sie benutzen dabei die empirische, auf S. 966 genannte Beziehung zwischen der Abgleitung und der kritischen Schubspannung in Aluminium, also die Verfestigungskurve. Die Last am Stabe ist das Produkt vom Zug Z mit dem Querschnitt, der seinerseits der Stablänge l umgekehrt proportional ist (konstante Dichte). Die Höchstlast entsteht, wenn

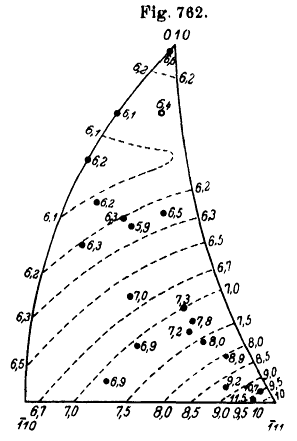
$$\frac{dZ}{Z} - \frac{dl}{l} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

ist. Nun läßt sich dl/l durch die Abgleitung ausdrücken [Gl. (λ)]. Andererseits ist aber für jede der beteiligten Gleitebenen die kritische Schubspannung τ_k empirisch als Funktion der Abgleitung bekannt und damit eine zweite Beziehung zwischen dem Zug $Z = \tau_k : \cos\lambda \sin\chi$ und der Abgleitung gegeben (χ soll der Winkel der Stabachse gegen eine der Gleitebenen sein). Hieraus läßt sich sowohl die Höchstlast selbst, als die Höchstlastneigung ε_h des Stabes gegen die resultierende Gleitrichtung $\mathfrak{g}^*$, oder auch die Höchstlastdehnung als Funktion der Höchstlastabgleitung a_h^* gewinnen. Es zeigt sich, daß die gesamte, bis zur Höchstlast zurückgelegte Abgleitung nicht von der

[1]) Frhr. v. Göler, P. Sachs, Zeitschr. f. techn. Phys. 8, 586, 1927.

Anfangslage abhängt, sondern aus der Endlage ε_h eindeutig bestimmt werden kann. Die Höchstlast selbst wird eine reine Funktion der Anfangslage. Sie ist innerhalb eines sphärischen Dreiecks zwischen den Richtungen (100), ($\bar{1}$10), ($\bar{1}$11) in Fig. 762 durch Kotierung dargestellt. Gleichzeitig sind die gefundenen Werte eingetragen, die, wie man sieht, befriedigend sich der Kotierung einfügen. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der obigen Verfestigungsgleichung läßt sich ein Höchstlast- oder Festigkeitskörper entwerfen (Fig. 763), ähnlich wie früher der Gleitgefahrkörper (Fig. 756).

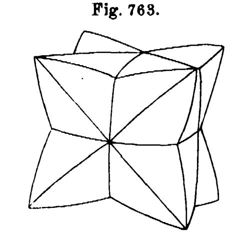
Fig. 762.



Verteilung der Höchstlasten beim Doppelgleiten von Al als Funktion der Anfangslage der Drehachse (nach v. Göler u. Sachs).

2. Kristallographisch ungleichwertige Gleitsysteme. Gleichberechtigt nennen wir verschiedene Gleitsysteme dann, wenn sie, wie beim Aluminium, durch die Kristallsymmetrie im undeformierten Kristall gleichwertig sind. Infolge des Dehnungsprozesses, der bei allgemeiner Ausgangsorientierung des Kristalls bei einem bestimmten dieser Systeme einsetzt, werden die kristallographisch gleichberechtigten Systeme mechanisch ungleichwertig und müssen als „aktive" und „passive" oder „latente" Gleitsysteme unterschieden werden.

Fig. 763.



Höchstlastkörper für Al nach v. Göler-Sachs.

Neben den kristallographisch gleichberechtigten kann es aber auch kristallographisch verschiedenwertige Gleitsysteme geben. Vor allem sind solche in niedrigersymmetrischen Kristallen zu erwarten.

Das älteste und bestuntersuchte Beispiel ist die schon von Polanyi, Mark und Schmid beobachtete „Nachdehnung" des Zinks. Ist nämlich ein Zinkeinkristalldraht bei der Dehnung durch Gleiten nach der Basis (0001) zum flachen Band geworden, so tritt der Bruch schließlich durch ein kurzes Gleiten nach einer neuen Fläche ein, das „Nachgleiten". Die Gleitfläche selbst wird hierbei bloßgelegt; sie wurde ihrer Neigung gegen die Basisebene wegen für die Prismenfläche (10$\bar{1}$0) gehalten. Schmid hat die kritische Schubspannung auf dieser Fläche zu ermitteln gesucht.

Neue Untersuchungen von Mathewson [1]), die von Schmid [2]) bestätigt worden sind, haben jedoch erwiesen, daß der Vorgang der Zinknachgleitung doch

[1]) C. H. Mathewson, A. I. Philips, Proc. Inst. Met., Febr. 1927.
[2]) E. Schmid, G. Wassermann, Zeitschr. f. Phys. 48, 370, 1928.

anders aufzufassen ist: es bildet sich nämlich, wenn eine gewisse Einstellung des Kristalls durch die Abgleitung nach der Basis erreicht ist, ein Zwilling aus. Dessen Basis steht fast genau senkrecht auf der alten Basis und konnte daher für eine Prismenfläche gehalten werden. In der Tat ist aber die Nachdehnung nichts anderes als eine Gleitung nach der Basis des Zwillings. Die nähere Aufklärung dieses Vorganges steht noch aus: man ist aber wohl berechtigt, die Verhältnisse beim Zink als typisch anzusehen. Die Längung des Probestabes, die durch die Zwillingsbildung eintritt, ist an sich nicht groß, zumal die Ätzung des Stabes zeigt, daß nur streckenweise die Umklappung eintritt. Aber die in Zwillingsstellung geratenen Teile sind wieder zu erheblicher Dehnung befähigt und können nochmals zu einer Zwillingslage umklappen, wenn durch die Gleitung die Basis wieder schräg genug zum Zug steht. Am Wismut wurde eine ganze Folge von solchen Zwillingsbildungen festgestellt.

Im vielkristallinen Material, wo die Behinderung der Gleitung durch die Verzahnung der Korngrenzen stärker als im Einkristall ist, dürfte die Zwillingsbildung sehr stark dahin wirken, daß das Gleitvermögen der Kristallite trotzdem zur Geltung kommt.

Bei dem tetragonalen Zinn gibt es verschiedene Gleitsysteme. Mark und Polanyi[1]) haben als Gleitrichtungen $\mathfrak{g}$ und Gleitebenen $\mathfrak{G}$ an 14 Kristallen festgestellt:

$$\begin{array}{llll} 8\text{ mal} & \mathfrak{g} = [001], & \mathfrak{G} = (110), \\ 3\quad „ & \mathfrak{g} = [001], & \mathfrak{G} = (100), \\ 3\quad „ & \mathfrak{g} = [0\underline{1}1], & \mathfrak{G} = (100), \\ 1\quad „ & \mathfrak{g} = [\bar{1}11], & \mathfrak{G} = (110), \end{array}$$

letzteres Paar nur in der Wärme an einem Kristall, der bei gewöhnlicher Temperatur nach dem ersten System glitt. Die kritischen Schubspannungen für die einzelnen Gleitsysteme sind noch nicht ermittelt worden. Hingegen ist sowohl die Verfestigung als auch die Erholung an Sn sehr ausgeprägt und von Polanyi und Schmid[2]), sowie Haase und Schmid[3]) untersucht worden. Bei schneller Dehnung und bei extrem langsamer Dehnung ist die Dehnbarkeit geringer als bei mittleren Dehnungsgeschwindigkeiten (etwa 40 und 70 Proz. gegen 600 Proz.). Bei schnellen (ruckweisen) Dehnungen wird offenbar der Gleitwiderstand an mehreren Gleitsystemen überwunden; daher entstehen nicht flache bandförmige, sondern runde Reißquerschnitte. Die hierdurch eintretende allseitige Verfestigung (die sich auch an den Bruchstücken nachweisen läßt) behindert die weitere Dehnung. Bei extrem langsamer Dehnung hingegen wirkt der Verfestigung die Erholung entgegen. Nun ist die Verfestigung die Vorbedingung für ausgedehnte Gleitung und das Entstehen von Bändern. Denn wenn ein Drahtstückchen, das wegen irgend einer Unregelmäßigkeit stärker gedehnt ist als seine Nachbarschaft und daher wegen des

[1]) Zeitschr. f. Phys. **18**, 74, 1923.
[2]) Ebenda **32**, 684, 1925.
[3]) Ebenda **33**, 413, 1925.

verminderten Querschnittes einen stärkeren Zug auszuhalten hat, sich durch die Dehnung nicht genügend stark verfestigt hat, so bleibt die weitere Dehnung auf dies Stückchen beschränkt, und es tritt baldigst Bruch ein. Gerade eine zu schwache Verfestigung kann infolge der Erholung bei zu kleiner Dehnungsgeschwindigkeit vorkommen. Aus den Endlagen des Gleitsystems 𝔊 (100), 𝔤 [011], die von Mark und Polanyi beobachtet worden sind, schließt Schmid, daß im Zinn sich das kristallographisch gleichwertige, aber latente System 𝔊 (010), 𝔤 [101] stärker verfestigt hat als das aktive. Das ist so wie bei den anderen Fällen gleichwertiger Gleitsysteme (Al, Zn).

Insgesamt läßt sich aus diesen noch unvollständigen Untersuchungen wohl nur mit Sicherheit entnehmen, daß auch nicht aktiv werdende Gleitsysteme durch das Gleiten nach einem anderen System gestört, d. h. verfestigt werden, daß daher die Doppel- oder mehrfache Gleitung mit einer gewissen Verzögerung einsetzt, daß die Verfestigung bei kristallographisch und mechanisch ungleichwertigen Ebenen ungleich schnell geschieht und schließlich, daß durch Zwillingsbildungen die Gleitverhältnisse noch kompliziert werden können.

§ 14. Theoretische Ansätze zum Verständnis der Gleitung.

Die besprochenen Arbeiten suchen das Grundphänomen der plastischen Deformation experimentell zu erfassen. Man erkennt, wie nahe ein Verständnis dieser — von Stoff zu Stoff höchst individuellen — Vorgänge mit dem Feinbau der Kristalle verknüpft ist und wieso die grob schematisierten Ansätze der technischen Theorien nicht weit führen konnten. Andererseits ist leider zu gestehen, daß eine Erklärung der Gleitvorgänge vom atomistischen Standpunkt noch nicht weit gediehen ist.

Aus den bisher vorliegenden Bestimmungen der Gleitrichtungen ergibt sich, daß sie die dichtest besetzten Gittergeraden sind. Die kubisch-flächenzentrierten Gitter haben [110], die innenzentrierten [111] als Gleitrichtung; die hexagonale dichteste Packung (Zn) $[10\bar{1}0]$. Die Gleitebenen sind auch kristallographisch einfache, d. h. dicht besetzte Ebenen. Bei den kubisch-flächenzentrierten Gittern ist die Oktaederebene (die dichtest besetzte) die Gleitebene. Hingegen hört schon bei den innenzentriert-kubischen Gittern diese Zuordnung zwischen der Gleitebene und der dichtest besetzten Ebene (110) auf (vgl. Tabelle auf S. 962).

Bei Sn sind die Gleitebenen (100) und (110) ebenfalls die dichtest und die zweitdichtest besetzten. Von den Gleitrichtungen ist die häufigste [100] mit 3,15 Å die dichtest, [101] mit 6,68 Å hingegen erst die viertdichtest besetzte Gerade. Die [111]-Gerade, die mit 4,44 Å Atomabstand an zweiter Stelle steht, ist nur einmal bei erhöhter Temperatur, die drittdichteste Gerade [100] mit 5,84 Å überhaupt nie als Gleitrichtung nachgewiesen worden.

Man erkennt aus dieser Aufzählung, daß die Besetzungsdichte zwar wichtig, aber nicht ausschlaggebend für die Eignung eines Systems als Gleitsystem ist.

An theoretischen Ansätzen zum Verständnis der Gleitungen liegt zweierlei vor: eine Arbeit von J. Frenkel[1]) und eine von R. Becker[2]). Der Frenkelsche Ansatz sucht das Eintreten der Gleiterscheinung nach Überschreiten einer kritischen Schubspannung durch ein „Feilenmodell“ zu deuten: soll längs einer Kristallfläche eine Gleitung eintreten, so ist das erst dann möglich, wenn obere und untere Kristallhälfte sich in der Normalenrichtung voneinander entfernt haben — etwa als wollte man zwei Feilen oder Wellbleche durch tangentiellen Zug aufeinander zum Gleiten bringen. Vor dem Gleiten ist also Arbeit zu leisten gegen die Kohäsionskräfte bzw. gegen den Zugmodul. Ist dieser E, δ der Netzebenenabstand, h seine Vergrößerung im Augenblick des Beginnes der Gleitung, so ist $^1/_2\, E h/\delta \,.\, h$ die aufgenommene Arbeit, die als Arbeit $^1/_2 f \,.\, \delta$ der Schubkomponente f bei der Verschiebung um die Periodenlänge in der Gleitebene, also um etwa den halben Netzebenenabstand, gedeutet wird. Daher ist größenordnungsmäßig

$$f \sim E h^2/\delta^2.$$

Zahlenwerte sind für $E \sim 10^{12}\,\mathrm{dyn/cm^2}$, $\delta = 10^{-8}\,\mathrm{cm}$, $f = 10^7\,\mathrm{dyn/cm^2}$ (nach Georgieff und Schmids Messungen an Bi, vgl. S. 964). Hieraus folgt für $h/\delta \sim 10^{-2}$, d. h. es müßte vor dem Gleiten eine Querdehnung des Gitters um etwa 1 Proz. auftreten. Möglicherweise ist diese nicht beobachtbar, da sie nur in der Nachbarschicht der wirklichen Gleitfläche auftritt[3]). In Wirklichkeit ist die „Zahnhöhe“ und Dehnungsarbeit durch die elektrischen Oberflächenfelder der Kristallhälften zu bestimmen, was Frenkel gittertheoretisch durchzuführen versucht.

Wie man sieht, gibt diese Theorie keine Erklärung der Verfestigung. Der gleiche Einwand ist gegen die Beckersche Theorie zu erheben, deren Durchführung im ganzen immerhin übersichtlicher ist, als die von Frenkel.

Becker geht davon aus, daß der große Einfluß sowohl der Deformationsgeschwindigkeit als der Temperatur auf das Gleiten eine statistische Deutung dieses Vorgangs nahelegt. Im idealen Gitter wäre er an sich schwer denkbar und ein Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit wäre erst dann zu erwarten, wenn man mit ihr in die Größenordnung der Schallgeschwindigkeiten käme. Soll bei dem Gleiten der Zusammenhalt der gleitenden Teile nicht aufhören, so kann man versuchen, es unter Verzicht auf genauere geometrische Vorstellungen so zu deuten, daß das Gleiten von kleinen Volumenteilen ΔV des Kristalls ausgeht, und zwar dann, wenn die infolge der Wärmebewegung auftretenden lokalen Spannungen im Verein mit der angelegten Zugspannung die kritische Spannung des Gleitsystems stellenweise erreichen lassen.

Sei Z die Zahl der sprungfähigen Bereiche in einem Stabe, W die mittlere Anzahl Gleitvorgänge oder Sprünge eines Bereiches pro Sekunde, λ die mittlere

---

[1]) J. Frenkel, Zeitschr. f. Phys. 37, 572, 1926.
[2]) R. Becker, Phys. Zeitschr. 26, 919, 1925.
[3]) Im Gegensatz zu den Frenkelschen Anschauungen glaubt Tammann (Neues Jahrb. d. Min., Geol. u. Paläont. 57, Beil. Bd. A, S. 117, 1928) aus Versuchen über das Ausfließen von Eis und Steinsalz aus Öffnungen feststellen zu können, daß Normaldruck die Gleitung (Fließen) erleichtert, vermutlich namentlich durch Begünstigung der Zahl der Gleitflächen.

Verlängerung des Stabes bei einem Sprung. Dann ist die Fließgeschwindigkeit des Stabes

$$u = \lambda Z W.$$

Die Anzahl Z wird als unabhängig von Zug und Temperatur betrachtet; λ setzt Becker proportional dem Zug. Ist W unabhängig von der Kraft, so wird u proportional dem Zug und es entsteht eine „Zähigkeit" oder „Plastizität" wie bei viskösen Flüssigkeiten — so wie es in der Tat die meisten Ansätze für die Beschreibung der Fließvorgänge in amorphen Körpern verlangen. Im Kristall wird W erst merklich nach Überschreiten der kritischen Spannung σ_R, die auch ohne Unterstützung durch die Wärmebewegung (also bei $T = 0^0$) ein Abgleiten hervorrufen würde. Für die Wahrscheinlichkeit, diese Spannung zu erreichen, macht Becker gemäß dem Boltzmannschen Prinzip der Statistik den Ansatz

$$W = const. e^{-A/KT}; \qquad A = {}^1/_2 \varDelta V \frac{(\sigma_R - \sigma)^2}{E}$$

A ist dabei der Arbeitsbetrag, den die thermische Bewegung liefern muß, um die herrschende (homogene) Spannung σ innerhalb eines mittleren Volums $\varDelta V$ auf den lokalen Wert σ_R zu erhöhen (E = Elastizitätsmodul). Aus diesem Ansatz erhält man sofort den Ausdruck für zwei meßbare Größen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{T} = \frac{\partial \ln u}{\partial \ln T} = \varDelta V \frac{(\sigma_R - \sigma)^2}{2EKT}; \qquad \mathfrak{S} = \frac{\partial \ln u}{\partial \ln \sigma} = 1 + \varDelta V \frac{\sigma(\sigma_R - \sigma)}{EKT}$$

oder umgekehrt

$$\frac{\sigma_R}{\sigma} = 1 + \frac{2\mathfrak{T}}{\mathfrak{S} - 1}; \qquad \varDelta V = \frac{(\mathfrak{S} - 1)^2}{\mathfrak{T}} \frac{EKT}{2\sigma^2}.$$

Aus Messungen der Temperatur- und Kraftabhängigkeit der Fließgeschwindigkeit u sollten also σ_R und $\varDelta V$ zu entnehmen sein [1]).

Nun sind wegen der Rekristallisation nur solche Messungen verwertbar, bei denen die Fließgeschwindigkeit weit unterhalb der Rekristallisationstemperatur gemessen worden ist. Becker zieht eigene Messungen an Wolframdraht bei Temperaturen zwischen 20° C und 100° C heran, bei denen das Material dicht oberhalb der Elastizitätsgrenze belastet wurde. Es zeigt sich, daß bereits Temperaturerhöhungen von 10 bis 20° C die Fließgeschwindigkeit um ein Mehrfaches erhöhen. $\mathfrak{T}$ ergibt sich im Mittel zu 30, $\mathfrak{S}$ zu 40, und daraus $\sigma_R/\sigma = 2{,}5$, $\varDelta V = (37\,\text{Å})^3$. Aus dem bekannten Zug (Elastizitätsgrenze) folgt absolut $\sigma_R \sim 250\,\text{kg/mm}^2$ — ein Wert, der nahe an der Zerreißfestigkeit von W-Draht liegt. Das für die Gleitung wesentliche Volumen $\varDelta V$ enthält etwa 3000 Atome und hat die gleiche Größenordnung, die Smekal für die ungestörten Gitterbereiche angibt (siehe § 10, 5).

Die Vorstellung, daß der Eintritt des Gleitens als thermische Schwankungserscheinung zu deuten ist, bringt diesen Vorgang in nahe Beziehung zu den sonstigen Äußerungen thermischer Gitterauflockerung. Als solche sind alle

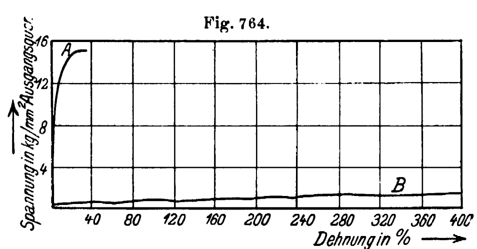
---

1) Die Beckersche Theorie kennt keinen Unterschied zwischen Fließen und Gleiten, da sie keine Rechenschaft von der Verfestigung liefert. Kommt mit Hilfe der thermischen Schwankungen einmal ein Gleiten zustande, so wird es bei der gleichen Last auch öfters geschehen (Fließen).

Arten von Platzwechselvorgängen zu nennen, insbesondere Diffusion und elektrolytische Leitung (die allerdings in Metallen ganz zurücktritt gegenüber der Elektronenleitung), und auch z. B. der § 12, 4 geschilderte Vorgang der Erholung. Dieser ist wesensgleich mit dem, was für den Polykristall in der Technik als „Vergütung" bezeichnet wird und besteht in einem allmählichen Ausglätten der durch die plastische Deformation verbogenen Gleitflächen. Seine starke Temperaturabhängigkeit ist in § 12, 4 erwähnt worden. Auch wenn bei höherer Temperatur eine Rekristallisation eintritt — sei es in kleinkristallinem, sei es in plastisch gestörtem einkristallinem Material —, so ist die Leichtigkeit des Platzwechsels wohl bestimmend für die Kristallisationsgeschwindigkeit und die Leichtigkeit der Rekristallisation. Untersuchungen technischer Art, und namentlich die Untersuchung von Polanyi und Schmid an rekristallisierenden Sn-Einkristallen [1]) führen zu dem Schluß, daß der Gehalt an innerer Spannungsenergie die Leichtigkeit der Rekristallisation bestimmt. Das stimmt gut zu den Beckerschen Vorstellungen des statistischen Ursprungs dieser Erscheinungen. Es ist somit zu hoffen, daß das Problem der technischen Festigkeit auf diese Weise allmählich den Methoden der theoretischen Physik zugänglich werden wird.

§ 15. **Vielkristalline Metalle.** 1. Gleithinderung. Bisher haben wir uns gänzlich auf die Erscheinungen beim metallischen Einkristall beschränkt, dessen technische Bedeutung hinter der des polykristallinen Materials weit zurücktritt. Alle technischen Untersuchungen haben den großen Einfluß der Korngröße auf die Festigkeit technischer Metalle dargetan. Sie haben zwar gezeigt, daß der Bruch des Materials in der Regel nicht etwa

Fig. 764.



Spannungs-Dehnungskurve für (A) Viel- und (B) Einkristall von Zink.

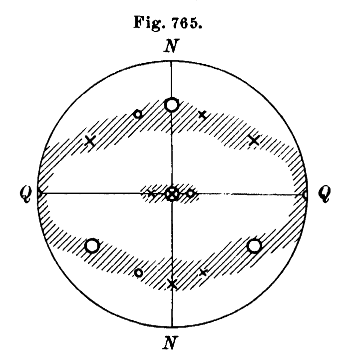
durch Abtrennung der Körner voneinander entsteht, sondern durch innerkristallinen Bruch. Diese Tatsache zeigt deutlich, daß das Studium des Einkristalls die Grundlage für die Theorie des Bruches bilden muß. Wie aber erklären sich die gewaltigen Unterschiede zwischen den Spannungs-Dehnungskurven, von denen Fig. 764 die für polykristallines und monokristallines Zn nach Polanyi und Schmid [1]) wiedergibt? Hier greifen die geometrischen Behinderungen der Kristallite ein, die ihnen kein ungehindertes Abgleiten ge-

[1]) M. Polanyi, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. **32**, 684, 1925.

statten, wie beim Dehnungsversuch mit dem Einkristall. Es ist wiederholt an Einkristallen beobachtet worden, daß unter dem Zwang von „Randbedingungen" Gleitsysteme unwirksam werden können, eventuell zugunsten solcher anderer, die sonst wegen größeren Widerstandes oder ungünstigerer Lage gar nicht in Tätigkeit getreten wären. Goucher[1]) hat an Wolfram derartiges gefunden, Polanyi und Schmid[2]) an Sn- und Bi-„Zweikristallen". Bei diesen letzten Versuchen handelt es sich um zwei verschieden orientierte Einkristalldrähte, die oberflächlich zusammengeschmolzen (gelötet) waren und nunmehr gedehnt wurden. Dabei zeigte sich der verlötete Mittelteil viel weniger dehnbar als der Rest. Infolge der verschiedenen Gleitrichtungen tritt kein einheitlicher Gleitvorgang auf und man sieht hier das einfachste Beispiel einer „Gleithinderung", wie sie im Vielkristall nach allen Richtungen hin eintritt. Diese Gleithinderung bewirkt das im allgemeinen beobachtete Ansteigen der Festigkeit mit der Feinheit des Korns. Ihre Gesetze sind aber noch keineswegs mathematisch formuliert.

2. Texturen. Für die Festigkeitseigenschaft technischer Materialien ist es wesentlich, daß durch viele Prozesse mechanischer Behandlung eine gewisse „Regelung" oder „Textur" in das Material kommt. Die Erforschung der Draht-, Walz-, Rekristallisations- und anderer Texturen vermittelst der Röntgeninterferenzen ist in einer großen Anzahl von Arbeiten geschehen, über die ausführlich hier nicht berichtet zu werden braucht. Es zeigt sich, daß durch starkes Ziehen, Walzen, Hämmern Orientierungen entstehen, bei denen sich die bevorzugten Gleitrichtungen in die Richtung größten Materialflusses einstellen, allerdings nicht mit aller Schärfe, sondern mit einer je nach der mechanischen Vorbehandlung und dem Material wechselnden Schwankungsbreite. Um das Material zu kennzeichnen, muß nach dem Vorgang von F. Wever[3]) auf einer Lagekugel bzw. deren stereographischer Projektion die Richtungsverteilung der bevorzugten kristallographischen Richtungen gegen die Drahtachse bzw. Walzebene und -richtung durch Kotierung eingetragen werden. Als Beispiel einer Walztextur sei die Figur für die Verteilung der [111]-Richtungen von Al-Walzblech nach Wever[4]) wiedergegeben (Fig. 765). Projektionsrichtung ist die Walzrichtung w, NN ist die Normale der Blechebene, QQ die Querrichtung in der Blechebene. Die Punkte, welche in die

Fig. 765.



Verteilung der Oktaederrichtungen in Aluminium-Walzblech von Wever.

[1]) F. S. Goucher, Phil. Mag. 48, 800, 1924.
[2]) M. Polanyi, E. Schmid, Zeitschr. f. techn. Phys. 5, 580, 1924.
[3]) F. Wever, Zeitschr. f. Phys. 28, 69, 1924.
[4]) F. Wever, Zeitschr. f. techn. Phys. 8, 398, 1927.

Gebiete stärkster Belastung eingetragen sind, sind die mittleren Richtungen [111]. Sie sind durch große Kreuze oder Kreise bezeichnet, je nachdem sie auf der oberen oder unteren Kugelhälfte zu zählen sind; der im Zentrum gelegene Punkt gehört zu beiden Kugelhälften. Kreuze und Kreise könnten auch ausgetauscht werden — was zu einer zweiten mit den Röntgeninterferenzen verträglichen Lage führen würde. Man erkennt aus den großen Kreuzen und Kreisen der Figur, daß sich in die Walzrichtung eine [111]-Richtung einstellen kann und daß dann eine (110)-Ebene senkrecht zu N liegt, d. h. Walzebene ist. Die kleinen Kreuze und Kreise bezeichnen eine zweite Lage, bei der sich Oktaederflächen senkrecht zur Walzebene und parallel zur Walzrichtung stellen. Bei dieser Lage können die Normalen anderer Oktaederflächen nur annähernd in die Walzrichtung fallen (kleine Kreuze und Kreise neben dem Zentrum der Figur). Es liegt dann annähernd die Richtung [335] in der Walzrichtung (vgl. unten).

Bei den Ziehtexturen stellt sich nicht, wie man erwarten könnte, die Gleitrichtung $\mathfrak{g}$ in die Drahtachse ein, wenigstens nicht bei den bisher untersuchten kubischen ziehbaren Kristallen, die mehrere kristallographisch gleichberechtigte Gleitsysteme haben. Die Achse tritt vielmehr in eine zu den Gleitrichtungen symmetrische Lage als Endstellung ein, wobei diejenige nach Polanyi [1]) bevorzugt ist, die den kleinsten Winkel gegen die Gleitrichtungen einschließt. Bei flächenzentriert-kubischen Gittern mit $\mathfrak{g} = [110]$ ist dies in erster Linie [111], in zweiter [100]. Beide Lagen sind bei Ag nachgewiesen, allein die erste bei Pd, während das innenzentrierte Eisen $(\mathfrak{g} = [111])$ als Ziehtextur [110] parallel der Ziehachse stellt.

Auch zur Erklärung der Walzlagen sind ähnliche Gesichtspunkte geltend gemacht worden, die aber nicht immer mit den beobachteten Walzebenen verträglich sind.

Die Deformationstexturen können je nach dem Grade der Deformation verschieden ausfallen. Glocker und Kaupp [2]) haben auf den Einfluß des Stichgrades beim Walzen von Ag aufmerksam gemacht: erreicht man den gleichen Walzgrad in kleinen Stichen, so stellt sich die Walztextur schärfer ein, als bei großen Stichen. (Dementsprechend wird die Rekristallisation erleichtert). Konobejewski [3]) weist eine Inhomogenität der Walztextur auf: die Außenschicht gewalzter Folien hat eine andere bevorzugte Lagerung als die Innenschicht. So entsteht bei Aluminium außen eine Textur mit (110) als Walzebene und einer Richtung nahe [211] (etwa [335]) in der Walzrichtung (vgl. Fig. 765); im Innern des Bleches tritt neben dieser Textur eine zweite auf, bei der (100) parallel der Walzebene, [110] parallel der Walzrichtung ist. Übergänge zwischen diesen beiden Texturen finden sich nicht, hingegen nimmt mit wachsendem Walzgrad die zweite Textur zu. Möglicherweise entsteht sie durch die Anwesenheit solcher Kristallite, die besonders ungünstig für diejenigen Gleitungen liegen, durch welche die erste Textur erreicht wird und prägt sich erst dann stark aus, wenn diese bevorzugte Gleitung erschöpft ist.

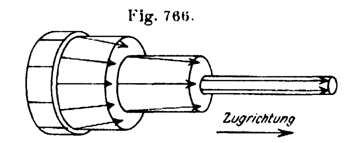
---

1) M. Polanyi, Zeitschr. f. Phys. **17**, 42, 1923.
2) R. Glocker, E. Kaupp, Zeitschr. f. Metallkunde **16**, 377, 1924.
3) S. Konobejewski, Zeitschr. f. Phys. **48**, 741, 1927.

Eine ähnliche Inhomogenität an hartgezogenem Kupferdraht, also an einer Ziehtextur, ist von Schmid und Wassermann[1]) durch Röntgenaufnahmen bei sukzessivem Abätzen der Außenschichten eingehend untersucht worden. Danach findet sich nur in der Drahtmitte eine Fasertextur mit Achse $f = [111]$ parallel zur Drahtachse bzw. Zugrichtung; weiter außen hingegen eine Fasertextur, deren Faserachse eine wechselnde Neigung — bis zu 9^0 — gegen die Zugrichtung hat. Erst in der Oberflächenschicht stellt sich die Faserachse parallel den Erzeugenden der Zylinderfläche, jedoch ist die Faserstruktur hier nicht mehr gut ausgebildet. Die Maximalneigung von 9^0 stimmt mit dem Winkel der Ziehdüse überein. Man erhält also etwa das folgende Bild (Fig. 766) für die Anordnung der Faserachsen in hart gezogenem Draht. — Die zweite, bei Kupfer festgestellte Faserachse $f = [100]$ weist nur geringere Neigungen gegen die Zugachse auf.

Bei elektrolytischer Abscheidung von Metallen entstehen Fasertexturen, indem bevorzugte Wachstumsrichtungen sich in die Stromlinien einstellen. Im allgemeinen, aber nicht ohne Ausnahmen, sind dies die dichtest-

Fig. 766.



Faserstruktur in hartgezogenem Kupferdraht nach Schmid-Wassermann.

besetzten Gittergeraden, z. B. [111] bei den kubisch innenzentrierten Metallen Eisen und Chrom [Glocker und Kaupp][2]). Zusätze zur Lösung, Entwicklung von Wasserstoff und ähnliche Umstände können die Ausbildung der Faserstruktur unterdrücken und ungeordnete Abscheidungen veranlassen.

Eine besondere Art von Textur entsteht durch Rekristallisation bereits texturierten Materials. Die Rekristallisation geht bei genügend starkem Erwärmen (Anlassen) vor sich und besteht in der Ausbildung größerer Kristallite an Stelle der kleineren. In „Rekristallisationsdiagrammen" wird, wie schon in § 11 erwähnt, nach Czochralskis Vorgang[3]) die Abhängigkeit der erzielten Korngröße von der Temperatur und dem Grad der vorhergegangenen plastischen Deformation des Materials dargestellt. Aber die Korngröße ist nicht ein genügendes Kennzeichen für vollständige Rekristallisation. Nach der von R. Glocker[4]) gegebenen Definition gehört nämlich zur völligen Rekristallisation die Vernichtung der durch vorhergehende Bearbeitung entstandenen Textur, also regellose Orientierung der Kristallite. Unter Umständen ist aber diese selbst durch Anlassen bis dicht unter den Schmelzpunkt nicht zu erzielen, z. B. bei Kupfer. Zwar beginnt die Rekristalli-

---

[1]) E. Schmid, G. Wassermann, Zeitschr. f. Phys. **42**, 779, 1927.
[2]) R. Glocker, E. Kaupp, ebenda **24**, 121, 1924.
[3]) Czochralski, Moderne Metallkunde (Springer, 1924); Hahnemann (Zeitschr. f. Metallkunde 1927) hat auch den Einfluß der Zeit ins Diagramm einbezogen.
[4]) R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen (Springer, 1927), S. 337.

sation stark gewalzten Kupferblechs schon bei etwa 150° C, aber die neu wachsenden Körner weisen eine ganz ausgeprägte „Rekristallisationslage" auf, die durch die Vorgeschichte vor dem Kaltwalzen (z. B. vorausgegangenes Warmwalzen) bedingt ist: [100] // Walzrichtung, (010) // Walzebene (statt [112] und ($\bar{1}$10) bei der Walztextur). Aus dieser Textur heraus setzt schließlich das Schmelzen ein. Die anisotropen Festigkeitseigenschaften eines geregelten Materials bleiben in diesem Falle trotz der Kornvergrößerung bestehen.

Andere Rekristallisationseigenschaften zeigt das mit Kupfer strukturgleiche Silber: von starkgewalztem Blech mit [112] parallel der Walzrichtung, ($\bar{1}$10) parallel der Walzebene ausgehend, stellt sich beim Anlassen zunächst eine „Rekristallisationszwischenlage" ein, bei der zwar noch [112] wie vorher liegt, aber eine ($\bar{3}$11)-Ebene parallel zur Walzebene. Bei niederen Temperaturen (300° C) ist diese Lage trotz 10tägigen Glühens beständig; bei hohen Temperaturen (850° C) hält sie sich jedoch nur wenige Minuten aufrecht, um von einer regellosen Anordnung verdrängt zu werden.

Schließlich verhält sich wieder anders das ebenfalls strukturgleiche Aluminium: es geht direkt, ohne Zwischenlage, in die ungeregelte Anordnung der völligen Rekristallisation über. Bei geringem Walzgrad ist dies auch bei den anderen kubischen Metallen der Fall, bei Al aber auch bei 98 Proz. Walzen.

Alle Rekristallisationserscheinungen werden durch ganz geringe Verunreinigungen (Legierung) sehr stark beeinflußt[1]).

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß sowohl die Herstellung wie die Vernichtung der Deformationstexturen höchst verwickelte Vorgänge sind, bei denen die Individualität der Metalle, ihre Reinheit, ihre Vorgeschichte bestimmend mitwirken. Der Einfluß der Textur auf die Festigkeitseigenschaften ist als das technisch nächstliegende Ziel der Gegenstand zahlreicher Arbeiten gewesen, ohne daß aber bisher mehr als qualitative Zusammenhänge aufgewiesen worden wären. Es mag diesbezüglich auf Kap. VII dieses Bandes sowie auf einige zusammenfassende Darstellungen verwiesen werden[2]).

Über einen theoretischen Ansatz betr. die Rekristallisation siehe S. 988.

III. Gegenüberstellung der mechanischen Eigenschaften bei Metallen und Nichtmetallen. Schlußbemerkungen.

§ 16. Das elastische Gebiet bei Metallen. Blicken wir noch einmal von einem allgemeinen kristallphysikalischen Standpunkt aus auf Metalle und Nichtmetalle zurück, so ist zunächst bezüglich der Elastizität zu sagen, daß jedenfalls die verfestigten Metallkristalle ihr „elastisches" Gebiet haben, das bei kleineren Beanspruchungen liegt als das Gebiet, bei dem die plastische Deformation fortschreitet. Wenn freilich die Vermutung von Schmid und

---

1) H. Widmann (Zeitschr. f. Phys. **45**, 200, 1927) findet z. B., daß Ag-Blech, das normal erst bei 280° C zu rekristallisieren beginnt, durch 0,05 Proz. Eisenzusatz dies schon bei Zimmertemperatur tut.

2) R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen (Springer, 1927), S. 237; Czochralski, Moderne Metallkunde (Springer, 1924); G. Sachs, Grundbegriffe d. mechan. Technologie d. Metalle (Akad. Verlagsges., 1925); Sachs und Fieck, Der Zugversuch (Akad. Verlagsges., 1926).

Haase[1]) sich bewahrheiten sollte, daß ganz reine und unverfestigte Metallkristalle bei ganz langsamer Laststeigerung schon bei beliebig kleinen kritischen Schubspannungen zu Gleitungen fähig sind (was nach der statistischen Auffassung dieses Vorganges durchaus im Bereich der Möglichkeit liegt), so würde allerdings das elastische Gebiet für unverfestigte Metalle verschwinden, bzw. falls die Definition der elastischen Deformation unter Einführung konventioneller technischer Grenzen durch Rücksichtnahme auf die Dauer der Beanspruchung eingeengt würde, so würde die elastische Deformation ihre theoretische Bedeutung verlieren. Jedenfalls zeigen die Haase-Schmidschen Dehnungskurven, daß für Zinkkristalle mit 0,03 Proz. Cd-Gehalt (Kahlbaumzink) und bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von etwa 0,2 Proz. in der Minute eine Elastizitätsgrenze existiert, unterhalb deren die Deformation innerhalb einer Genauigkeitsgrenze von $1 . 10^{-5}$ der Drahtlänge wieder verschwindet, wenn die Last fortgenommen wird. Die Elastizitätsgrenze schwankte allerdings bei 21 Versuchen zwischen 53 und 251 g/mm^2, was vielleicht auf die verschiedene Orientierung der Drähte zurückzuführen ist. Bei Sn und Bi lagen die Verhältnisse ähnlich. Ob eine endliche Elastizitätsgrenze auch bei ganz reinen Elementen vorhanden ist, interessiert mehr vom physikalischen Standpunkt aus für die Auffassung über das Zustandekommen der Gleitungen als vom technischen Standpunkt einer Zurückführung der Festigkeit auf die Vorgänge im Einkristall. Bekannt ist, daß Legierung härtet. Mit Rosenhayn[2]) kann man das so zu verstehen suchen, daß die legierenden Atome (z. B. Cd in Zn) nicht ganz in den Gitterbau des Grundmetalls hineinpassen und innere Spannungen verursachen, die ähnlich verfestigend wirken, wie eine vorangegangene plastische Deformation, die auch Spannungen hinterlassen hat[3]).

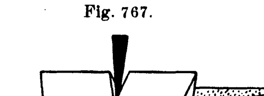
§ 17. Das plastische Gebiet bei Nichtmetallen. So wie Metalle ihr elastisches Gebiet, so haben auch nichtmetallische Kristalle ihr Gebiet plastischer Deformation. Die Kristallographen unterscheiden zwischen Schiebungen und Translationen. Letztere sind das, was oben bei den Metallen „Gleitung“ genannt wurde. Gleitsysteme sind z. B. bei Steinsalz und Sylvin $[1\bar{1}0]/(110)$, bei Bleiglanz PbS (das nach dem Steinsalztyp aufgebaut ist) $[110]/(001)$ und $[100]/(010)$, bei dem rhombischen Anhydrit ($CaSO_4$) $[010]/(001)$ usw. Bei den Gleitungen oder Translationen bleibt die Größe der Abgleitung unbestimmt. Die Schiebungen hingegen sind Gleitungen von ganz bestimmtem Gleitbetrag. Das klassische Beispiel hierfür ist Kalkspat: Fig. 767 zeigt, wie ein Kalkspatrhomboeder durch Aufsetzen einer Messerschneide auf die Kante in eine Zwillingsstellung umgeklappt werden kann. Der erzeugende Vorgang ist offenbar ein Gleiten von bestimmtem Betrag mit horizontaler Gleitfläche und der einen Rhomboederkante als Gleitrichtung. Erfolgt die Schiebung wie hier nur nach einem Gleitsystem, so heißt sie bei

---

[1]) O. Haase, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. **33**, 413, 1925.
[2]) Rosenhayn, Nature **112**, 832, 1923.
[3]) P. Rosbaud, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. **32**, 197, 1925.

den Kristallographen eine einfache Schiebung. Bei einer Schiebung erlischt nach einem gewissen Abgleitungsbetrag die Gleitfähigkeit dadurch, daß die Kristallstruktur in eine Zwillingsstellung zur Ausgangsstellung gelangt ist. Kalkspat und Steinsalz haben den gleichen Aufbau, sofern man das Cl

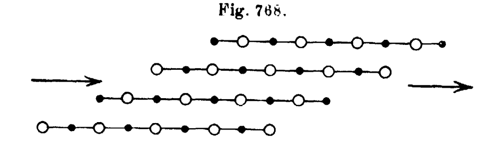
Fig. 767.

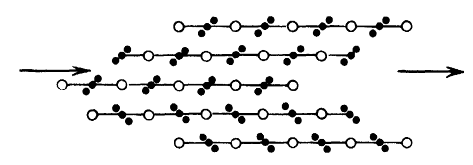


Kalkspatschiebung.

des NaCl mit einem Radikal CO_3 in $CaCO_3$ vergleichen darf. Während bei dem kleineren und „runderen" Cl aber eine Gleitung um beliebig viele Atomabstände auf der Gleitrichtung möglich ist, ändert sich bei der analogen Gleitung in $CaCO_3$ die Lage der ausgedehnteren CO_3-Gruppe teils durch die Gleitbewegung selbst, teils durch die Veränderung der Umgebung (Fig. 768).

Fig. 768.





Schematische Figur zur Erklärung der Kalkspatschiebung.

Die CO_3-Gruppen wirken gewissermaßen wie Sperrnocken, die benachbarte Netzebenen entweder in der einen oder in der anderen Lage festhalten. — Ähnliche Vorkommnisse sind bei Metallverbindungen zu erwarten und vielleicht erklärt sich in manchen Fällen die Gleitbehinderung durch Legierung in dieser Art.

Von den anderen, für Metalle so sehr bezeichnenden Eigenschaften: Verfestigung, Erholung, Rekristallisation findet sich die letzte, freilich in geringerem Maße, auch bei Nichtmetallen. Sie heißt hier Sammelkristallisation. Aber weder bei den Schiebungen und Gleitungen, noch bei der Rekristallisation sind so präzise und für die Dynamik verwertbare Ergebnisse erzielt worden, wie bei Metallen.

Daß einheitlichen Kristallen die Eigenschaft der elastischen Nachwirkung fehlt, ist bei Metallen und Nichtmetallen festgestellt worden, bei ersteren durch v. Wartenberg[1]) und neuerdings wieder durch Haase und Schmid[2]); für Nichtmetalle besonders eingehend durch A. Joffé[3]) am Quarz. Die elastische Nachwirkung ist nach der Ansicht von Becker[4]) an die Anwesenheit plastischer Inhomogenität gebunden und auf statistischer Grundlage zu deuten, ähnlich wie der Gleitvorgang.

§ 18. Prandtls Theorie der elastischen Nachwirkung und Hysterese. Diese bisher nur skizzenhaft ausgeführte Theorie[5]) gibt ein gutes Bild davon, wie die molekularstatistische Behandlung der über-elastischen Vorgänge anzupacken ist. Deshalb möge kurz über sie berichtet werden.

Wie aus Kap. VII, § 14 bekannt, bewirkt die Hysterese, daß zum gleichen Wert des Zuges verschiedene Deformationen gehören können, die durch die Vorgeschichte bzw. den Verlauf des Versuchs bestimmt sind. Da jedes Paar zusammengehörender Zug- und Dehnungswerte einem durchaus stabilen Zustand des Systems entspricht (beliebige kleine Spannungsänderungen bewirken fest bestimmte kleine Änderungen der Deformation), so deutet die Hysterese darauf, daß nicht eine, sondern mehrere stabile Gleichgewichtslagen der kleinsten Teile im Material möglich sind. Welches diese Teilchen sind, ist nicht sicher. Hysterese tritt in störungsfreien Einkristallen nicht auf, wohl aber in bereits plastisch deformierten sowie in vielkristallinem Material. Man wird also dafür Teilchen verantwortlich zu machen haben, die an Störungsstellen (Gleitebenen) oder an Korngrenzen sitzen.

Prandtl nimmt an, daß die Teilchen Atome sind, die zwischen den regulär gewachsenen Gitterbereichen liegen und am einen oder anderen der an der Störungsfläche zusammenstoßenden Gitter adsorbiert sind. Sie sollen dort eine stabile Adsorptionslage haben, zu der sie mit einer gewissen (einfachheitshalber linear angenommenen) Kraft wieder hinstreben, wenn sie durch andere Kräfte herausgezogen werden. Diese anderen auf die Teilchen wirkenden Kräfte rühren vom gegenüberliegenden Gitter her — es ist dessen örtlich periodisches Streufeld (S. 951; die Periode ist gleich dem Atomabstand), das an dem Teilchen vorüberzieht, wenn bei weiterer plastischer Deformation die ungestörten Gitterbereiche sich verschieben.

Angenommen nun, die elastische Adsorptionskraft wäre sehr stark gegen das Streufeld, so würden die adsorbierten Atome nur Ruhelagen in unmittelbarer Nähe der eigentlichen Adsorptionsstellen C haben. Wäre andererseits das Streufeld viel stärker als die rücktreibende Kraft der Adsorption, so müßten, entsprechend dem periodischen Charakter des Streufeldes, eine ganze

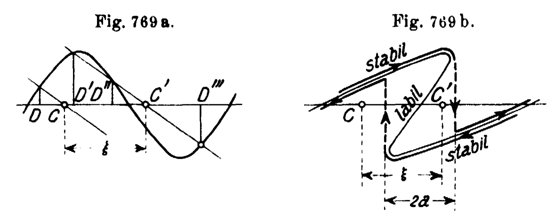
---

[1]) H. v. Wartenberg, Verh. d D. Phys. Ges. **20**, 113, 1918.
[2]) O. Haase, E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. **33**, 413, 1925.
[3]) A. Joffé, Ann. d. Phys. **20**, 919, 1906.
[4]) R. Becker, Zeitschr. f. Phys. **33**, 185, 1925.
[5]) L. Prandtl, Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **8**, 85, 1928. (Die Fassung des Titels drückt aus, daß Prandtl die nur modellmäßige Analogie zwischen den im Text wiedergegebenen Anschauungen und dem wahren Grund der Hysterese betont.)

Reihe von Gleichgewichtslagen für jedes irreguläre Atom existieren. Ohne nähere Abschätzung der Größenordnungen nimmt **Prandtl** das Verhältnis zwischen Adsorptionskraft und Streufeldkraft derart an, daß mindestens zwei stabile Gleichgewichtslagen für ein irreguläres Atom bei geeigneter Verschiebung ξ der Gitter gegeneinander möglich sind.

Man übersieht die Verhältnisse an Fig. 769a. Die Wellenlinie bedeutet die in der Verschiebungsrichtung genommene Kraftkomponente des Streufeldes, die schräge Gerade die Adsorptionskraft, die im Punkte C verschwindet. C ist mit dem unteren, die Wellenlinie mit dem oberen Halbgitter fest ver-

Fig. 769a. Fig. 769b.

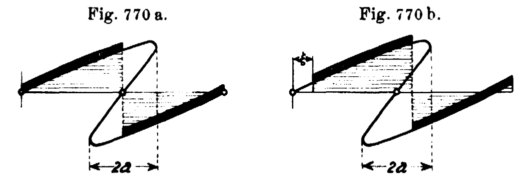


Kräftespiel an den irregulären Atomen nach Prandtl.

bunden zu denken. Durch eine Verschiebung ξ der Gitter gelangt C nach C'. Die Gleichgewichtslage des irregulären Atoms tritt ein bei Gleichheit der beiden Kräfte; die zu C gehörende Lage ist mithin D, während zu ξ und C' drei Lagen D', D'', D''' gehören. Man sieht, daß dieser dreifache Schnitt nur eintritt, wenn die Adsorptionsgerade nicht zu steil ist, und ferner, daß die Lagen D' und D''' stabil sind, D'' labil.

Die Kraft, mit der das obere Halbgitter vermittelst des adsorbierten Atoms auf das untere einwirkt, ist die Ordinate in den Punkten D, D' usw. Trägt man diese als Funktion der Verschiebungen ξ auf, so gewinnt man in Fig. 769b die mittlere, schwach gezeichnete Kurve mit zwei stabilen und einem labilen Bereich. In die Figur ist zugleich eingezeichnet, was bei einem „Kreisprozeß" geschieht, d. h. der Kraftverlauf bei Vergrößerung und nachfolgender Ver-

Fig. 770a. Fig. 770b.



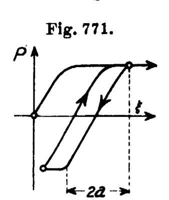
Kräftespiel an den irregulären Atomen nach Prandtl.

kleinerung von ξ. Auf dem Hinweg (ξ wächst) wird das Teilchen auf dem oberen stabilen Zweig der Kurve bleiben, solange es geht, entsprechend den Lagen D und D' in Fig. 769a; auf dem Rückweg wird der untere stabile Kurvenzweig möglichst lange verfolgt. Hierdurch entsteht die in der Fig. 769b ersichtliche Hysteresisschleife für ein einzelnes Teilchen. Bei welchem Verschiebungswert ξ das Überspringen des Teilchens von einem Kurvenzweig auf

den anderen erfolgt, hängt von der „Phase“ des Teilchens, d. h. der Lage des Punktes $\xi = 0$ oder C gegenüber dem Streufeld der oberen Gitterhälfte ab.

In einem frisch ausgeglühten Körper ist anzunehmen, daß eine gleichförmige Verteilung der adsorbierten Teilchen über alle Phasen im Sinne der Fig. 770a vorhanden ist. Wird nun bei einer kleinen Deformation eine Verschiebung ξ erreicht (Fig. 770b), so gibt es noch keine Teilchen, die auf einen anderen Kurvenzweig übergesprungen sind. Die durch die Verschiebung geweckte Spannung wächst zunächst linear an (Differenz der schraffierten Flächen); Hysterese tritt nicht auf. Dies ist das Gebiet bis etwa zur Proportionalitätsgrenze (Kap. VII, § 8). Wird die Verschiebung ξ über den Wert a hinaus gesteigert, so tritt keine Vergrößerung der Spannung mehr ein, da die rechts hinzutretenden Belastungen der Kurve auf den linken Kurvenanfang umgeschlagen werden können. Hingegen treten immer mehr irreguläre Teilchen auf e i n e n Kurvenast über, und die bei einem symmetrischen Kreisprozeß umlaufene Fläche nimmt also weiter zu. Die Hysteresiskurve selbst wird etwa wie Fig. 771 aussehen; dabei ist ein (unsymmetrisch zum Nullpunkt gelegener) Kreisprozeß eingetragen.

Fig. 771.



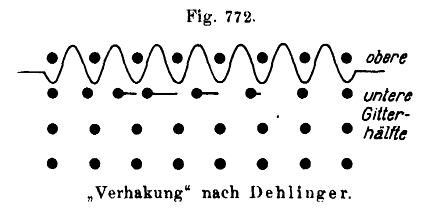
Hysteresis-Schleife nach Prandtl.

Die Hysterese ist nach dieser Auffassung zwar an Unregelmäßigkeiten des Gitterbaues geknüpft, sie hat aber nichts mit der thermischen Unregelmäßigkeit zu tun. Die thermische Bewegung der adsorbierten Teilchen ist nach Prandtls Auffassung der Grund zu der elastischen Nachwirkung und zum Fließen. Hier nähern sich die Prandtlschen Ansichten durchaus den Beckerschen (§ 14). Die Nachwirkung (vgl. Kap. VII, § 14) entsteht kurz gesagt deshalb, weil infolge der thermischen Schwankungen lokale und gelegentliche Energieanhäufungen vorkommen können, die ein adsorbiertes Atom von einem Kurvenzweig auf den andern werfen. Ist zwischen Spannung und Deformation ein Gleichgewichtszustand eingetreten, so sind die Zahlen der „hinauf-“ und „hinunter“springenden Atome gleich groß. Eine neu hinzutretende Spannung wird sich zunächst mit der momentan vorhandenen Verteilung der irregulären Atome auf beide Kurvenzweige ins Gleichgewicht setzen (momentane Deformation), sodann aber wird der neuen Deformation entsprechend eine kleine Änderung in den Besetzungszahlen des oberen und unteren Kurvenzweiges stattzufinden haben, damit wieder gleich viele Atome hinauf- und hinunterspringen — und diese weitere, nach Art aller Schwankungserscheinungen langsam eintretende Neuregelung bewirkt eine kleine Abänderung des momentanen Deformationszustandes (kriechende Deformation). Die rechnerische Verfolgung dieses Gedankens führt Prandtl auf Gesetze für die elastische Nachwirkung, die den nach den Beobachtungen formulierten entsprechen.

Es ist kaum zu bezweifeln, daß die Prandtlschen Überlegungen das Wesentliche des Vorganges treffen, wenn auch die Natur der adsorbierten

Teilchen und die Rolle der Adsorptionskraft noch nicht als geklärt angesehen werden kann. Sehr verwandte Züge zeigt eine von Dehlinger[1]) aufgestellte Theorie der Rekristallisation. Die Rekristallisation geht bei vielen Metallen in zwei Stufen vor sich: bei wenig erhöhten Temperaturen findet ein langsames, diffusionsartig sich ausbreitendes Neuwachstum von Körnern statt, und oberhalb einer ziemlich scharf ausgeprägten „normalen Rekristallisationstemperatur" setzt dann eine schnelle Rekristallisation ein. Vorbedingung für die Rekristallisation ist eine gewisse bleibende Verformung. Dehlinger erblickt in ihr einen Prozeß, der an manchen Stellen zu Verwerfungen und Auflockerungen im Gitter führt, insbesondere zu einem besonderen Deformationstyp, den er „Verhakung" nennt. Fig. 772 gibt ein Bild davon: das Wesentliche ist, daß wie bei Prandtl zwei in sich ungestörte Gitterbereiche aneinandergrenzen, deren oberer auch durch sein periodisches Streufeld angedeutet ist, und daß ein Atom des einen Bereiches um mehr als einen halben Gitterabstand aus seiner Lage entfernt eine neue Gleichgewichtslage gefunden hat. Abweichend von Prandtl nimmt Dehlinger eine Verkettung der Atome aneinander an, wie es in der Gitterdynamik geschieht (freilich rechnet er nur mit

Fig. 772.



„Verhakung" nach Dehlinger.

einer Dimension). Dabei zieht die Verschiebung des einen Atoms kleinere bei seinen Nachbarn nach sich. Die rücktreibende Kraft, die von der eigenen Gitterhälfte ausgeübt wird, muß durch das Streufeld der gegenüberliegenden Hälfte ausgeglichen werden, wie bei Prandtl. Auch hier ergeben sich zwei stabile und eine labile Gleichgewichtslage. Aber Dehlinger schätzt die rücktreibende Kraft durch den Elastizitätsmodul ab (auch dieser ist ja durch die Verkettung gegeben) und findet, daß die Bindung zu stark ist, um mit der aus den gittertheoretischen Rechnungen bekannten Potentialkurve zu den drei Schnitten zu führen (vgl. Fig. 769a). Für die Deutung der Rekristallisation ist dieser Umstand wichtig. Wenn nämlich eine ganze Reihe gleichsinniger Verhakungen von der Art von Fig. 772 angenommen werden, so erweicht sich die Bindung: man sieht leicht, daß die Nachbarverhakungen auf die Atome einer Verhakung zwischen ihnen Kräfte ausüben, die die Verhakung begünstigen. Der vielfachverhakte Zustand ist stabil. Er ist es, der durch mechanische Deformation erreicht wird. Das Aufbrechen der Verhakungen sieht Dehlinger als Vorbedingung für das Einsetzen der Rekristallisation an (Auflockerung als Anfang der Neuordnung). Bei mittleren Temperaturen wird infolge der Energie-

[1]) U. Dehlinger, Stuttgarter Habilitationsschrift, 1928; siehe auch Metallwirtschaft 7, Heft 43, 1928.

schwankungen hie und da eine verhakte Atomgruppe die nötige Energie erhalten, um sich zu „enthaken“ (langsame Rekristallisation). Wenn aber bei steigender Temperatur diese Energie sich häufiger in benachbarten Verhakungen findet, so fällt die gegenseitige Stabilisierung fort und das Verhakungssystem bricht in sich zusammen („normale Rekristallisationstemperatur“ und Rekristallisation oberhalb derselben). Zwischen dieser Theorie und der Weissschen Theorie des Ferromagnetismus besteht eine enge Analogie: dort stabilisieren sich die Molekularmagnete durch das von ihnen erzeugte innere Magnetfeld, bis bei der Curietemperatur die Gleichrichtung der Magnete und das innere Feld durch die zunehmende Temperaturbewegung plötzlich zerstört wird. Zweifellos ließen sich aus der Dehlingerschen Vorstellung die von Prandtl behandelten Erscheinungen herleiten, und zwar unter besserem Anschluß an die sonstigen gittertheoretischen Methoden.

§ 19. Schlußbemerkungen. Wenn wir heute in aller Ehrlichkeit angeben wollen, wie weit die physikalische Forschung „das wirkliche mechanische Verhalten“ der festen Körper erklären kann, so müssen wir uns nach dem Vorangegangenen mit der sehr bescheidenen Antwort begnügen: wir glauben den Weg betreten zu haben, der weiter führen wird, als die bisherige auf reversible Vorgänge eingestellte physikalische oder die bisher auf zu schnelle Erfolge eingestellte technische Forschung; wir sind berechtigt, auf eine Reihe von Erfolgen der neuen theoretischen und experimentellen Untersuchungen hinzuweisen. Aber gerade mit der tieferen Durchdringung des Gegenstandes erkennen wir, daß schon die Vorgänge in Einzelkristallen — wieder theoretisch und experimentell — recht schwer zu fassen sind und daß der Schritt zum vielkristallinen technischen Material auch nicht leicht sein wird. Hält man überhaupt an dem Gedanken fest, die Eigenschaften des technischen Materials auf die der Kristallite zurückzuführen, so sind die üblichen technischen „Proben“ und „Grenzen“ (Elastizitäts- und Fließgrenze, Kerbzähigkeit, Härtezahl, Kugeldruckprobe usw.) ungeeignet, um Rückschlüsse auf den elementaren Vorgang zu gestatten. Andererseits fehlt die rechte theoretische Verbindung zwischen dem Vorgang im Einzelkristall und seiner Auswirkung für den Vielkristall — eine alte Rechnung von Voigt[1]) gilt nur für ganz kleine, als elastisch angesetzte Deformationen und die bei den großen plastischen Deformationen wesentliche Behinderung des Gleitens (S. 978) dürfte schwer zu erfassen sein. Aber auch zum Verständnis der plastischen Vorgänge im Metalleinkristall fehlt uns noch viel; der Einfluß der Geschwindigkeit, die Erholung, der große Einfluß selbst geringster Beimengungen auf die Verfestigung und auf die Rekristallisation — das alles bietet der experimentellen und theoretischen Forschung auf lange hinaus zahlreiche Aufgaben. Der Eindruck ist nicht zu umgehen, daß diese elementaren Festigkeitsfragen in einem engen Zusammenhang stehen zu den prinzipiellen physikalischen Vorstellungen über den atomistischen Aufbau der Metalle, der natürlich auch die Frage der elektrischen

1) W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphysik (Teubner, 1910), Anhang II, S. 954—962.

Leitfähigkeit umfaßt. Hoffentlich werden die präziseren Vorstellungen von der Natur der „Leitungselektronen", die uns die neue Sommerfeldsche Theorie eröffnet, sich bald auch für Festigkeitsfragen auswirken. Jedenfalls ist es ein bedeutsames Anzeichen dafür, wie eng die Anlehnung der Festigkeitslehre an die allgemeine Atomtheorie sich gestalten muß, wenn nach den Messungen von Bridgman[1]) die Cauchyschen Relationen schon bei Wolfram nicht erfüllt sind — einem kubisch-körperzentrierten Gitter, wo sie nach der Bornschen Theorie unbedingt gelten müßten. Die Richtigkeit der Bridgmanschen Bestimmungen vorausgesetzt, würden diese Messungen geradezu dazu zwingen, für die Metalle die Bornsche Vorstellung vom stabilen Gleichgewichtszustand der Atome im idealen Gitter aufzugeben. Mag der Weg zu einer allgemeinen Zustandstheorie der Metalle auch weit sein, er scheint der einzige zu sein, der die für die fundamentalen Festigkeitsfragen nötigen Grundlagen liefert. Exakte experimentelle Forschung an den einfachsten Körpern allein kann und wird in absehbarer Zeit weiterführen.

---

[1]) Vgl. § 5,4.

Dritter Abschnitt.

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper[1]).

Zehntes Kapitel.

Gleichgewicht von Flüssigkeiten und Gasen.

§ 1. Eigenschaften der Flüssigkeiten. Die Flüssigkeiten unterscheiden sich von den festen Körpern durch die leichte Verschieblichkeit ihrer Teilchen. Während bei den festen Körpern endliche, zum Teil sehr erhebliche Kräfte nötig sind, um ihre Form zu ändern, verschwinden die zur Formänderung von Flüssigkeiten erforderlichen Kräfte vollständig, wenn nur für die Formänderung hinreichend viel Zeit zur Verfügung ist. Bei raschen Formänderungen zeigen auch die Flüssigkeiten einen Widerstand, der aber nach Aufhören der Bewegung sehr schnell verschwindet. Man nennt die Eigenschaft der Flüssigkeiten, gegen Formänderung Widerstand zu leisten, „Zähigkeit". Von der Zähigkeit wird in Kapitel XII, § 1 ausführlich die Rede sein. Neben den gewöhnlichen, leicht beweglichen Flüssigkeiten gibt es auch sehr zähe Flüssigkeiten, deren Widerstand gegen Formänderung sehr beträchtlich ist (im Ruhezustand aber auch wieder verschwindet), und es gibt von hier aus alle Übergänge zum (amorphen) festen Körper. Erhitztes Glas z. B. macht diese Übergänge sämtlich durch, Asphalt und ähnliche Stoffe zeigen sie bei gewöhnlichen Temperaturen.

Versuch: Eine umgestürzte Tonne mit Asphalt läuft je nach der Temperatur in einigen Tagen oder Wochen aus; das Ausgelaufene bildet einen flachen Kuchen. Obwohl dieser in dauerndem Weiterfließen ist, kann man darauf herumtreten, ohne merkliche Eindrücke hervorzurufen. Eindrücke zeigen sich aber bei längerem Stehenbleiben. Bei Bearbeitung mit einem Hammer splittert die Masse wie Glas.

In der Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten interessieren wir uns nur für Ruhezustände bzw. hinreichend langsame Bewegungen, hier dürfen wir daher den Widerstand gegen Formänderung genau gleich Null setzen, wir erhalten geradezu eine Definition des flüssigen Zustandes, wenn wir sagen: In einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ist jeder Widerstand gegen Formänderung gleich Null.

Nach der Auffassung der kinetischen Theorie der Materie sind die kleinsten Teile aller Körper (die Atome) in beständiger Unruhe; die kinetische Energie dieser Bewegung ist das, was sich als Wärme äußert. Von diesem Standpunkt aus unterscheiden sich die Flüssigkeiten von den festen Körpern dadurch, daß die Teilchen nicht wie bei diesen feste Plätze haben, um die sie schwingen, sondern sich dauernd ungeordnet durcheinander bewegen, oder wenigstens sehr häufig ihre Plätze wechseln.

---

[1]) Bearbeitet von Prof. Dr. L. Prandtl in Göttingen.

Das allmähliche Erweichen von amorphen Körpern bei steigender Temperatur kann man sich so vorstellen: Erhitzt man einen festen Körper, d. h. vermehrt man die Energie der Molekelbewegung, so treten zunächst einige Platzwechsel ein, wo gerade zufällig besonders große Schwingungsamplituden auftreten; bei weiterer Erhitzung werden die Platzwechsel immer häufiger, schließlich allgemein. Durch solches freiwilliges Platzwechseln ist aber die Möglichkeit der Formänderung ohne Widerstand gegeben. Bei kristallinischen festen Körpern, in denen bekanntlich die Teilchen völlig regelmäßig angeordnet sind, sind die Verhältnisse etwas anders; hier gibt es bei genügend hoher Temperatur Platzwechsel ohne Änderung der Gesamtanordnung, d. h. ohne Verschwinden des festen Zustandes, und der Übergang vom festen zum flüssigen Zustand pflegt unstetig durch Schmelzen, d. h. durch Einstürzen des regelmäßigen Gebäudes zu erfolgen. Doch gehören diese Dinge nicht mehr hierher.

Eine weitere Eigenschaft der Flüssigkeiten ist ihr großer Widerstand gegen Volumenveränderung. Es ist auf keine Weise möglich, 1 Liter Wasser in ein Gefäß von 1/2 Liter Inhalt hineinzupressen, und wenn man dieselbe Menge in ein Gefäß von 2 Liter Inhalt bringt, so füllt es dieses nur zur Hälfte aus, auch wenn man die Luft darüber wegpumpt. Dabei ist das Wasser nicht etwa ganz unzusammendrückbar, bei hohen Drucken kann es um immerhin merkbare Beträge zusammengedrückt werden [5 v. H. Volumenverminderung bei rund 1000 Atmosphären Druck][1]). Bei anderen Flüssigkeiten liegen die Verhältnisse ähnlich. Über Kompressibilität vgl. Bd. III, 1, S. 246–250.

§ 2. Lehre vom Spannungszustand. Wir wollen uns nun mit dem Spannungszustand in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit näher beschäftigen. Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß man die allgemeinen Sätze über das Gleichgewicht der Kräfte an einem Körper auch auf flüssige Körper anwenden darf. Man findet gelegentlich, um dies zu rechtfertigen, ein besonderes „Erstarrungsprinzip" herangezogen, dem folgende Überlegung zugrunde liegt: „Das Gleichgewicht irgend eines beweglichen Systems kann dadurch, daß nachträglich irgendwelche beweglichen Teile festgemacht werden, nicht gestört werden; also kann man auch in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit irgend einen Teilbezirk erstarrt denken, ohne das Gleichgewicht dadurch zu stören, und man kann auf den erstarrten Teil die Sätze über das Gleichgewicht starrer Körper anwenden"[2]). Der Umweg über den starren Körper ist aber nicht unbedingt notwendig. Die Gleichgewichtssätze der allgemeinen Mechanik werden zwar vielfach unter Zuhilfenahme des „starren Körpers" abgeleitet. Ein „ruhendes Massensystem" mit inneren Bewegungsmöglichkeiten, die aber des Gleichgewichts wegen nicht ausgenutzt werden, läßt jedoch die Anwendung dieser Sätze ebenso zu. Solange es sich um den Fall wirklicher Ruhe handelt, sind beide Betrachtungsweisen ganz gleichberechtigt; handelt es sich aber um einen Fall von Bewegung, so kommt man mit dem Erstarrungsprinzip leicht in Schwierigkeiten, da hier nichts Erstarrtes vorhanden ist. Wegen der späteren Anwendung auf die Dynamik mögen die wesentlichen Überlegungen dieser Betrachtungsweise, die auch in der Festigkeitslehre üblich ist, hier kurz aufgeführt werden:

---

[1]) Über Druckmaße vgl. § 3.

[2]) Es ist hier natürlich nicht an ein physisches Erstarren gedacht, das mit Volumenänderung und mit Auskristallisieren usw. verbunden ist, sondern an ein ideelles Erstarren ohne jede Verschiebung und Volumenänderung.

Man stellt zunächst fest, daß irgendwelche Kräfte immer Wechselwirkungen zwischen Massen sind. Zieht z. B. die Masse m_1 eine andere Masse m_2 mit einer Kraft P zu sich hin, so findet sich die Kraft P gleichzeitig auch an m_1 als Wirkung von m_2, und zwar als eine Anziehung nach m_2 hin. Beide Kräfte sind also entgegengesetzt gerichtet (Newtons Prinzip von Aktion und Reaktion). An einem System von Massen, das irgendwie gegen andere Massen abgegrenzt werden möge, unterscheidet man zweierlei Arten von Kräften, innere Kräfte, die zwischen zwei zum System gehörigen Massen wirken und daher immer paarweise entgegengesetzt vorkommen, und äußere Kräfte, die zwischen je einer Systemmasse und einer außerhalb befindlichen Masse wirken, und die daher am System nur einmal vorkommen. Summiert man alle an den Massen des Systems vorkommenden Kräfte (vektoriell oder komponentenweise), so heben sich die inneren Kräfte immer paarweise aus der Summe heraus, und nur die äußeren Kräfte bleiben stehen.

Zum Gleichgewicht des Systems ist erforderlich, daß an jeder einzelnen Masse die Summe der an ihr angreifenden Kräfte verschwindet (Vektorsumme oder drei Komponentensummen!). Summiert man diese Summen über alle Massen des Systems, so verbleibt nach obigem nur die Summe aller äußeren Kräfte, und da jede Einzelsumme des Gleichgewichts wegen verschwindet, verschwindet somit auch die Summe der äußeren Kräfte an dem System. Dieser Satz, der über das Massensystem weiter nichts voraussetzt, als daß es im Gleichgewicht ist, erweist sich für die verschiedensten Anwendungen als höchst wertvoll. Rechnet man nach der Koordinatenmethode, dann enthält er in sich die drei Aussagen

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

wo X, Y, Z Komponenten der äußeren Kräfte nach der x-, y- und z-Richtung sind.

Zu dem vorstehenden Satz gibt es einen völlig analogen für die Drehmomente der äußeren Kräfte. Auch diese müssen im Gleichgewicht verschwinden.

Sowohl bei elastisch festen wie bei flüssigen Körpern interessiert man sich für den Spannungszustand im Innern des Körpers. Dieser besteht offenbar aus den inneren Kräften, die zwischen den kleinsten Teilen des Körpers übertragen werden. Im allgemeinen begnügt man sich dabei mit Angaben über den mittleren Zustand in einem Bereich, der schon eine sehr große Anzahl von Teilchen enthält; denn das Bild der Einzelkräfte zwischen den noch dazu in lebhafter Wärmebewegung befindlichen Teilchen würde viel zu verwirrend sein. Wie aber soll man die inneren Kräfte zu fassen bekommen, da unsere Sätze nur Aussagen über äußere Kräfte liefern? Die Antwort ist: Man muß sie zu äußeren machen! Das ist möglich, und zwar so: Denken wir uns einen Körper durchgeschnitten und erklären das eine der beiden Stücke (I in Fig. 773) als unser Massensystem, dann sind alle Kräfte, die von einem Teilchen des Gebietes II auf eines des Gebietes I übertragen werden, und die bisher innere Kräfte waren, für uns zu äußeren geworden. Stand der ganze Körper unter einem äußeren Zwangszustand (in

Fig. 773 ist dieser durch zwei Pfeile angedeutet), so bestehen auch innere Spannungen, und wir werden dann, wenn wir in Gedanken den Schnitt ausführen, finden, daß durch die Schnittfläche hindurch von den Teilchen rechts vom Schnitt auf diejenigen links vom Schnitt Kräfte übertragen werden.

Fig. 773. Fig. 774.

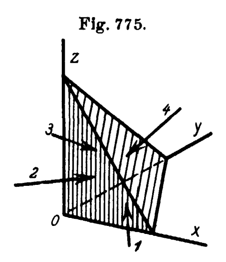


Summieren wir alle diese Kräfte, d. h. setzen wir sie zu einer resultierenden Kraft zusammen, so hält diese den an dem Teil I angreifenden Kräften gerade das Gleichgewicht (vgl. Fig. 774). Dies liefert eine eindeutige Aussage über die Resultierende der Kräfte im Schnitt[1]).

Unter Spannungen versteht man nun solche Kräfte in einem „Schnitt", bezogen auf die Flächeneinheit. Man erhält in obigem Beispiel offenbar die mittlere Spannung in dem Schnitt, wenn man die aus dem Gleichgewicht folgende Kraft im Schnitt durch den Flächeninhalt des Schnittes dividiert. Wir ersehen hieraus auch, daß die „Spannung auf einer Fläche" ebenso wie die Kraft ein Vektor ist.

Unser Prinzip, durch einen gedachten Schnitt aus inneren Kräften äußere zu machen, im folgenden kurz „Schnittprinzip" genannt, läßt erweiterte Anwendungen zu, indem wir durch eine Anzahl von Schnittflächen aus dem Innern des Körpers, dessen Spannungszustand wir untersuchen wollen, ein kleines Körperchen (Parallelepiped, Prisma, Tetraeder usw.) herauspräparieren und sein Gleichgewicht untersuchen. Im einfachsten Falle sind dann alle Kräfte, die an dem Körperchen ins Gleichgewicht zu setzen sind, Spannungskräfte. Aus dem Gleichgewicht solcher Körperchen lassen sich verschiedene wichtige Sätze über Spannungszustände herleiten, von denen einer hier als Beispiel mit Beweis angeführt werden mag: „Sind die Spannungsvektoren für drei Schnittrichtungen gegeben, die miteinander eine körperliche Ecke bilden, so ist damit auch für alle übrigen Schnittrichtungen der Spannungsvektor bekannt." Beweis: Wir schneiden die körperliche Ecke mit der vierten Fläche, deren Spannung ermittelt werden soll, so, daß ein Tetraeder wie in Fig. 775 entsteht. Die Kräfte 1, 2 und 3 werden erhalten, indem man die gegebenen Spannungsvektoren mit den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke multipliziert. Es gibt nur eine Richtung und Größe der Kraft 4, die den Kräften 1 + 2 + 3 das Gleichgewicht hält; diese Kraft, dividiert durch die zugehörige Dreiecksfläche, ist die gesuchte Spannung. Für

Fig. 775.



[1]) Man hätte die ganze Überlegung natürlich ebenso gut an die Zustände am Teil II anknüpfen können und hätte dabei eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft erhalten (eben die Kraft, die von dem Teil I auf den Teil II ausgeübt wird).

die Berechnung wählt man zu den Flächen 1, 2 und 3 zweckmäßig die Koordinatenebenen, vgl. Fig. 775.

Die weiteren Einzelheiten der Lehre von den Spannungzuständen gehören in die Festigkeitslehre. Hier sei nur noch erwähnt, daß der „Spannungszustand“, der die Gesamtheit der Spannungsvektoren zu allen möglichen Schnittrichtungen durch einen Punkt darstellt, mit einem Ellipsoid in Verbindung gebracht werden kann; er ist demnach ein „Tensor“. Nach dem vorerwähnten Satz ist der Spannungszustand in einem Punkte (und auch sein Ellipsoid) gegeben, wenn die Spannungsvektoren zu 3 eine körperliche Ecke bildenden Schnittflächen gegeben sind. Entsprechend den drei Hauptachsen die jedes Ellipsoid besitzt, sind bei jedem Spannungszustand drei aufeinander, senkrechte Schnittflächen angebbar, auf denen der Spannungsvektor senkrecht steht. Die drei auf diese Weise ausgezeichneten Spannungen heißen Hauptspannungen, die zugehörigen Richtungen Hauptrichtungen.

§ 3. Der Flüssigkeitsdruck. Der Spannungszustand in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ist besonders einfach. Ein Widerstand gegen Formänderung, also gegen Verschieben der Teile aneinander, ist etwas mit einer Reibung Verwandtes. Wenn bei zwei sich berührenden festen Körpern Reibungslosigkeit herrschen soll, so muß die Druckkraft an der Berührungsfläche der beiden Körper jederzeit senkrecht auf dieser stehen (so daß also bei einer Gleitbewegung längs der Berührungsfläche keine Arbeit geleistet wird). Ganz entsprechend drückt sich die Abwesenheit eines Widerstandes gegen Formänderung dadurch aus, daß im Innern der Flüssigkeit die Spannung, die man hier Druck zu nennen pflegt, überall senkrecht auf der Schnittfläche steht, auf der sie wirkt. Man kann geradezu das Senkrechtstehen des Druckes auf der zugehörigen Fläche als eine Definition des flüssigen Zustandes ansehen; sie ist der in § 1 angegebenen Definition völlig gleichwertig.

Aus dieser Eigenschaft des Flüssigkeitsdruckes läßt sich sofort eine andere durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung herleiten. Wir denken uns dazu aus der Flüssigkeit ein kleines dreiseitiges Prisma herausgeschnitten; die Stirnflächen des Prismas mögen dabei senkrecht zu den Prismakanten stehen (wir können uns natürlich das Prisma auch innerhalb der Flüssigkeit erstarrt denken und das Gleichgewicht der Kräfte studieren, die von der übrigen Flüssigkeit auf das Prisma ausgeübt werden). Die Druckkräfte auf den Stirnseiten sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet und halten sich daher von selbst Gleichgewicht, so daß wir sie nicht weiter zu beachten brauchen. Die Kräfte auf den Seitenflächen sind, da sie senkrecht auf ihren Flächen stehen, in einer zu den Prismakanten senkrechten Ebene enthalten. Fig. 776 zeigt eine Stirnansicht des Prismas mit den Kräften, Fig. 777 das Dreieck, das die Kräfte bilden müssen, damit Gleichgewicht vorhanden ist. Da die Dreieckseiten von Fig. 777 je auf denen von Fig. 776 senkrecht stehen, haben beide Dreiecke dieselben Winkel und sind daher einander ähnlich. Hieraus folgt, daß die drei Druckkräfte sich verhalten wie die zugehörigen Prismenseiten.

Wenn wir nun die auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke ermitteln wollen, so müssen die Druckkräfte durch die jeweilige Prismenfläche dividiert werden. Die Prismenflächen haben alle dieselbe Höhe und verhalten sich daher wie ihre Grundlinien, die Prismenseiten, also ebenso wie die Kräfte. Hieraus folgt, daß der Druck pro Flächeneinheit, den wir schlechthin Druck nennen, auf allen drei Prismenflächen gleich groß ist. Da das Prisma im übrigen ganz beliebig gewählt war, schließen wir, daß der Druck an ein und derselben Stelle der Flüssigkeit in allen Richtungen (noch genauer gesagt: für alle möglichen Lagen einer gedachten Schnittfläche) gleich groß ist. Das Spannungsellipsoid ist in diesem Falle eine Kugel. Für einen Spannungszustand dieser Art, den man auch hydrostatischen Spannungszustand nennt, genügt also eine einzige Zahlenangabe, die des Druckes p. Nach dem Früheren bedeutet diese Zahl offenbar die Kraft, die auf einer Flächeneinheit übertragen wird. Je nach der gewählten Krafteinheit und Flächeneinheit sind sehr verschiedene Druckmaße möglich. Technisch ist sehr gebräuchlich das kg/cm²; aber auch das kg/m² wird viel verwendet. kg bedeutet dabei Kilogramm-Gewicht, vgl. Kap. I, § 51. Über einige andere Druckmaße vgl. § 15 und 16.

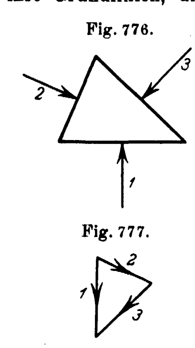


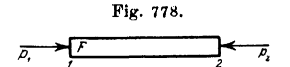
Fig. 776.

Fig. 777.

§ 4. Druckverteilung in einer Flüssigkeit bei Nichtberücksichtigung der Schwere.

Jede Flüssigkeit ist schwer. In vielen Fällen, besonders wenn es sich um hohe Drucke handelt, ist es aber unnötig, auf die Wirkungen der Schwere Rücksicht zu nehmen; die Überlegungen werden dadurch sehr vereinfacht. Wir knüpfen wieder an das Kräftegleichgewicht an einem Prisma an, das wir jetzt aber von länglicher Form annehmen wollen, und betrachten das Gleichgewicht gegen Verschieben längs der Prismenachse. Wir nehmen

Fig. 778.



zunächst eine Veränderlichkeit des Druckes von Ort zu Ort an; der Querschnitt des Prismas, gleich dem Inhalt der auch hier senkrecht zur Prismenachse angenommenen Stirnfläche, sei F. Wir nehmen diesen Querschnitt so klein, daß die Veränderlichkeit des Druckes innerhalb desselben unbeachtet bleiben darf. Wenn an dem einen Prismenende der Druck p_1, an dem anderen p_2 herrscht, so greifen hier die Kräfte Fp_1 und Fp_2 in entgegengesetzter Richtung parallel der Prismenachse an. Alle Druckkräfte auf den Seitenflächen des Prismas stehen aber nach unserer Grundannahme senkrecht auf diesen Flächen und damit auch senkrecht auf der Prismenachse und tragen daher zu den Kraftkomponenten parallel der Prismenachse nichts bei, gleichviel wie der Druck auf ihnen verteilt ist. Das Gleichgewicht verlangt also,

daß die einzigen Kräfte in der betrachteten Richtung, Fp_1 und Fp_2, untereinander Gleichgewicht halten, also muß sein

$$Fp_1 = Fp_2 \quad \text{oder} \quad p_1 = p_2,$$

d. h., da die Lage des Prismas ja ganz willkürlich war: Bei Abwesenheit der Schwere (und anderer etwaiger eingeprägter Kräfte) ist der Druck an allen Stellen der Flüssigkeit gleich groß.

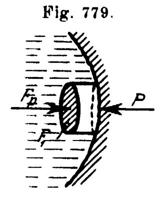
Erfüllt die Flüssigkeit etwa enge und gewundene Räume, so daß es nicht möglich ist, zwischen zwei beliebigen Punkten ein Prisma in die Flüssigkeit zu legen, so steht es immer frei, den Schluß beliebig oft zu wiederholen, von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2, von diesem in anderer Richtung zu einem Punkt 3 usw., bis der verlangte Endpunkt n erreicht wird. Aus $p_1 = p_2$, $p_2 = p_3$ usw. folgt dann auch $p_1 = p_n$. Eine andere noch elegantere Überlegung ist die folgende: Man denke sich ein geräumiges Gefäß, in dem das wirklich vorliegende Gefäß Platz hat, vollkommen mit Flüssigkeit erfüllt, und hinterher, nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, so viel von der Flüssigkeit erstarrt, daß nur der wirklich vorhandene Flüssigkeitsraum übrigbleibt. Nach unserem Erstarrungsprinzip von § 2 wird hierdurch an dem Kräftezustand nichts geändert; wir haben also auch in beliebig engen Räumen im Gleichgewicht überall gleichen Druck.

Anmerkung: Bei äußerst engen Räumen kann nach einer Änderung des Flüssigkeitsdruckes, etwa durch äußere Belastung, sehr beträchtliche Zeit vergehen, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Bei plastischem Töpferton z. B. (bestehend aus sehr feinen festen Teilchen, deren Zwischenräume mit Wasser angefüllt sind) kann diese Zeit nach Tagen oder, wenn es sich um ganze Tonschichten im Erdboden handelt, nach Jahren zählen[1]); während dieser Zeit strömt das Wasser von den Stellen höheren zu denen niedrigeren Druckes, vgl. Kap. XII, § 8.

Wir fassen also zusammen: Der Druck in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit steht überall senkrecht auf der Fläche, auf der er wirkt, und ist — bei Abwesenheit von Schwerkräften und anderen Massenkräften — allerorts und in jeder Richtung gleich groß.

Was von dem Druck im Innern der Flüssigkeit gilt, gilt auch für den Druck auf die Wände des Gefäßes, das die Flüssigkeit einschließt. Man kann, um sich das klarzumachen, dicht vor der Wand — oder auch in einigem Abstand davor — einen ebenen Schnitt durch die Flüssigkeit führen und diesen durch eine Zylinderfläche ergänzen, die senkrecht zu dem Schnitt steht, vgl. Fig. 779. Das Gleichgewicht des auf diese Weise eingeschlossenen Wasserkörpers liefert die Kraft P, genauer die Kraftkomponente, die das Wandstück in der Richtung senkrecht zur Schnittfläche erfährt, und zwar ist diese Kraft gleich Fp[2]). Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß man sofort erkennt, daß Unebenheiten des Wandstücks, selbst grobe, an dem Ergebnis nichts ändern.

Fig. 779.



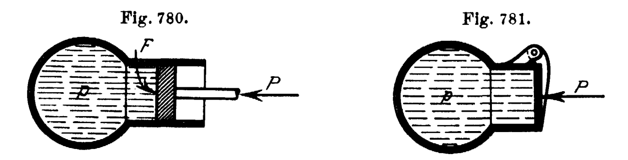
Macht man das Wandstück beweglich, d. h. ordnet man einen in einem Zylinder verschieblichen Kolben (Fig. 780) oder auch nur eine dicht schließende Platte (Klappe) über einer Öffnung (Fig. 781) an, so kann die Kraft P von außen wahrgenommen werden, da man, um den Kolben oder die Klappe an

[1]) Vgl. etwa Terzaghi, Erdbaumechanik. Wien 1924.

[2]) In Fig. 779 ist die Kraft P in der Weise angegeben, wie sie von der Wand auf den betrachteten Flüssigkeitskörper ausgeübt wird. Die Druckkraft der Flüssigkeit auf die Wand hat die entgegengesetzte Richtung.

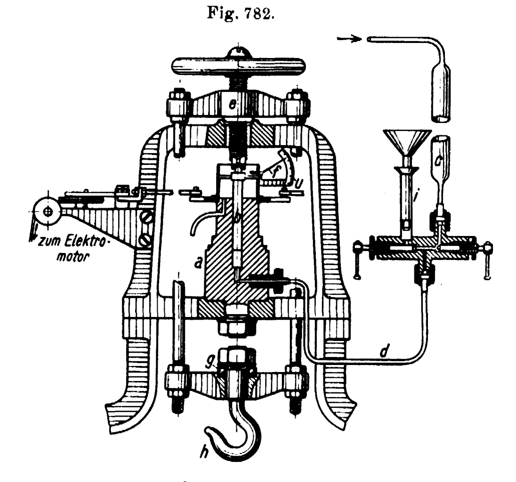
ihrer Stelle zu halten, von außen eine Kraft gleich P darauf ausüben muß. (In Fig. 780 und 781 ist die Kraft eingezeichnet.) Durch Messung der Kraft P am Kolben kann auch der Druck p ermittelt werden, denn er ist gleich $P:F$. Hierauf beruht eines der genauesten Meßgeräte für hohe Drucke, die Hol-

Fig. 780. Fig. 781.



bornsche Druckwaage, Fig. 782. Sie enthält in einem senkrecht stehenden, sehr genau gearbeiteten Zylinder einen mit ganz geringem Spiel eingepaßten Kolben, der durch Gewichte belastet ist. Man bringt unter den Kolben ein zähflüssiges Öl, das während des Versuchs in geringen Mengen austritt. Wesent-

Fig. 782.



Holbornsche Druckwaage.
a = Druckzylinder, b = Stempel, c = Verbindungsleitung mit der Stelle, deren Druck gemessen werden soll, h = Haken zum Anhängen der Belastungsgewichte, i = Nachfüllvorrichtung.

lich für eine genaue Messung ist, daß Kolben und Zylinder sich nirgends berühren, was dadurch erreicht wird, daß der Kolben fortwährend um seine Achse gedreht wird, wodurch das Öl in dem Zwischenraum zwischen Zylinder und Kolben gleichmäßig verteilt wird und so eine metallische Berührung verhindert. Die Reibung des Kolbens ist dann äußerst gering.

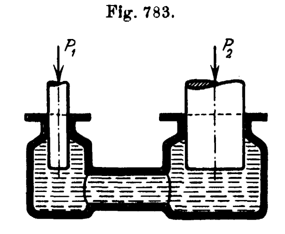
Die Klappe von Fig. 781 kann als Urbild aller Ventile gelten; sie öffnet sich, entgegen der in Richtung des Schließens wirkenden Kraft P, wenn der Flüssigkeitsdruck den Wert $P:F$ überschreitet, und schließt sich dicht, wenn

der Druck kleiner als dieser Wert wird. Zur Druckmessung eignet sie sich weniger; immerhin kann sie auch dazu benutzt werden, wenn man die Belastung P beobachtet, bei der gerade etwas Flüssigkeit auszufließen beginnt.

Ein Körper, der von einer der Schwere nicht unterworfenen, aber unter beliebigem Druck stehenden Flüssigkeit allseitig umgeben ist, erfährt von dieser zwar allseitigen Druck, aber keine resultierende Kraft. Dies ist vermöge des Erstarrungsprinzips leicht einzusehen, denn denkt man zunächst den ganzen Raum mit Flüssigkeit erfüllt, so ist jeder Teilbezirk im Gleichgewicht, und es wird daran nichts geändert, wenn hinterher ein Teilbezirk erstarrt gedacht wird.

§ 5. Hydraulische Presse, Druckpumpe, Arbeitsleistung einer Druckflüssigkeit. Befinden sich in einem mit Flüssigkeit gefüllten Raume zwei Kolben vom Querschnitt F_1 und F_2 (Fig. 783), so tritt, reibungslose Beweglichkeit der beiden Kolben vorausgesetzt, nur dann Gleichgewicht ein, wenn die von außen auf die Kolben wirkenden Kräfte P_1 und P_2 in demselben Verhältnis zueinander stehen wie die Querschnitte F_1 und F_2. Ist p der Flüssigkeitsdruck, so ist $P_1 = F_1 p$ und $P_2 = F_2 p$, also $P_1 : P_2 = F_1 : F_2$. Macht man den einen Querschnitt möglichst groß und den anderen klein, so kann also mit diesem Mechanismus einer großen Kraft durch eine kleine das Gleichgewicht gehalten werden. Auf diesem Grundgedanken beruht die hydraulische Presse, mit der durch Bewegung des kleinen Kolbens sehr große Kräfte am großen Kolben hervorgebracht werden können. Zur Verstärkung der Wirkung pflegt der kleine Kolben mittels eines langen Hebels bewegt zu werden. Eine Ausführungsform der hydraulischen Presse ist in Fig. 784 dargestellt. Man trennt meist die Einrichtung in zwei nur durch ein Rohr verbundene Apparate, die eigentliche Presse und die Pumpe. Die Presse links zeigt einen starkwandigen Zylinder c, in dem sich der Kolben p bewegt. Die Abdichtung wird dabei von einer selbstdichtenden Ledermanschette besorgt, die in der Figur zu erkennen ist. Der zu pressende Körper wird zwischen die auf dem Kolben befindliche Druckplatte n und die mit dem Zylinder fest verbundene Gegenplatte e gestellt. Durch Einpressen von Wasser in den Zylinder wird der Kolben mit der Druckplatte angehoben und daher der Raum zwischen e und n verkürzt. s ist der Pumpenkolben, der durch einen in der Figur nicht gezeichneten Hebel heruntergedrückt wird. Damit der Preßvorgang nach Zurücklegung eines Pumpenhubs weiter fortgesetzt werden kann, ist die Pumpe in der üblichen Weise mit einem Saugventil (unter dem Kolben s) und einem Druckventil (d) ausgerüstet.

Fig. 783.



Nimmt man die Kraft, mit der der Arbeiter den Hebel niederdrückt, zu 20 kg an, und ist das Hebelverhältnis 1 : 8, so wirkt auf den Pumpenkolben eine Kraft von 160 kg. Hat der Kolben 2 cm² Querschnitt, was ungefähr 16 mm Durchmesser entspricht, so ist der Wasserdruck 80 kg/cm². Angenommen, der Kolben der Presse hätte genau den 20fachen Durchmesser

wie der der Pumpe (also rund 320 mm), so würde der Querschnitt $20 \times 20 = 400$ mal so groß sein wie der des Pumpenkolbens, also $F_2 = 400\,F_1 = 800\ \mathrm{cm}^2$. Die von der Presse entwickelte Kraft wird daher $800\ \mathrm{cm}^2 \times 80\ \mathrm{kg/cm}^2 = 64\,000\ \mathrm{kg}$. (Die Berechnung wäre unter Umgehung des

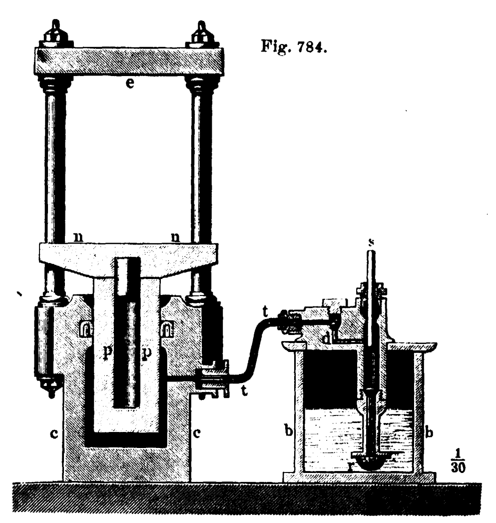


Fig. 784.

Hydraulische Presse.
s = Pumpenkolben, p = Kolben der Presse.

Wasserdrucks so schneller gegangen: $P_2 = F_2/F_1 \cdot P_1 = 400 \cdot 160\ \mathrm{kg} = 64\,000\ \mathrm{kg}$.) In Wirklichkeit ist die Kraft durch die vorhandenen Reibungen in den Hebelgelenken und in den Führungen und Abdichtungen der beiden Kolben etwas kleiner.

Wir wollen uns nun noch fragen, welche Arbeit in einer Pumpe oder hydraulischen Presse umgesetzt wird. Ist s der Weg des Kolbens und ist die Kraft während des ganzen Weges s dauernd gleich P gewesen, so ist die geleistete Arbeit $A = Ps$; es ist aber $P = pF$, also wird auch $A = pFs$. Das Produkt Fs stellt aber das vom Kolben zurückgelegte Volumen dar, das mit V bezeichnet werden möge. Hiermit erhalten wir also

$$A = pV.$$

Bei der hydraulischen Presse erscheint die Flüssigkeitsmenge, die vom Pumpenkolben verdrängt wird, unter dem Preßkolben vollständig wieder, es ist also $V_1 = V_2$, woraus ersichtlich ist, daß, von Reibungen und Störungsverlusten abgesehen, auch die beiden Arbeiten einander gleich sind. Die hydraulische Presse gehört also, wie der Hebel und das Rad an der Welle, zu den idealen Mechanismen, sobald man von den Verlusten absieht. Man kann deshalb auch das Prinzip der virtuellen Verrückungen auf sie anwenden. Wegen $V_1 = F_1\,s_1$

und $V_2 = F_2 s_2$ liefert die Beziehung $V_1 = V_2$ die Proportion

$$s_1 : s_2 = F_2 : F_1;$$

es ist aber nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen $P_2 s_2 = P_1 s_1$ oder $P_2 : P_1 = s_1 : s_2$, so daß sich ergibt

$$P_2 : P_1 = F_2 : F_1,$$

also das frühere Resultat.

Ist die Kraft während der Zurücklegung des Weges s nicht konstant, so ist die Arbeit für ein Wegelement ds $dA = Pds = pFds = pdV$, wo dV das vom Kolben zurückgelegte Volumenelement bedeutet. Die ganze Arbeit ist dann

$$A = \int Pds = \int pdV.$$

Bei einem hin und her gehenden Kolben kann die Arbeit eines Hinundhergangs erhalten werden, wenn das obige Integral über den geschlossenen Weg in der pV-Ebene genommen wird. In dem bei Wasserpumpen häufig vorkommenden Fall, daß der Druck während des Hingangs und Rückgangs des Kolbens je konstant ist (p_1 beim Hingang und p_2 beim Rückgang), ist die Arbeit eines Doppelhubes

$$A = (p_1 - p_2)\,Fs = (p_1 - p_2)\,V.$$

§ 6. Eigenschaften der Gase. Die Gase unterscheiden sich von den Flüssigkeiten dadurch, daß sie sich unter Anwendung entsprechender Drucke auf sehr kleinem Raum zusammendrücken lassen, und andererseits, wenn ihnen mehr Raum als im gewöhnlichen Zustand dargeboten wird, diesen immer gleichförmig ausfüllen, wobei ihr Druck entsprechend unter den Druck der umgebenden Luft sinkt. Im übrigen ist ihr Verhalten dem der Flüssigkeiten sehr ähnlich, da auch bei ihnen im Ruhezustand jeder Widerstand gegen Formänderung verschwindet, und sich im übrigen bei inneren Verschiebungen auch hier eine gewisse Zähigkeit geltend macht. Solange also keine Volumenänderungen vorkommen, unterscheidet sich das Verhalten eines Gases qualitativ in nichts von dem einer Flüssigkeit, die denselben Raum, ohne eine freie Oberfläche zu haben, ausfüllt.

Das technisch wichtigste Gas ist die atmosphärische Luft. Die anderen Gase zeigen im wesentlichen dasselbe Verhalten. Wie später noch ausführlicher besprochen werden wird, steht die atmosphärische Luft am Erdboden unter einem in der Hauptsache konstanten Druck, der rund 1 kg/cm² beträgt. Der Druck von 1 kg/cm² heißt deshalb eine (technische) Atmosphäre. (Die davon etwas verschiedene „physikalische Atmosphäre" entspricht dem mittleren Luftdruck in Meereshöhe und ist zu 760 mm Quecksilber = 1,0333 kg/cm² festgesetzt worden. In höheren Lagen ist der Luftdruck geringer, vgl. § 9.)

Zur Messung des Luftdrucks (Gasdrucks) dienen verschiedene Geräte, die, soweit sie Druckunterschiede anzeigen, Manometer, soweit sie absolute Drucke des sie umgebenden Gases anzeigen, Barometer heißen. Zu beiden Arten von Geräten lassen sich Flüssigkeitssäulen verwenden, vgl. § 14 und 15; aber auch solche, bei denen der zu messende Druck auf eine Feder wirkt, werden viel angewandt. Um den absoluten Druck der Luft zu messen, kann man z. B. eine metallene Dose mit einem nachgiebigen Deckel, die luftleer gepumpt ist, so mit einer starken Feder verbinden, daß diese durch ihre Spannung den Deckel gegen das Eindrücken durch den äußeren Luftdruck

stützt. Wird dieses Gerät, das noch ein Zeigerwerk zur stark vergrößerten Wiedergabe der Deckelbewegungen enthält, an einen Ort anderen Luftdrucks gebracht, oder ändert sich der Luftdruck von selbst, so ist durch den Zeiger die Druckänderung erkennbar (sogenanntes Aneroidbarometer, vgl. Kap. XIV, Abschn. B, § 23). Über die Barometer für genaue Druckmessungen ist in § 16 bis 21 desselben Kapitels im Zusammenhang berichtet.

Das Gesetz, nach dem sich bei gegebenen Änderungen des Volumens der Druck des Gases ändert, ist zuerst von R. Boyle 1662 und dann noch einmal unabhängig von Mariotte 1679 entdeckt worden. Man nennt es daher „Boyle-Mariottesches Gesetz". Nach ihm verhalten sich (bei ein und derselben Temperatur) die Drucke umgekehrt wie die Volumina. Wird also eine Gasmenge auf die Hälfte ihres Volumens zusammengepreßt, so verdoppelt sich ihr Druck, und umgekehrt, wird ihr das doppelte Volumen dargeboten, so sinkt der Druck auf die Hälfte. Man kann dieses Gesetz durch die Formel

$$pV = p_1 V_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ausdrücken, in der p_1 den anfänglichen Druck, V_1 das anfängliche Volumen und p und V zwei beliebige, aber zusammengehörige Werte dieser Größen sind.

Das Volumen eines Gases ist auch mit der Temperatur sehr stark veränderlich. Gay-Lussac fand 1816, daß die Ausdehnung für 1° C, falls der Druck konstant gehalten wird, immer 1/273° des Volumens bei 0° C ist, und zwar für alle Gase und Temperaturen — wenn man von Feinheiten absieht, die im II. Band (Wärme) behandelt werden. Man kann dieses Verhalten durch die Formel ausdrücken:

$$V = V_0 (1 + \alpha \vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo V_0 das Volumen bei 0° C, ϑ die Temperatur nach Celsius und $\alpha = \frac{1}{273^0}$ der „Ausdehnungskoeffizient" ist.

Da die Formel (2) sich als unabhängig von dem jeweiligen Druck erwiesen hat, sofern dieser nur bei den in der Formel verglichenen Zuständen jeweils konstant war, läßt sich die Formel (2) mit der Formel (1) verbinden. Man erhält damit die für alle Drucke und Temperaturen gleich verwendbare Formel

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha \vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

In dieser bedeutet p_0 einen im übrigen beliebigen, aber festgehaltenen Ausgangsdruck und V_0 das Volumen beim Ausgangsdruck p_0 und bei 0° C. Für die Gl. (3) findet man vielfach den Namen Mariotte-Gay-Lussacsche Gleichung. Man bezeichnet sie auch als „Zustandsgleichung", da sie die drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur miteinander verknüpft. Man nennt sie speziell „Zustandsgleichung der idealen Gase", weil die wirklichen Gase gewisse Abweichungen von ihr zeigen. Diese Abweichungen sind bei Gasen gewöhnlicher Dichte ziemlich unbedeutend, machen sich aber sehr bemerklich, wenn die Gase stark verdichtet werden, und besonders, wenn die Temperatur so stark erniedrigt wird, daß die Verflüssigung des Gases einsetzt.

Diese Abweichungen werden in dem Abschnitt über die Zustandsgleichung in Band III, 1, Kap. VI ausführlich behandelt. Hier mag nur eine der Abweichungen kurz besprochen werden. Gl. (1) würde ergeben, daß bei ungeheuer großen Drucken das Gasvolumen ungeheuer klein würde, und man kann nach der Formel ausrechnen, bei welchem Druck die Dichtigkeit des Wassers, bei welchem die des Goldes usw. erreicht würde. Dies ist aber unrichtig. Es gibt ein Grenzvolumen, über das hinaus das Gas durch keinen noch so hohen Druck zusammengedrückt werden kann, bei dem also die Teilchen die dichtest mögliche Lagerung haben. Man kann diesem Umstand durch eine Abänderung von Gl. (3) Rechnung tragen, indem man schreibt:

$$p(V - V') = p_0(V_0 - V')\,(1 + a\vartheta).$$

V' bedeutet dabei das kleine Grenzvolumen. V ergibt sich offenbar für jedes endliche p noch etwas größer als V'; für Volumina V, die groß gegen V' sind, unterscheiden sich die Ergebnisse dieser Gleichung aber praktisch nicht von denen der Gl. (1).

Bei der Verdichtung eines Gases wird Wärme erzeugt; das Boyle-Mariottesche Gesetz, das nur für gleichbleibende Temperatur gültig ist, kann also nur dann wirklich beobachtet werden, wenn dem Gas während oder wenigstens nach der Verdichtung (Kompression) genügend Zeit gelassen wird, um die erzeugte Wärme abzugeben und wieder die Temperatur der Umgebung anzunehmen. Das gleiche gilt für die bei der Ausdehnung (Expansion) auftretende Abkühlung. Läßt man dem Gase keine Zeit, seine Temperaturunterschiede auszugleichen, so muß offenbar bei der Verdichtung der Druck in stärkerem Verhältnis anwachsen, als das Volumen abnimmt. Die Thermodynamik lehrt, daß in dem Falle, wo gar kein Austausch der erzeugten Wärme stattfindet, also bei extrem rascher Verdichtung und Verdünnung, an Stelle von Gl. (1) die Formel

$$p\,V^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

tritt, worin $\varkappa = c_p/c_v$, d. h. gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen ist[1]). Für trockene atmosphärische Luft ist $\varkappa = 1{,}405$. Eine Kompression oder Expansion nach dem Gesetz von Gl. (4) nennt man im Gegensatz zu der nach Gl. (1), die man isothermisch nennt, eine adiabatische Kompression oder Expansion[2]).

Anmerkung: Das in diesem Paragraphen geschilderte Verhalten eines Gases findet eine sehr gute Erklärung durch die Annahme, daß die kleinsten Teile des Gases mit großer Geschwindigkeit durcheinanderschwärmen, unter gegenseitigen Stößen und Stößen gegen die Wand. Der Druck ist die Summenwirkung dieser Stöße. Näheres hierüber vgl. in der kinetischen Theorie der Gase, Band III, 2, Kap I.

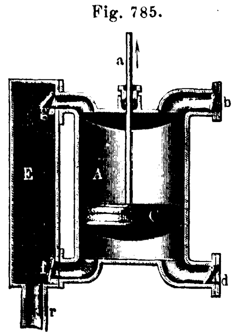
§ 7. Gebläse, Kompressoren und Luftpumpen. Die Wirkungsweise der Gebläse, Kompressoren und Luftpumpen kann an einem gemeinsamen Schema studiert werden. Sie kehrt, so verschieden die Ausführung im einzelnen sein mag, fast überall wieder. Wir knüpfen unsere Betrachtungen an Fig. 785 an. Der von der Kolbenstange *a* angetriebene Kolben *C* bewegt sich dicht anschließend in dem Zylinder *A* auf und ab. Seine Endlagen befinden sich in möglichst kleinem Abstand von den Zylinderdeckeln. Beim Aufgang wird durch das Ventil *d* (in der Zeichnung als Klappe schematisiert) Luft unter den Kolben gesaugt, beim Niedergang wird sie, da *d* jetzt geschlossen ist, durch *f* nach dem Sammelraum *E* gefördert, von wo sie durch das Rohr *r* der

---

1) Band III, 1, S. 246.
2) Band III, 1, S. 13—14.

Gebrauchsstelle zufließt. Über dem Kolben ereignet sich ganz Entsprechendes, so daß sowohl bei jedem Aufgang als auch bei jedem Niedergang Luft geliefert wird. Wir wollen nun annehmen, daß der Druck p_2 in E beträchtlich über dem Ansaugedruck p_1 liegt. Dann vollzieht sich beim Niedergang des Kolbens im einzelnen in dem Raum unterhalb des Kolbens folgendes:

Fig. 785.



Kolbengebläse.
A = Zylinder, C = Kolben, b und d = Saugklappen, g und f = Druckklappen.

1. Der Kolben ist in höchster Stellung, der Raum unter ihm ist mit Luft vom Drucke p_1 gefüllt, das bisher offene Ventil d schließt sich durch Eigengewicht oder Federkraft.

2. Der Kolben bewegt sich abwärts und verdichtet die Luft bei geschlossenen Ventilen, bis der Druck von p_1 auf p_2 gestiegen ist.

3. Sobald der Druck ein wenig über p_2 gestiegen ist, öffnet sich das Ventil f; die verdichtete Luft fließt während des Restes des Kolbenhubes in dem Maße, in dem der Kolben vorrückt, in den Raum E ab.

Während des darauf folgenden Aufgangs ereignet sich weiter das Folgende:

4. Nachdem die Luftförderung durch das Ventil f aufgehört hat, schließt sich dieses.

5. Die in dem „schädlichen Raume" unter dem Kolben zurückgebliebene verdichtete Luft dehnt sich bei geschlossenen Ventilen aus, bis ihr Druck etwas unter p_1 gesunken ist.

6. Unter der entstandenen Druckdifferenz öffnet sich das Ventil d und läßt bis zum Ende des Aufwärtshubes in dem Maße, in dem der Kolben Volumen frei gibt, Luft in den Zylinder eintreten.

Die Maschine, in der sich der oben beschriebene Arbeitsvorgang vollzieht, heißt „Gebläse", wenn es sich um geringe Druckunterschiede $p_2 - p_1$ handelt. In diesem Falle beanspruchen die Vorgänge 2 und 5 nur einen geringen Teil des Kolbenhubs, und der ganze Arbeitsvorgang gleicht daher stark dem in einer Flüssigkeitspumpe, wo die Druckübergänge 2 und 5 sich praktisch momentan vollziehen. Saugt die Maschine Luft oder andere Gase bei atmosphärischen Drucken und verdichtet sie beträchtlich, so daß also die Vorgänge 2 und 5 in dem Arbeitsvorgang einen sehr wesentlichen Teil ausmachen, so heißt sie „Kompressor" oder auch „Verdichter". Saugt sie endlich Luft (oder Gas) aus einem Raume an, in dem der Druck kleiner als der Atmosphärendruck ist, und verdichtet sie auf Atmosphärendruck, so heißt sie „Luftpumpe" („Gaspumpe") oder auch „Vakuumpumpe".

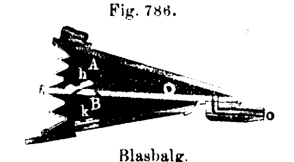
Der niedrigste Druck, der sich mit einer Luftpumpe erreichen läßt, und der höchste Druck, den ein Kompressor zu liefern imstande ist, ist hauptsächlich durch die Größe des schädlichen Raumes bedingt. Denn wenn der Teilvorgang 5 (Ausdehnung der im schädlichen Raume verbliebenen Luft) den ganzen Kolbenhub erfordert, wird keine Luft mehr durch das Ventil gesaugt,

und es hört daher jede Förderung auf. Soll also bei einer Luftpumpe ein verhältnismäßig hohes Vakuum erreicht werden, so ist der schädliche Raum aufs äußerste zu beschränken; am besten wird er mit einer Flüssigkeit (Öl, Quecksilber) ausgefüllt. (Über die gebräuchlichsten Konstruktionen der für den Physiker besonders wichtigen Luftpumpen, bei denen zur Erzielung eines guten Vakuums noch mannigfache Mittel angewandt werden, vergleiche man die Sonderausführungen in Kap. XIV, § 1—6.) Bei den Kompressoren wendet man, sobald es sich um hohe Verdichtungen handelt, das Mittel an, daß man mehrere Kompressoren in der Weise hintereinander anordnet, daß der zweite Kompressor die von dem ersten bereits verdichtete Luft ansaugt und sie weiter verdichtet usw. („Stufenkompressor"). Dasselbe Mittel wird auch bei Luftpumpen angewandt („Vorpumpe", die ein „Vorvakuum" schafft; die Hauptpumpe fördert die Luft aus dem Hochvakuum in das Vorvakuum).

Bei Gebläsen hat der „schädliche Raum" nur geringe Bedeutung, bei Flüssigkeitspumpen gar keine (sofern es sich nicht um die erste Ansaugung, d. h. das Fortschaffen der Luft handelt, die die Pumpe zunächst erfüllt). Deshalb findet man Pumpen für geringe Saughöhe häufig mit recht großen schädlichen Räumen ausgeführt.

Gebläse von der Art der Fig. 785 werden „doppelt wirkend" genannt. Würde man den oberen Teil des Zylinders mit den Ventilen b und g fortlassen, so würde ein einfach wirkendes Gebläse verbleiben. Ein einfach wirkendes Gebläse, das früher besonders für Schmiedefeuer und Kirchenorgeln Verwendung fand, ist der „Blasbalg", von dem Fig. 786 eine vollkommenere Ausführungsform darstellt. Der untere Raum B mit dem Saugventil k und dem Druckventil h stellt das eigentliche Gebläse dar; der Raum A stellt einen Speicher für die gepumpte Luft dar, von dem aus sie ihrem Verwendungsort zufließt. Über die auf dynamischen Wirkungen beruhenden Gebläse vgl. Kap. XII, § 19.

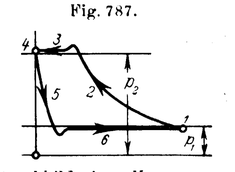
Fig. 786.



Blasbalg.
A = Luftspeicher, B = Pumpraum, h = Druckklappe, k = Saugklappe, o = Ausblaseöffnung.

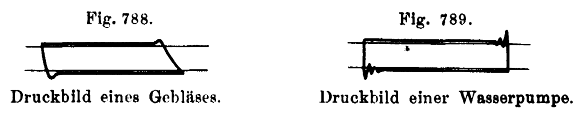
§ 8. Zeichnerische Darstellung der Vorgänge in Kompressoren usw.; Berechnung der Arbeitsleistungen. Die im vorigen Paragraphen unter 1 bis 6 besprochenen Vorgänge lassen sich in der Weise zeichnerisch darstellen, daß man den Kolbenweg von dem einen Totpunkt aus als Abszisse und den dazu gehörigen Druck als Ordinate aufträgt. Fig. 787 zeigt eine solche Darstellung für einen Kompressor. Die Vorgänge 1 und 4, die bei umkehrendem, also augenblicklich ruhendem Kolben vor sich gehen und vor allem auch keine Druckänderung mit sich bringen, treten hierin nicht in Erscheinung; aber die Vorgänge 2 (Verdichten), 3 (Hinausschieben), 5 (Entspannen des Inhalts des schädlichen Raumes) und 6 (Ansaugen) sind deutlich zu

Fig. 787.



Druckbild eines Kompressors.

erkennen. Die Linie 2 führt bei zurückgehendem Kolben von dem unteren Druckniveau etwas über das obere hinaus. Die hier in der Kurve sichtbare Nase deutet darauf hin, daß zum Eröffnen des Ventils etwas mehr Überdruck erforderlich ist, als hinterher zu seinem Offenhalten. Eine gleiche Nase findet sich am Ende von 5. Die Linie 3 zeigt das Hinausschieben; sie liegt etwas über dem Druckniveau von p_2; ebenso liegt 6 (Ansaugen) unterhalb des Niveaus p_1, beide Male wegen der Widerstände beim Durchgang des Gases durch die Ventile. — Das Schaubild für eine Luftpumpe ist von der gleichen Art, nur daß hier p_2 den Atmosphärendruck bedeutet. Fig. 788 und 789 zeigen entsprechende Schaubilder für ein Gebläse und eine Flüssigkeitspumpe.


Fig. 788. Druckbild eines Gebläses.
Fig. 789. Druckbild einer Wasserpumpe.

Diese Schaubilder, die man übrigens „Indikatordiagramme“ nennt (sie werden mit einem „Indikator“ genannten Instrument aufgenommen, vgl. Bd. I, Kap. V, § 80), liefern durch ihren Flächeninhalt unmittelbar ein Maß für die vom Kolben verrichtete Arbeit. Wir wollen der Bequemlichkeit halber einen einfach wirkenden Kompressor annehmen. Die Arbeit auf einem kleinen Wegstück ds ist, wenn auf der einen Seite des Kolbens der veränderliche Druck p, auf der anderen der konstante Außendruck p_1 wirkt, also die Kolbenkraft $P = F(p - p_1)$ ist, $dA = Pds = F(p - p_1)\,ds$, also gleich dem mit F multiplizierten schraffierten Flächenelement $(p - p_1)\,ds$ von Fig. 790. Für den ganzen Verdichtungshub ergibt sich dann die in Fig. 791 schraffierte Arbeits-

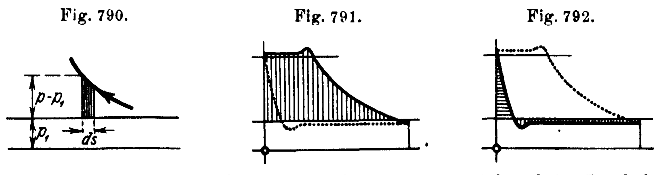


Fig. 790.
Fig. 791. Arbeit beim Verdichtungshub.
Fig. 792. Arbeit beim Saughub.

fläche (vom Kolben geleistete Arbeit). Beim Saughub wird dagegen die der in Fig. 792 wagerecht schraffierten Fläche entsprechende Arbeit von dem Gas an den Kolben zurückgegeben, und die der senkrecht schraffierten entsprechende von diesem geleistet. Im ganzen ergibt sich also für das $\int p\,ds$ gerade der Inhalt der Schaulinie von Fig. 787, und die Arbeit ist gleich diesem Inhalt, multipliziert mit der Kolbenfläche F. Dabei muß, damit z. B. mkg erhalten werden, s in m, p in kg/m² und F in m² eingesetzt werden; ebenso richtig ist es, s in m, p in kg/cm² und F in cm² einzusetzen, da hier die Kraft Fp ebenfalls richtig in kg herauskommt.

Was nun die theoretische Berechnung der Arbeit bei einem Kolbenspiel betrifft, mag hier die Durchführung unter der vereinfachenden Annahme genügen, daß die Verdichtung isothermisch erfolgt, und daß der schädliche Raum vernach-

lässigbar klein ist, und auch die Ventilwiderstände vernachlässigt werden. Die isothermische Verdichtung ist zwar in Wirklichkeit nur bei äußerst langsamer Drucksteigerung ausführbar, sie bildet aber einen erstrebenswerten Grenzfall, dem man sich durch Kühlung der Zylinderwände und andere Mittel möglichst anzunähern versucht, da bei dieser Art von Verdichtung die Verdichtungsarbeit am kleinsten wird; sie bildet also eine willkommene Vergleichsbasis für die wirkliche Kompressorarbeit, die größer als sie ist.

Wir wollen zunächst als Vorbereitung die Arbeit bei der isothermischen Verdichtung (also bei dem idealisierten Vorgang 2 der Fig. 787) berechnen. In der Formel $A = F \int p\,ds$ ersetzen wir wie früher das Produkt $F\,ds$ durch dV (Volumenelement), dann bezeichnet $V = Fs$ das zu dem Kolbenweg s gehörige Volumen. Da wir annehmen, daß das Volumen des schädlichen Raumes vernachlässigt werden sollte, ist V zugleich auch das Volumen der zwischen Kolben und Zylinderdeckel eingeschlossenen Gasmenge. Für die Zwischenzustände auf der Verdichtungslinie von Fig. 793 gilt die Gl. (1) von § 6:

$$pV = p_1 V_1, \quad \text{also } p = \frac{p_1 V_1}{V}.$$

p_1 und V_1 seien dabei die Zustandsgrößen für den Ansaugezustand, ebenso p_2 und V_2 die für den Endzustand der Verdichtung. Die „Verdichtungsarbeit“ A_V Fläche 1 2 2′ 1′ in Fig. 793 wird danach

$$A_V = \int_2^1 p\,dV = p_1 V_1 \int_2^1 \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \, ln \frac{V_1}{V_2} \, ^{*)}.$$

Da wegen $p_1 V_1 = p_2 V_2$ $\qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$

ist, kann man auch schreiben:

$$A_V = p_1 V_1 \, ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Hierzu kommt die Verschiebearbeit (Pumparbeit) $A_P = p_2 V_2$ (Rechteck 2 3 3′ 2′ in Fig. 793). Hiervon ist die Arbeit abzuziehen, die der äußere Luftdruck auf der Außenseite des einfach wirkend gedachten Kompressors leistet. Diese ist offenbar $A_L = p_1 V_1$. Die der Fig. 792 entsprechende Arbeit beim Kolbenrückgang ist bei verschwindendem schädlichen Raume und nicht vorhandenen Ventilwiderständen offenbar gleich Null, so daß die Gesamtarbeit eines Doppelhubs offenbar $A = A_V + A_P - A_L$ (Fläche 1 2 3 4 in Fig. 793) ist. Wegen $p_1 V_1 = p_2 V_2$ vereinfacht sich dieses zu

Fig. 793.

$$A = p_1 V_1 \, ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Für geringere Druckunterschiede läßt sich diese Formel noch durch Näherungsformeln ersetzen. Wir benutzen dazu die Reihe $ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$

Aus $1 + x = \frac{p_2}{p_1}$ folgt $x = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$; x ist also klein, wenn der Druckunterschied $p_2 - p_1$ klein gegen p_1 ist. Nimmt man in rohester Näherung nur das erste Glied x, was für Niederdruckgebläse zulässig ist, so wird

$$A = p_1 V_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1} = (p_2 - p_1)\, V_1;$$

dies ist nichts anderes als die Pumpenformel vom Ende des § 5. Wenn die Verdichtung sehr gering ist, unterscheidet sich das Gebläse in seiner Arbeitsweise offenbar praktisch nicht von einer Flüssigkeitspumpe. Eine bessere Näherung, die auch für höhere Drucke noch brauchbar ist, erhält man, wenn von der Reihe zwei Glieder genommen werden. Man erhält dann

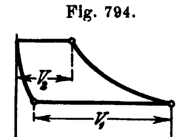
$$A = p_1 V_1 . x \left(1 - \frac{x}{2}\right) = (p_1 - p_2)\, V_1 \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{2 p_1}\right).$$

*) ln = Logarithmus naturalis.

Diese Formel ist innerhalb der hier angestrebten Genauigkeit gleichwertig mit der Formel

$$A = (p_1 - p_2)\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)^{1)},$$

Fig. 794.



die geometrisch so interpretiert werden kann, daß in ihr das Indikatordiagramm als Trapez berechnet wird.

Anmerkung: Im Falle eines nicht zu vernachlässigenden schädlichen Raumes lassen sich die vorstehenden Formeln unverändert verwenden, wenn den Größen V_1 und V_2 die in Fig. 794 eingeschriebene Bedeutung gegeben wird.

§ 9. Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit.

Die Wirkung des Schwerefeldes auf irgend eine Masse m besteht darin, daß diese eine Anziehungskraft nach dem Erdmittelpunkt[2]) von der Größe mg erfährt; g ist dabei die Beschleunigung des freien Falles und in unseren Gegenden gleich rund 9,81 m/s². Die Kraft mg wird das Gewicht der Masse m genannt. Da Flüssigkeitsmengen vielfach nach dem Volumen gemessen werden, wird zweckmäßig für die Masse der Volumeneinheit ein besonderer Name eingeführt. Man nennt sie die Dichte und bezeichnet sie mit ϱ. Irgend eine Flüssigkeitsmenge vom Volumen V und der Dichte ϱ hat also eine Masse ϱV und ein Gewicht $g\varrho V$. Das Produkt $g\varrho$ ist somit das Gewicht der Volumeneinheit. Es wird vielfach, besonders in der technischen Literatur, mit einem besonderen Buchstaben bezeichnet: $g\varrho = \gamma$, und heißt Raumgewicht. Fälschlich findet man dafür auch den Namen „spezifisches Gewicht". Dieses bedeutet aber Raumgewicht bezogen auf Wasser als 1 oder, was dasselbe ist, Dichte bezogen auf Wasser als 1. Das Raumgewicht stimmt damit nur bei besonderer Wahl der Einheiten (cm und g_{Gewicht}; dm und kg_{Gewicht}; m und t) überein. Für m und kg z. B. ist das Raumgewicht des Wassers $\gamma_W = 1000\,\text{kg/m}^3$.

Da die Stärke der Erdanziehung g nicht an allen Orten genau dieselbe ist, ist die Größe des Raumgewichts auch von Ort zu Ort etwas veränderlich. Die Physiker ziehen deshalb den Begriff der Dichte, der von der Stärke der Erdanziehung unabhängig ist, vor. Für hydrostatische Rechnungen ist jedoch die Zusammenfassung des Produkts ϱg zu dem Raumgewicht γ bequem.

Die Grundaufgabe der Hydrostatik, d. h. der Lehre vom Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten, ist die Bestimmung der Druckverteilung (des „Druckfeldes") in einer homogenen schweren Flüssigkeit.

Wir betrachten wieder das Gleichgewicht eines in der Flüssigkeit abgegrenzten Prismas gegen Verschieben in der Achsenrichtung und verwenden zunächst eines nach Fig. 778, dessen Achse wagrecht, also im rechten Winkel zur Richtung der Erdschwere (zur „Lotrichtung") liegt. Das Gewicht des

---

1) Durch binomische Entwicklung von $V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2}$, analog der obigen Entwicklung von $ln \frac{p_2}{p_1}$, kann die Näherungsformel

$$V_2 = V_1 \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{p_1}\right)$$

erhalten werden, aus der sich die behauptete Beziehung leicht ergibt.

2) Dies ist nicht ganz genau. es träfe nur dann zu, wenn die Erde nicht abgeplattet wäre und nicht rotierte. In Wirklichkeit schneidet die Lotrichtung für die Bewohner der nördlichen Halbkugel die Erdachse etwas südlich vom Erdmittelpunkt.

Prismas hat also keine Komponente nach der Achsenrichtung, deshalb lassen sich alle einschlägigen Überlegungen von § 4 wiederholen; sie liefern auch hier $p_1 = p_2$; durch Wiederholung der Schlüsse für beliebige aneinandergereihte Prismen mit wagerechter Achse findet man, daß an allen Punkten einer wagerechten Ebene der Druck denselben Wert haben muß.

Eine Beziehung zwischen verschiedenen wagerechten Ebenen erhält man nun durch Betrachtung des Gleichgewichts eines Prismas oder Zylinders mit senkrechter Achse gegen Verschieben in senkrechter Richtung. Hier finden wir das Gewicht des Prismas am Zustandekommen des Gleichgewichts beteiligt. Abwärts wirkt das Gewicht $G = \gamma V = \gamma F h$, ferner — gemäß Fig. 795 — die Druckkraft auf die obere Endfläche $p_1 F$, aufwärts die Druckkraft auf die untere Endfläche $p_2 F$. Das Gleichgewicht erfordert also, daß

Fig. 795.

$$\gamma F h + p_1 F = p_2 F$$

ist, woraus

$$p_2 - p_1 = \gamma h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

folgt. (Druckunterschied zwischen den Stellen 1 und 2 gleich dem Gewicht der dazwischenliegenden senkrechten Flüssigkeitssäule vom Querschnitt 1.) Wiederholte Anwendung dieser Überlegung liefert das Ergebnis, daß der Druck nach unten zu fortwährend zunimmt, und zwar so, daß er für jede Längeneinheit um den Betrag γ steigt. In jeder wagerechten Ebene ist er dabei konstant.

Führt man ein xyz-System ein, dessen z-Achse senkrecht nach oben weist, und ist p_0 der Druck in der Horizontalebene $z = 0$, so ist der Druck p an irgend einer anderen Stelle

$$p = p_0 - \gamma z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

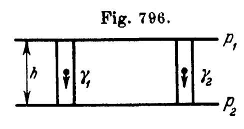
Wie das mehrfach angewandte Erstarrungsprinzip lehrt (vgl. § 4), gilt diese Beziehung ebenso in großen, von der Flüssigkeit erfüllten Räumen, wie auch in beliebigen Röhrensystemen, in den Zwischenräumen einer Kies- oder Sandmasse usw. Voraussetzung ist nur eine homogene in sich zusammenhängende ruhende Flüssigkeit.

Handelt es sich um eine inhomogene Flüssigkeit (an verschiedenen Stellen verschieden temperierte Flüssigkeit, Salzlösung von an verschiedenen Stellen verschiedenem Salzgehalt usw.), so läßt sich zunächst die Überlegung mit dem Prisma mit wagerechter Achse ohne jede Änderung übertragen, es ergibt sich also auch hier in jeder wagerechten Ebene derselbe Druck. Wir greifen nun zwei solche wagerechten Ebenen mit dem (nicht zu großen) Abstand h heraus, Fig. 796, von denen die obere unter dem Druck p_1, die untere unter dem Druck p_2 steht, und betrachten zwei senkrechte Prismen von der Höhe h und dem mittleren Raumgewicht γ_1 beim linken und γ_2 beim rechten Prisma.

Das Gleichgewicht erfordert, daß $p_2 - p_1 = \gamma_1 h$ links und $p_2 - p_1 = \gamma_2 h$ rechts sei. Das ist aber nur nebeneinander möglich, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ ist. Anders käme kein Gleichgewicht zustande, die Flüssigkeit würde sich in Be-

wegung setzen. Wir können die Betrachtung verfeinern, indem wir die Höhe h sehr klein nehmen und die Betrachtung für beliebig viele Paare von benachbarten Horizontalebenen wiederholen. Wir erhalten also das Ergebnis: In einer inhomogenen schweren Flüssigkeit ist Gleichgewicht nur so möglich, daß in jeder wagerechten Schicht die Dichte konstant ist. In diesem Resultat ist gleich die Frage nach dem Gleichgewicht zweier übereinandergeschichteter, sich nicht mischender Flüssigkeiten verschiedener Dichte mit entschieden. Deren Gleichgewicht erfordert gemäß unserem Satz, daß die Trennungsfläche eine horizontale Fläche sei. Man kann natürlich die Betrachtung von Fig. 796 auch unmittelbar auf zwei übereinandergeschichtete homogene Flüssigkeiten anwenden, deren Trennungsfläche in zunächst unbekannter Weise zwischen unseren beiden Horizontalebenen verläuft und kommt so zum selben Ergebnis.

Fig. 796.



Bezüglich der Stabilität einer solchen Flüssigkeitsschichtung ist noch zu bemerken, daß sich immer die weniger dichte Flüssigkeit über der dichteren befinden muß. Die umgekehrte Schichtung ist labil; die geringste Störung bringt sie zum Umsturz.

Über den Beweis hierfür sei kurz bemerkt, daß man ihn wieder an Fig. 796 anknüpfen kann; man nimmt dabei eine gestörte, also z. B. etwas geneigte Trennungsschicht zwischen den beiden Horizontalebenen an und berechnet die dabei auftretenden Druckunterschiede. Im stabilen Falle suchen diese die Neigung der Trennungsschicht zu verkleinern, im labilen zu vergrößern.

Für stetig veränderliche Dichte gilt genau Entsprechendes. Stabilität ergibt sich, wenn die Dichte nach oben zu überall abnimmt. Im Gegensatz zu der stabil geschichteten inhomogenen Flüssigkeit stellt die homogene Flüssigkeit den Fall des indifferenten Gleichgewichts dar. Bei ihr können beliebige Teile willkürlich verschoben werden, ohne daß dadurch irgendwelche das Gleichgewicht störende Kräfte entstünden.

Was die Druckverteilung in der inhomogenen Flüssigkeit betrifft, so gilt für jede Schicht, in der die Dichte noch genügend homogen ist, die Gl. (1) dieses Paragraphen in der differentiellen Form:

$$dp = -\gamma\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Ist γ als Funktion der Höhe z gegeben, so führt eine Integration zu der Beziehung

$$p = p_0 - \int_0^z \gamma\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

§ 10. Gleichgewicht eines schweren Gases.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer schweren Gasmasse stimmen in allem Grundsätzlichen mit denen für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit überein; die Gleichungen des vorigen Paragraphen können daher ohne weiteres auch hier übernommen werden. In vielen Fällen, so bei mäßiger Höhenausdehnung einer Gasmasse, kann das Raumgewicht der Gasmasse als räumlich konstant angesehen werden. Dann lassen sich Gl. (1) und (2) des vorigen Paragraphen anwenden

d. h. das Gas darf als eine homogene Flüssigkeit wie irgend eine andere angesehen werden. Bei großer, z. B. nach Kilometern zählender Höhenausdehnung ist dies aber nicht mehr zulässig. Die Druckunterschiede sind hier so groß, daß sich infolge der Zusammendrückbarkeit merklich verschiedene Dichten oben und unten ergeben. Auch Temperaturverschiedenheiten spielen vielfach eine Rolle. Hier muß also mit der Formel für inhomogene Flüssigkeiten gerechnet werden. Diese wird aber hier zweckmäßig etwas anders geschrieben, da γ nicht von vornherein als Funktion der Höhe z bekannt ist, sondern durch den Druck p bestimmt wird. Wir dividieren Gl. (1a) durch γ und integrieren. Das gibt

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieses Integral gibt je nach dem Gesetz, nach dem die Temperatur verteilt ist, noch verschiedenen Wert. Wir wollen uns hier darauf beschränken, als wichtigstes Beispiel den Fall konstanter Temperatur zu behandeln. Das Raumgewicht γ, das als Gewicht der Volumeneinheit dem Volumen einer bestimmten abgegrenzten Gasmenge umgekehrt proportional ist, ist gemäß dem Boyle-Mariotteschen Gesetz dem Druck proportional, also

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{p}{p_0},$$

damit wird

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$\frac{p_0}{\gamma_0}$ ist dabei, wie leicht aus Gl. (1) zu entnehmen ist, die Höhe einer Flüssigkeitssäule von dem konstanten Raumgewicht γ_0, an deren unterem Ende der Druck p_0 und an deren oberem Ende der Druck Null herrscht. Man nennt diese Höhe die „Höhe der gleichförmigen Atmosphäre". In bezug auf die wirkliche Atmosphäre stellt sie nichts weiter als eine bequeme Rechengröße dar. Wir wollen sie hier als Beispiel zahlenmäßig ermitteln. Dazu benötigen wir eine Zahlenangabe über γ_0. Man kann solche Zahlenangaben gewinnen, indem man ein mit einem Hahn versehenes Gefäß, das vorher luftleer gepumpt ist, auf einer empfindlichen Waage wägt und es dann, nachdem man den Hahn geöffnet und den Temperaturausgleich[1]) abgewartet hat, zum zweitenmal wägt. Da es vorher leer war und jetzt mit Luft gefüllt ist, ist es notwendigerweise um das Gewicht G seines Luftinhalts schwerer geworden. Ermittelt man noch den Volumeninhalt V des Gefäßes, etwa dadurch, daß man es noch einmal luftleer pumpt und den Hahn unter Wasser öffnet, und das mit Wasser gefüllte Gefäß von neuem wägt, dann ergibt sich daraus das zu dem Druck p_0 am Boden gehörige $\gamma_0 = \frac{G}{V}$. Für

[1]) Die Luft im Gefäß ist zunächst durch die Arbeitsleistung der äußeren Atmosphäre beim Eindringen in das Gefäß erwärmt, vgl. Bd. III, 2, Kap. I, § 6.

jeden anderen Bodendruck p_0 wäre γ_0 proportional umzurechnen. Wir wollen der einfacheren Rechnung wegen annehmen, daß p_0 gerade $= 1\,\mathrm{kg/cm^2}$ beträgt. Dann ist für mittelfeuchte Luft von der Temperatur ϑ

$$\gamma = \frac{1{,}245}{1 + \alpha\vartheta}\ \mathrm{kg/m^3}$$

zu setzen. (Für einen Druck p_0 gleich einer physikalischen Atmosphäre $= 1{,}0333\,\mathrm{kg/cm^2}$ wäre statt 1,245 die Zahl 1,286 für mittelfeuchte und 1,293 für künstlich getrocknete Luft einzusetzen.)

Um nun $\frac{p_0}{\gamma_0}$ zu berechnen, muß man p_0 im gleichen Maßsystem wie γ_0 ausdrücken. Es ist $1\,\mathrm{kg/cm^2} = 10000\,\mathrm{kg/m^2}$, also ist

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{10000}{1{,}245}(1 + \alpha\vartheta) = 8030\,(1 + \alpha\vartheta).$$

Die Dimension ist $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2}} : \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} = \mathrm{m}$. Die Höhe der gleichförmigen Atmosphäre für mittelfeuchte Luft ist also (unabhängig vom Druck, aber abhängig von der Temperatur) $= 8030 \cdot (1 + \alpha\vartheta)\,\mathrm{m}$. Wir setzen sie gleich H_0. Die Gl. (4) liefert dann zweimal angewandt:

$$z_1 = H_0 \ln\frac{p_0}{p_1}; \quad z_2 = H_0 \ln\frac{p_0}{p_2},$$

also

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln\frac{p_2}{p_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Dies ist die sogenannte barometrische Höhenformel (sie heißt so, weil die Drucke mit dem Barometer gemessen werden, vgl. § 15). Durch Umkehrung von Gl. (6) erhalten wir die Abhängigkeit des Druckes von der Höhe:

$$p = p_1 \cdot e^{-\frac{z - z_1}{H_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Durch eine Betrachtung analog derjenigen, die an Fig. 795 angeknüpft wurde, ist leicht zu erkennen, daß das Gewicht einer Luftsäule von der Grundfläche F, die von der Stelle z sich nach oben bis an die Grenze der Atmosphäre erstreckt, gleich Fp ist. p ist demnach unmittelbar gleich dem Gewicht der über der Stelle z befindlichen Luftsäule vom Querschnitt 1. Fig. 797 stellt den Inhalt von Formel (7) graphisch dar. Der Druck nimmt mit wachsender Höhe dauernd, aber immer schwächer ab. Er wird dabei für unendlich große Höhe gleich Null. Die Druckabnahme mit der Höhe läßt sich in der freien Atmosphäre leicht messend verfolgen, wenn man mit einem Druckmeßgerät (Barometer) einen Turm oder Berg besteigt. Auch in einem mehrstöckigen Hause ist sie bereits bequem nachweisbar. Man kann die beobachteten Druckunterschiede, wenn die Lufttemperaturen mit festgestellt werden, zu einer (recht zuverlässigen) Bestimmung der Höhenunterschiede verwenden.

Fig. 797.

Druckverteilung in einer Atmosphäre konstanter Temperatur.

Für Luftfahrzeuge ist dies die allgemein verwandte Methode der Höhenermittlung (bei bekannter Höhendifferenz läßt sich die Methode natürlich auch zur Bestimmung des mittleren Raumgewichts der zwischenliegenden Luftschicht verwenden).

Ist die Temperatur in der Luftmasse nicht konstant, so kann die Höhenformel immer noch für Höhenabschnitte angewendet werden, innerhalb deren die Temperaturunterschiede nicht mehr groß sind. Die zu jedem Höhenabschnitt gehörige Atmosphärenhöhe H_0 wird dann für den Mittelwert der Temperatur in dem Höhenabschnitt berechnet.

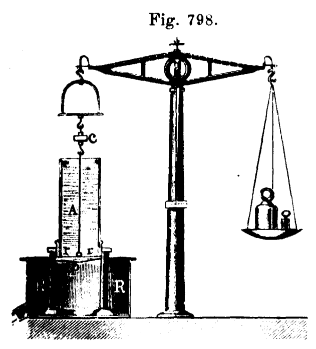
Es ist nun noch die Frage zu entscheiden, wann das Gleichgewicht einer geschichteten Gasmasse stabil ist und wann nicht. Daß die oberen Schichten leichter sind als die unteren, genügt nicht, und zwar deshalb nicht, weil eine Gasmasse bei einer Auf- oder Abwärtsbewegung unter anderen Druck kommt und dabei ihre Dichte ändert. Die richtige Antwort auf unsere Frage ist die folgende: Stabilität herrscht, wenn ein Gasteil, der in die Höhe gehoben wird, unter dem neuen Druck dichter ist als seine neue Umgebung, und wenn ein Gasteil, der herabgedrückt wird, unter dem neuen Druck weniger dicht ist als seine neue Umgebung. Denn in diesem Falle wird der Gasteil nach seiner alten Lage zurückstreben. Es gibt eine Schichtung (Temperaturverteilung) in einer Gasmasse, die in diesem Sinne der homogenen Flüssigkeit entspricht, die also indifferentes Gleichgewicht der Gasmasse bedeutet. Damit dies zutrifft, muß jeder Gasteil, der irgendwo weggenommen wird, nach der Verschiebung so in die neue Umgebung hineinpassen, als ob er ihr immer schon angehört hätte. Nun verhält sich der Gasteil bei der Druckänderung, solange Gelegenheit zu Wärmeaustausch fehlt, adiabatisch. Ist die Schichtung nun derart, daß Druck und Dichte sich nach der adiabatischen Zustandsänderung [vgl. § 6, Gl. (4)] verhalten (also p proportional γ^k, da γ sich dem Volumen reziprok verhält), so kommt tatsächlich jeder gehobene oder gesenkte Gasteil immer wieder in eine Umgebung von der Temperatur, die er durch seine eigene adiabatische Zustandsänderung selbst erhalten hat, und er hat dadurch auch gar keine Gelegenheit, Wärme auszutauschen. Diese „adiabatische Schichtung" hat, wie man zeigen kann, auch das mit der homogenen Flüssigkeit gemein, daß sie durch kräftige Durchmischung aus einer ursprünglich anders gearteten Schichtung entsteht, ebenso, wie z. B. eine ursprünglich inhomogene geschichtete Salzlösung durch Umrühren homogen gemacht wird.

In atmosphärischer Luft ist die adiabatische Schichtung dadurch gekennzeichnet, daß die Temperatur für rund 100 m Höhe um 1° C abnimmt. Eine geringere Temperaturabnahme als dieser Betrag bedeutet bereits Stabilität, Temperaturzunahme nach oben also eine noch stärkere Stabilität. Eine stärkere Temperaturabnahme als 1° auf 100 m Höhe wird in der freien Atmosphäre im allgemeinen nicht gefunden, da sie labilen Zuständen entspräche. Man findet sie allerdings in der Nähe des Erdbodens, wenn dieser heißer ist als die Luft. Diese ist dann allerdings nicht im Gleichgewicht, sondern ist von vertikalen auf- und absteigenden Strömen durchsetzt.

§ 11. Verschiedene Anwendungen der hydrostatischen Gesetze.

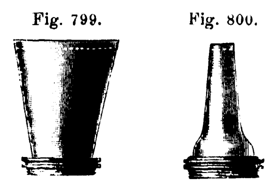
a) Bodendruck. Hydrostatisches Paradoxon. Ein einfacher Versuch zum Nachweis des Flüssigkeitsdruckes kann mit dem von Pascal angegebenen Apparat Fig. 798 gemacht werden. Die bewegliche Bodenplatte p hängt an der Waage und öffnet sich, sobald das Gewicht des Wassers in dem zylindrischen Gefäß A größer ist, als das Gewicht in der Waagschale. Man kann in den Ring r auch Gefäße nach Fig. 799 und 800 einschrauben und findet nun, daß man in diese zur Erreichung des Grenzgleichgewichtes nicht etwa gleiche Gewichtsmengen Wasser einfüllen muß, sondern daß die Höhe der Wassersäule in allen Fällen dieselbe sein muß, was natürlich in dem Gefäß Fig. 799 weit mehr Wasser erfordert, als in dem Gefäß Fig. 800. Von unserer Erkenntnis der Druckverteilung in einer Flüssigkeit aus ist es ganz klar, daß dies so sein muß. Wird zur Vereinfachung der Rechnung die Zunahme des Luftdrucks nach unten infolge des Gewichtes der Luft ihrer Geringfügigkeit wegen vernachlässigt, dann hat man auf der Unterseite der Platte den Luftdruck p_0, auf der oberen Seite den Wasserdruck $p_1 = p_0 + \gamma h$, wo h die Höhe der Wassersäule ist; das Gewicht an der Waage, P, hat daher, abgesehen von dem Eigengewicht der Platte — das austariert sei —, Gleichgewicht zu halten der auf die Fläche F wirkenden Druckdifferenz $p_1 - p_0$, also der Kraft $F(p_1 - p_0) = F\gamma h$. Dies stimmt zwar mit dem Gewicht des Wasserinhalts des Zylinders überein, jedoch spielt die Gefäßform bei unserer Berechnung keine Rolle und ist dafür auch gleichgültig. Man scheint früher diesen Tatbestand für sehr verwunderlich gehalten zu haben, denn die Erscheinung führt den Namen „hydrostatisches Paradoxon". Man kann sich von dem Umstand, daß eine große Wassermenge in dem Gefäß Fig. 799 und eine kleine im Gefäß Fig. 800 denselben Bodendruck hervorbringt, auch dadurch Rechenschaft geben, daß das Gewicht des über den Zylinder überschießenden Volumenteils in dem Gefäß Fig. 799 von den nach außen hin sich erweiternden Seitenwänden getragen wird (vermittelst der dortigen Wanddrucke, die, von dem Gefäß auf das Wasser ausgeübt, eine Komponente nach oben haben), und daß das, was bei dem Wasservolumen in dem Gefäß Fig. 800 an dem Zylinder fehlt, durch die nach unten gerichteten Druckkomponenten auf den verengten Seitenwänden kompensiert wird. Würde man die ganzen Gefäße auf eine Waage stellen, dann würde zu der Druckkraft auf die Boden-

Fig. 798.



Bodendruckwaage.

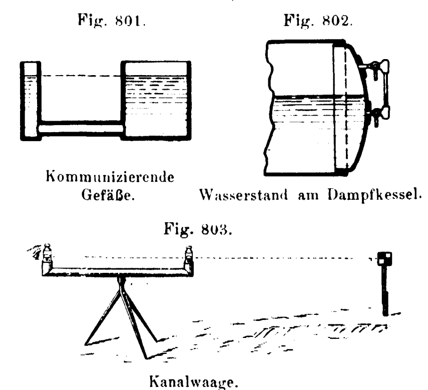
Fig. 799. Fig. 800.



Teile der Bodendruckwaage.

fläche auch die Kraft des Wassers auf die Seitenwände hinzukommen, die im Falle der Fig. 799 nach unten und im Falle von Fig. 800 nach oben wirkt, und man würde damit jetzt die wirklichen Wassergewichte als wirksam finden.

b) Kommunizierende Gefäße. Ein ähnliches Paradoxon bestand darin, daß das Wasser in miteinander verbundenen Gefäßen gemäß Fig. 801, obwohl das eine weit ist und viel Wassergewicht in sich faßt, das andere eng ist, also nur geringes Wassergewicht in sich aufnimmt, doch in beiden Gefäßen die gleiche Spiegelhöhe einnimmt. Vom modernen Standpunkt ist diese Tatsache sehr klar, wir wissen, daß der Druck eine Funktion der Höhe allein ist, und gleichem Druck (nämlich dem Luftdruck auf die beiden freien Oberflächen) immer die gleiche Höhe entspricht, einerlei, welche Gestalt die Wände haben. Wir können auch die beiden kommunizierenden Gefäße aus einem sie beide umfassenden Flüssigkeitsquantum unter Anwendung des Erstarrungsprinzips entstehen lassen und erhalten so das gleiche Ergebnis.


Fig. 801. Kommunizierende Gefäße.
Fig. 802. Wasserstand am Dampfkessel.
Fig. 803. Kanalwaage.

Eine wichtige Anwendung des Prinzips der kommunizierenden Röhren ist das Wasserstandsrohr, das bei Dampfkesseln verwendet wird, um den Wasserstand im Kessel außen erkennbar anzuzeigen, vgl. Fig. 802. Die untere Verbindung sorgt für Druckgleichheit im Wasser, die obere für Druckgleichheit im Dampfraum. Unter dem gleichen Dampfdruck stehen dann die beiden Wasserspiegel gleich hoch.

Eine andere Anwendung der kommunizierenden Gefäße stellt das früher für Vermessungsarbeiten verwendete Instrument, Fig. 803, dar (Wasserwaage oder Kanalwaage).

Anmerkung. Wenn von zwei kommunizierenden Gefäßen das eine eine enge Röhre ist, so beobachtet man, daß in der Röhre eine Flüssigkeit, die die Rohrwand benetzt (Wasser, Alkohol, Öl), höher steht, eine nicht netzende Flüssigkeit (Quecksilber) dagegen tiefer steht als in dem weiten Gefäß. Dies ist dadurch zu erklären, daß die freie Oberfläche einer Flüssigkeit Spannungen nach Art einer gespannten Haut zeigt, wodurch überall, wo diese Haut gekrümmt ist, der Druck auf beiden Seiten nicht mehr gleich ist. Das Gesetz, daß die freie Oberfläche einer Flüssigkeit wagerecht verläuft, erfährt also gewisse Abweichungen, wo sich die „Oberflächenspannung" bemerklich macht. Es sind dies vor allem die wandnahen Stellen der Oberfläche. Im Innern einer ausgedehnten Flüssigkeitsoberfläche ist die Oberflächenspannung in sich selbst im Gleichgewicht, und es ist dort die Oberfläche genau eben und in kommunizierenden Gefäßen genau gleich hoch, und der Druck der obersten Flüssigkeitsschicht ist gleich dem der darüber befindlichen Schicht. Über die Oberflächenspannung, auch Kapillarität genannt, vgl. Bd. III, 1, Kap. XI.

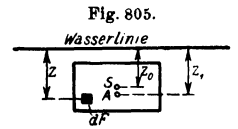
c) Seitendruck. Wie sich der Wasserdruck auf der Seitenwand eines Gefäßes bemerklich macht, ist besonders dann wichtig zu wissen, wenn es sich um bewegliche Wandteile handelt, und man die von dem Wasser auf

diese ausgeübten Kräfte zu kennen wünscht. Wenn wir, was bei solchen Aufgaben bequem ist, den Ursprung des Koordinatensystems in die Wasseroberfläche legen und die z-Koordinate nach unten positiv wählen, so erhalten wir in Formel (2) von § 9 das Pluszeichen. Es ist also der Druck auf der Wasserseite, wenn p_0 den Luftdruck bedeutet: $p = p_0 + \gamma z$. Auf der Luftseite des Wandteils herrscht der Druck p_0, also ist die in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel herrschende Druckdifferenz $p - p_0 = \gamma z$. Diese ist also der Tiefe genau proportional, vgl. Fig. 804. Für die Gesamtkraft ergibt sich die Regel, daß diese gleich ist der Fläche des Wandteils, multipliziert mit dem Druck im Schwerpunkt der Fläche. Liegt dieser (S in Fig. 805) um z_0 unter dem Wasserspiegel, dann ist die Kraft $P = \gamma F z_0$. Diese Regel kann so begründet werden, daß jedes Flächenelement, das tiefer als der Schwerpunkt liegt, sich mit einem anderen über dem Schwerpunkt liegenden gerade so ergänzt, als ob sie beide in Schwerpunktshöhe lägen. Die resultierende Kraft der Drucke auf den Wandteil greift natürlich, da die unteren Partien größere Beiträge liefern als die oberen, nicht im Schwerpunkt an, sondern etwas tiefer!

Fig. 804.

Seitendruck des Wassers.

Fig. 805.



Rechnerisch gestaltet sich die Sache so: Die Kraft auf ein Flächenteilchen dF ist $\gamma z\, dF$, die Gesamtkraft also

$$P = \gamma \int z\, dF = \gamma \,.\, F z_0,$$

wobei z_0 die Schwerpunktskoordinate ist. Um die Lage der Resultierenden zu erfahren, muß man die Drehmomente bilden. Für die „Wasserlinie" (Schnittlinie der Wasseroberfläche mit der Wandfläche) als Drehachse ist der Beitrag jedes Flächenelementes $dF\ \gamma z\, dF \,.\, z = \gamma z^2 dF$; ist z_1 die z-Koordinate des Angriffspunktes A der Resultierenden, so ist

$$P \,.\, z_1 = \gamma \int z^2\, dF = \gamma J.$$

J ist das Trägheitsmoment der Fläche für die Wasserlinie als Achse. Nach Einführung des Wertes von P ergibt sich nun

$$z_1 = \frac{J}{F z_0} = \frac{t^2}{z_0},$$

wenn durch $J = F t^2$ der Trägheitsradius t eingeführt wird.

Anmerkung. In dem ganzen Paragraphen ist das Eigengewicht der Luft vernachlässigt und der Luftdruck konstant gesetzt worden. Diese Vernachlässigung läßt sich aber auch unschwer vermeiden. Es genügt dafür, das Raumgewicht der Luft als konstant anzunehmen. Wir nennen es γ_L, dasjenige des Wassers γ_W. Bezeichnen wir den Luftdruck an der Wasseroberfläche mit p_0, so ist in der Luft

$$p_L = p_0 + \gamma_L z,$$

im Wasser

$$p_W = p_0 + \gamma_W z.$$

Der Druckunterschied an einer Stelle der Wand, die um z unter der Wasseroberfläche liegt, ist dann

$$p_W - p_L = (\gamma_W - \gamma_L) z.$$

Wir erkennen daraus, daß alle Ergebnisse des § 10 verwendbar bleiben, wenn wir nur an Stelle von γ den Unterschied der beiden Raumgewichte einführen. Dies gilt natürlich auch dann, wenn an die Stelle der Luft eine zweite sich mit der ersten nicht mischende Flüssigkeit tritt. Im Falle der Luft ist übrigens die Änderung durch die genauere Formel gegenüber dem Früheren nur rund $^1/_{800}$ des Betrages.

§ 12. Der Auftrieb von in Flüssigkeiten eingetauchten Körpern.

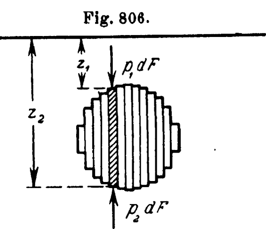
Um die Frage nach der Kraft zu klären, die ein in die schwere Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt, wollen wir das Erstarrungsprinzip umgekehrt anwenden und die Kräfte studieren, die zu erwarten sind, wenn wir den eingetauchten Körper durch Flüssigkeit von der Art der umgebenden Flüssigkeit ersetzen. Der an Stelle des Körpers vorhanden gedachte Flüssigkeitsteil unterscheidet sich dann in nichts von der übrigen Flüssigkeit und muß also sicherlich durch die Druckkräfte, die die übrige Flüssigkeit an seiner Oberfläche ausübt, im Gleichgewicht gehalten werden. Es muß also die Resultierende dieser Druckkräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sein, wie das Gewicht des Flüssigkeitsteils, und sie muß auch, damit kein Kräftepaar übrigbleibt, durch den Schwerpunkt des Flüssigkeitsteils gehen. Unsere Aufgabe ist damit gelöst. Der eingetauchte Körper erfährt einen „Auftrieb" senkrecht nach oben, der gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmasse ist. Die Auftriebskraft geht durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse. Ist V das Volumen der verdrängten Wassermasse, das bei ganz untergetauchten Körpern offenbar mit dem Körpervolumen übereinstimmt, so ist der Auftrieb

$$A = \gamma V.$$

Das Gesetz, daß der Auftrieb eines eingetauchten Körpers gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmasse ist, geht auf Archimedes zurück. Man findet deshalb dafür auch den Namen „Archimedisches Prinzip". Es ist nützlich, sich zu überlegen, wie der Auftrieb im einzelnen zustande kommt. Er hängt eng zusammen mit der Druckverteilung in der schweren Flüssigkeit. Durch die Druckzunahme nach unten wird gerade immer das Gewicht der zwischenliegenden Flüssigkeitsschicht getragen. Die Ableitung der Druckformel (1) in § 9, die an Fig. 795 anknüpfte, ging gerade von dieser Gleichgewichtsforderung aus. Der Auftrieb kommt also dadurch zustande, daß auf der Unterseite des Körpers größere Drucke herrschen als auf der Oberseite, so daß, am Körper betrachtet, eine Kraft nach oben übrigbleibt.

Man kann die resultierende Kraft auch aus der Druckverteilung ausrechnne. Wir vereinfachen uns die Sache dadurch, daß wir die wirkliche Körperoberfläche durch eine solche ersetzen, die nur wagerechte und senkrechte Flächenstückchen enthält, sich im übrigen aber der wirklichen Oberfläche eng anschließt. Offenbar wird dadurch nur sehr wenig geändert. Die senkrechten Flächenstückchen erfahren nur wagerechte Druckkräfte, die wagerechten nur senkrechte. Wir brauchen nur die letzteren zu untersuchen, da die wagerechten Kräfte sich offenbar gegenseitig wegheben müssen. Wir betrachten zunächst ein Prisma von der Grundfläche dF, das von der oberen Begrenzungsfläche (Koordinate z_1) bis zur unteren Begrenzungsfläche (Koordinate z_2) reicht (Fig. 806).

Fig. 806.



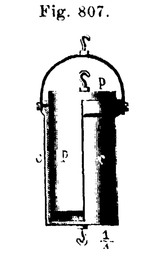
Der Druck an der einen Stelle ist $p_1 = p_0 + \gamma z_1$, der an der anderen $p_2 = p_0 + \gamma z_2$. Die nach oben gerichtete Resultierende der zwei Druckkräfte ist damit $p_2 \, dF - p_1 \, dF = \gamma (z_2 - z_1) \, dF = \gamma \, dV$, wobei dV das Volumen des Prismas bedeutet. Der Gesamtauftrieb wird also

$$A = \gamma \iint (z_2 - z_1) \, dF = \gamma V,$$

was mit dem Früheren übereinstimmt.

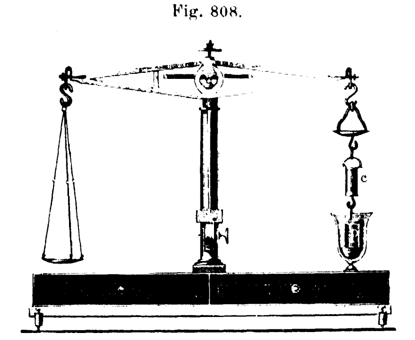
Ein lehrreicher Versuch, der das Auftriebsgesetz veranschaulicht, ist in **Fig. 807** und 808 dargestellt. Der Körper *p*, Fig. 807, paßt genau in das Gefäß *c* und füllt dessen Hohlraum gerade bis zum Rande aus. Hängt man das Gefäß *c* mit dem Körper *p* zusammen an eine Waage und bringt diese durch

Fig. 807.



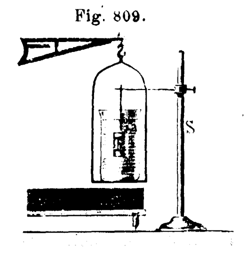
Zubehör zu dem Apparat von Fig. 808.

Fig. 808.



Versuch über den hydrostatischen Auftrieb.

Fig. 809.



Hydrostatischer Abtrieb durch einen eingetauchten Körper.

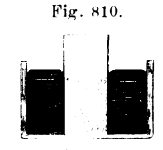
Auflegen von Gewichten auf die andere Waagschale zum Einspielen, dann wird das Gleichgewicht gestört, wenn der Körper *p* unten an das Gefäß gehängt und in eine Flüssigkeit getaucht wird (Fig. 808). Das Gleichgewicht kann aber wieder hergestellt werden, wenn jetzt das Gefäß *c* genau bis an den Rand mit derselben Flüssigkeit vollgegossen wird, in die der Körper *p* getaucht ist.

Dem Auftrieb, den die Flüssigkeit dem eingetauchten Körper erteilt, entspricht nach Wirkung und Gegenwirkung ein Abtrieb, der von dem eingetauchten Körper auf die Flüssigkeit ausgeübt wird. Die Wirkung des eingetauchten Körpers ist dieselbe, als ob eine Flüssigkeitsmenge gleichen Volumens hinzugekommen wäre. Dies läßt sich durch den Versuch Fig. 809 veranschaulichen. Hat man erst die Waage mit dem mit Flüssigkeit gefüllten Becher ins Gleichgewicht gebracht, und senkt nun den an einem Stativ *S* befestigten Körper *p* in die Flüssigkeit, so sinkt die Waagschale, und man muß auf die andere Waagschale Gewichte entsprechend der verdrängten Flüssigkeitsmenge zulegen. Gleichzeitig stellt man fest, daß der Flüssigkeitsspiegel im Gefäß, der vorher bei *a* war, durch das Eintauchen von *p* bis *b* gestiegen ist. Nimmt man jetzt den Körper, nachdem man bei *b* eine Marke gemacht hat, wieder fort und bringt die Waage, die jetzt links herunterhängt, durch Zugießen von Flüssigkeit wieder ins Gleichgewicht, so kann man feststellen, daß der Spiegel, der auf *a* zurückgesunken war, jetzt gerade wieder bei *b* steht.

Als scheinbarer Widerspruch gegen das Auftriebsgesetz sei noch folgender Versuch erwähnt. Ein Körper mit sorgfältig eben geschliffener Unterfläche und

senkrechten Seitenflächen wird in ein Gefäß mit ebenfalls sorgfältig geebnetem Boden gestellt (Fig. 810), und es wird nun behutsam Quecksilber zugegossen. Der Körper, der viel mehr Quecksilbergewicht verdrängt, als sein Eigengewicht beträgt — er mag z. B. aus Glas bestehen, dessen Dichte rund $^1/_5$ derjenigen von Quecksilber ist —, schwimmt aber nicht auf, sondern bleibt stehen. Die Erklärung ist nicht schwer. Unter dem Körper befindet sich eine Spur von Luft, deren Druck sich durch das Eingießen des Quecksilbers so lange nicht erhöht, als dieses nicht in den feinen Spalt eindringt; daran wird es aber durch seine Oberflächenspannung gehindert. Mit einer Flüssigkeit, die den Glaskörper zu benetzen strebt' und die daher in den Spalt eindringt, gelingt der Versuch nicht. Sobald übrigens der Körper ein klein wenig gekippt wird, so daß das Quecksilber unter ihn dringen kann, wird er sofort angehoben.

Fig. 810.



Paradoxon zum hydrostatischen Auftrieb.

Das Gesetz, daß der Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist, gestattet, sobald das Raumgewicht γ der Flüssigkeit bekannt ist[1]), die Bestimmung des Volumens beliebiger fester Körper durch Bestimmung des Gewichtsverlustes beim Untertauchen in der Flüssigkeit. Es sind also zwei Wägungen erforderlich: P_1 sei das Gewicht in Luft, P_2 in Flüssigkeit, der Auftrieb ist dann $A = P_1 - P_2 = \gamma\, V$ und somit $V = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$. Mit der Bestimmung des Volumens ist auch die Bestimmung des Raumgewichtes des Körpers, γ_K, möglich geworden. Es ist $P_1 = V\gamma_K$, also

$$\gamma_K = \frac{P_1}{V} = \frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \gamma.$$

Nimmt man irgend eine Flüssigkeit als Bezugskörper für alle übrigen Stoffe — es ist üblich, Wasser von 4° C (im Zustand seiner größten Dichte) dafür zu wählen —, so kommt man zum Begriff des „spezifischen Gewichts" $\frac{\gamma_K}{\gamma_W} = s$. Dieses ist also das Verhältnis des Raumgewichts irgend eines Körpers zu dem des Wassers. Wir erinnern uns der in § 8 erörterten Beziehung $\gamma = g\,\varrho$ und fügen sofort hinzu, daß auch $\frac{\varrho_K}{\varrho_W} = s$ ist, d. h. das spezifische Gewicht ist auch gleich dem Verhältnis der Massendichte des Körpers zu der von Wasser von 4°.

Setzen wir den obigen Wert von γ_K ein und nehmen an, daß die Wägung P_2 in Wasser stattfand (die Unterschiede sind, wenn das Wasser nicht 4°, sondern Zimmertemperatur hatte, nicht groß), so wird

$$s = \frac{P_1}{P_1 - P_2}$$

Diese Beziehung liegt den meisten Methoden zur Bestimmung von spezifischen Gewichten zugrunde. Ausführlichere Erörterungen über die wichtigsten Methoden finden sich in Kapitel XIII.

[1]) Man kann es ermitteln durch Wägung einer Flüssigkeitsmenge, die in ein Gefäß von gemessenem Volumen eingefüllt ist.

§ 13. Auftrieb in Luft. Luftballon. Auch in Luft und anderen Gasen erfahren die Körper einen Auftrieb. Für alle praktischen Anwendungen genügt es dabei, das Raumgewicht der Luft γ_L als räumlich konstant anzusehen; deshalb gelten für den Luftauftrieb dieselben Gesetze wie für den von Flüssigkeiten. Es ist $A_L = \gamma_L V$.

Bei genauen Wägungen ist es notwendig, sowohl den Luftauftrieb des zu wägenden Gegenstandes wie den der Gewichtsstücke zu berücksichtigen. Dabei ist noch zu beachten, daß γ_L von der Temperatur und vom Luftdruck abhängt.

Fig. 811.

Luftballon.
H = Hülle, V = Ventil,
F = Füllansatz, N = Netz,
A = Auslaufleinen,
R = Ring, K = Korb.

Die technisch wichtigste Anwendung des Luftauftriebs stellen die gasgefüllten Luftfahrzeuge (Luftballon und Luftschiff) dar. Im Gleichgewicht ist der Luftauftrieb gleich der Summe aller Gewichte. Die letzteren bestehen aus den festen Teilen (beim Luftballon: Hülle, Netz, Korb mit Insassen und Ballast), sowie aus dem Füllgas (Fig. 811). Der Luftauftrieb der festen Körper kann vernachlässigt werden, dann ist, wenn V das Volumen des Füllgases und γ_G sein Raumgewicht, ferner Q das Gewicht aller festen Teile ist, im Gleichgewichtszustand

$$\gamma_L V = Q + \gamma_G V.$$

Diese Formel kann z. B. dazu dienen, die Ballastmenge Q' auszurechnen, die mitgenommen werden kann. Ist Q_0 das Gesamtgewicht der festen Teile ohne den Ballast und Q' das Gewicht des Ballastes, so ist

$$Q = Q_0 + Q' = V(\gamma_L - \gamma_G),$$

also

$$Q' = V(\gamma_L - \gamma_G) - Q_0.$$

Steigt der Ballon in die Höhe, so dehnt sich das Gas unter dem geringer werdenden Luftdruck aus; wird das Volumen der Ballonhülle dabei überschritten, so entweicht Gas durch den unten an der Hülle befindlichen Füllansatz, der deshalb immer offen sein muß. In diesem Zustand ist offenbar das Gasvolumen V konstant $= V_{max}$. Bei der Druckverminderung ändert sich, wenn von Temperatureinflüssen abgesehen wird, das Raumgewicht der Luft in demselben Verhältnis wie das des Gases. Führt man das „spezifische Gewicht des Gases, bezogen auf Luft", $\frac{\gamma_G}{\gamma_L} = \sigma$ ein, so kann auch

$$Q_0 + Q' = V\gamma_L(1 - \sigma)$$

geschrieben werden. Man kann hieraus durch Nullsetzen von Q' dasjenige γ_L berechnen, das durch Abwurf allen Ballastes erreichbar ist. Aus γ_L kann, wenn über die Lufttemperatur Annahmen gemacht werden, der zu γ_L gehörende Druck p und damit gemäß § 10 die erreichbare Höhe ermittelt werden. Man nennt den durch $V = V_{max}$ gekennzeichneten Zustand den **prallen Zustand**. Zu ihm im Gegensatz steht der **schlaffe Zustand**, der eintritt, wenn der Ballon von seiner „Prallhöhe" herabsinkt. Das Gas zieht sich zu-

sammen und die Hülle wird schlaff. Jetzt ist offenbar die Gasmenge, also $V\gamma_G$ konstant. Wir setzen $V\gamma_G = Q_G$; da $\gamma_L = \frac{1}{\sigma}\gamma_G$ geschrieben werden kann, hat man jetzt im Gleichgewicht

$$Q_0 + Q' = Q_G\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right).$$

Soweit keine Temperaturunterschiede störend dazwischentreten, ist also im schlaffen Zustand die resultierende Hubkraft des Ballons (= Luftauftrieb — Gasgewicht) konstant. Ist beim schlaffen Ballon das Gewicht der festen Teile einschließlich Ballast etwas größer als die resultierende Hubkraft, so sinkt er bis zum Boden durch, ist es kleiner, dann steigt er bis zur „Prallhöhe" und steigt hierauf in prallem Zustand unter Gasverlust so lange weiter, bis durch die abnehmende Hubkraft Gleichgewicht eingetreten ist. Da er durch seine kinetische Energie die Gleichgewichtslage etwas übersteigt, muß er, wenn er nicht sofort wieder sinken und schlaff werden soll, durch geringes Ballastgeben ins Gleichgewicht gebracht werden, sobald er zu steigen aufhört.

Änderungen der Gastemperatur, die bei wechselnder Bestrahlung in sehr beträchtlichem Maße auftreten können, bewirken — besonders im schlaffen Zustand, wo das Gasvolumen dabei geändert wird — sehr beträchtliche Störungen des Gleichgewichts, die meist nur durch Opfer an Gas (durch Ventilziehen) oder an Ballast ausgeglichen werden können.

Beim Luftschiff gelten in der Hauptsache dieselben Beziehungen wie beim Freiballon. Nur insofern ist ein Unterschied, als das Luftschiff den von den Propellern erzeugten Vortrieb zur Gewinnung von „dynamischen" Auftrieb- oder Abtriebskräften ausnutzen kann, indem es durch die Wirkung des Höhensteuers eine schräge Lage (Nase hoch oder Nase tief) einnimmt. Dadurch ist es in der Lage, kleinere Abweichungen vom statischen Gleichgewicht ohne Gas- und Ballastverlust auszugleichen.

Die Gummiballons, die zu meteorologischen Zwecken und als Kinderspielzeug Verwendung finden, sind, obwohl von praller Form, von unserem Standpunkt im schlaffen Zustand, da die dünne Gummihaut der Ausdehnung des Gases wenig Widerstand bieten kann. Sie steigen, da die Hubkraft annähernd konstant bleibt, bei Auftriebsüberschuß so lange weiter, bis sie platzen.

Als Füllgase für Luftballons kommen in Betracht Leuchtgas mit σ = rund 0,4 (schwankend je nach Zusammensetzung) und Wasserstoff mit $\sigma = 0{,}07$ in reinem Zustand (gewöhnlich durch Verunreinigung etwas größer). Für Luftschiffe kommt nur Wasserstoff in Betracht. In Amerika wurde in letzter Zeit auch Helium mit $\sigma = 0{,}14$ (seiner Unbrennbarkeit wegen) verwandt.

Zahlenbeispiel. Für 1600 cbm Leuchtgasfüllung eines Freiballons mit $\sigma = 0{,}42$ ist bei einem Luftdruck von 1 kg/cm² und $\vartheta = 20^0$ C gemäß § 10;

$$\gamma_L = \frac{1{,}245}{1+\alpha\vartheta} = \frac{1{,}245}{1+\frac{20}{273}} = 1{,}16\ \text{kg/m}^3,$$

also

$$\gamma_L(1-\sigma) = 1{,}16 \cdot 0{,}58 = 0{,}673\ \text{kg/m}^3.$$

Die Hubkraft wird damit $1600\,m^3 . 0{,}673\,kg/m^3 = 1077\,kg$. Mit 450 kg für Hülle, Netz, Korb und Zubehör und 300 kg für vier Insassen bleiben für Ballast $1076 - (450 + 300) = 327$ kg (Sand in Säcken von je 15 kg, also rund 22 Sack). Werden 5 Sack = 75 kg für die Landungsmanöver zurückgestellt, dann können rund 250 kg für die Gewinnung von Höhe ausgegeben werden. Aus der Hubkraft in der Höhe von $450 + 300 + 75 = 825$ kg ergibt sich ein $\gamma_L = \frac{825}{1600 . 0{,}58} = 0{,}89\,kg/m^3$. Schätzt man die Temperatur in der Höhe zu 0^0, so entspricht wegen der Proportionalität des Raumgewichts mit dem Druck bei gleicher Temperatur dem angegebenen Raumgewicht ein Druck von $\frac{0{,}89}{1{,}245} \cdot 1 = 0{,}715\,kg/cm^2$. Die Mitteltemperatur in der zwischenliegenden Luftschicht sei 10^0 C; dann ergibt sich gemäß § 10 eine Höhe von

$$8030\left(1 + \frac{10}{273}\right) ln\, 1/0{,}715.$$

Es ist $ln\, x = 2{,}3025 . {}^{10}log\, x$; hier $ln\, 1/0{,}715 = 0{,}336$. Damit wird die Höhe = 2800 m.

Derselbe Ballon würde bei Wasserstoffüllung mit $\sigma = 0{,}09$ am Boden eine Hubkraft von $V\gamma_L(1 - \sigma) = 1600 . 1{,}16 . 0{,}91 = 1690$ kg entwickeln. Das γ_L für die Gipfelhöhe wäre $\frac{825}{1600 . 0{,}91} = 0{,}567\,kg/m^3$. Nimmt man in dieser bedeutend größeren Höhe $\vartheta = -20^0$ an, so wird

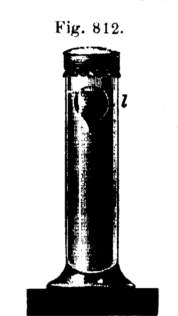
$$p = \frac{0{,}567\,(1 - 20/273)}{1{,}245} = 0{,}422\,kg/cm^2.$$

Die mittlere Temperatur ist jetzt 0^0. Die Höhe wird damit $8030 . 0{,}865 = 6930$ m.

§ 14. Gleichgewicht schwimmender Körper. a) Völlig untergetauchte Körper. Das Kräftegleichgewicht erfordert 1. daß das Gewicht des Körpers mit dem der verdrängten Flüssigkeit übereinstimmt und 2. daß die resultierende Auftriebskraft, die nach früherem durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse geht, mit der Gewichtskraft des Körpers, die durch dessen Schwerpunkt geht, in ein und dieselbe Gerade fällt. Mit anderen Worten, der Schwerpunkt A der verdrängten Flüssigkeit (Auftriebsmittelpunkt) und der Schwerpunkt S des Körpers müssen senkrecht übereinanderliegen. Wäre es nicht so, so wäre ein Kräftepaar vorhanden, das den Körper in Drehung versetzte. Es ist noch die Frage nach der Stabilität zu klären. Gegen Verschieben wagerecht und senkrecht ist das Gleichgewicht indifferent, wenn das Volumen des Körpers sich mit dem Druck nicht merklich ändert. Ist aber das Volumen durch die Elastizität des Körpers mit dem Druck veränderlich, nimmt es also bei zunehmendem Druck merklich ab, so ist das Gleichgewicht in der Senkrechten instabil (in der Tiefe mehr Druck, also weniger Volumen und daher weniger Auftrieb, daher weiteres Sinken).

Ein Beispiel für den oben geschilderten Zustand ist der cartesianische Taucher, ein teilweise mit Luft gefüllter Hohlkörper mit einer Öffnung unten (l in Fig. 812). Wird der Flüssigkeitsdruck gesteigert, was bei dem Apparat in Fig. 812 durch Drücken auf die abschließende Gummimembran oben bewirkt werden kann, dann dringt Flüssigkeit durch die Öffnung in den Körper ein und drückt die darin befindliche Luft zusammen, wodurch er zum Sinken gebracht wird. Bei Entlastung steigt er wieder. Wird der Druck so eingestellt, daß der Körper in der Mitte des Gefäßes im Gleichgewicht ist, dann wird er nach oben steigen, wenn er über der Mitte war, und zu Boden sinken, wenn er unter der Mitte war.

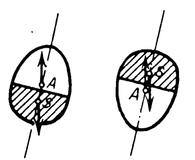
Fig. 812.



Cartesianischer Taucher.

Zur Frage, ob die in den Taucher eingedrungene Flüssigkeit zum Tauchergewicht oder zur umgebenden Flüssigkeit gerechnet werden muß, ist zu sagen, daß beides zulässig ist. Entweder man rechnet mit konstantem Auftriebsvolumen und betrachtet die eingedrungene Flüssigkeit als Gewichtsvermehrung, oder man rechnet die eingedrungene Flüssigkeit als zu der umgebenden gehörig, mit der sie durch das Loch im Zusammenhang bleibt, und findet dann, daß sich das Auftriebsvolumen geändert hat. Das Endergebnis ist in beiden Fällen genau das gleiche.

Fig. 813. Fig. 814.



Stabiles und labiles Gleichgewicht eines in Flüssigkeit untergetauchten Körpers.

Weiter ist zu entscheiden, wann das Gleichgewicht in bezug auf Drehungen stabil oder labil ist. Die Antwort ist bei untergetauchten Körpern nicht schwer. Man braucht bloß das Kräftepaar zu betrachten, das entsteht, wenn man den Körper aus der Gleichgewichtslage, in der die Punkte A und S senkrecht übereinanderliegen, ein wenig verdreht. Aus Fig. 813 und Fig. 814 geht ohne weiteres hervor, daß ein in die Gleichgewichtslage zurückdrehendes Kräftepaar nur dann entsteht, wenn der Auftriebsmittelpunkt über dem Schwerpunkt liegt. Nur dann ist also stabiles Gleichgewicht vorhanden. Auf an der Oberfläche schwimmende, nur teilweise eingetauchte Körper ist diese Überlegung nicht mehr anwendbar, da bei diesen die Gestalt der verdrängten Wassermasse bei Verdrehung des Körpers nicht mehr unveränderlich ist.

b) An der Oberfläche schwimmende, nur teilweise eingetauchte Körper. Das Gleichgewicht gegen lotrechte Verschiebungen ist hier dann vorhanden, wenn der eingetauchte Teil so viel Flüssigkeitsgewicht verdrängt, als der ganze Körper wiegt. Dieses Gleichgewicht ist regelmäßig stabil, da beim Tiefertauchen das Volumen des eingetauchten Teiles wächst und damit ein Auftriebsüberschuß entsteht, der den Körper in eine höhere Lage zurückführt. Im Schiffbau bilden die Ermittlungen des verdrängten Volumens für jeden Tiefgang (des „Deplacements“) und sorgfältige Gewichtsberechnungen eine wichtige Rolle. Ein näheres Eingehen hierauf erübrigt sich für uns. Eine physikalisch wichtige Anwendung des Schwimmens teil-

weise eingetauchter Körper stellen die Aräometer dar, die zur Ermittlung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten dienen, vgl. Kap. XIII, § 2. Wir wenden uns jetzt zu der Frage nach dem Gleichgewicht gegen Verdrehung, die besonders für die Beurteilung der Stabilität von Schiffen von Wichtigkeit ist. Zunächst ist wieder zu fordern, daß Auftriebsmittelpunkt A und Schiffsschwerpunkt S in einer Senkrechten liegen. Für die Stabilität ist es nun nicht erforderlich, daß der Schiffsschwerpunkt unter dem Auftriebsmittelpunkt liegt, und es ist auch bei den Schiffen, von gewissen schnellen Segelfahrzeugen abgesehen, nicht der Fall[1]). Entscheidend ist hier wieder die Lage des Kräftepaares, das bei einer geringen Verdrehung des Schiffes entsteht. Das Neue gegenüber dem völlig untergetauchten Körper ist aber das Auswandern des Auftriebsmittelpunktes nach der Seite durch Änderung der Lage und Gestalt des eingetauchten Volumens. Fig. 816 zeigt, daß durch die Schräglage („Krängung") gegenüber der Gleichgewichtslage (Fig. 815) auf der rechten Seite ein keilförmiges verdrängtes Volumen neu hinzugekommen ist und auf der linken Seite ein entsprechendes Stück fortgefallen ist. Der Auftriebsmittelpunkt (Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse) rückt dadurch von A nach A'. Die Strecke $AA' = a$ ist von der Neigung φ des Schiffes abhängig, bei kleinen Neigungen ihr proportional. Eine von der Größe der kleinen Neigung unabhängige Angabe erhält man offenbar, wenn man den Schnittpunkt M zwischen der neuen Auftriebsrichtung und der Schiffsmittellinie AS aufsucht. Betrachtet man das Kräftepaar, das aus dem in S angreifenden Gewicht und dem in A' angreifenden Auftrieb besteht, so erkennt man leicht, daß dieses Kräftepaar immer dann im Sinne eines Wiederaufrichtens das Schiff dreht, wenn der Punkt M über dem Schwerpunkt S liegt. Würde man das ganze Schiff aus dem Wasser ziehen und im Punkt M pendelnd aufhängen, so würde bei einer Verdrehung dasselbe Kräftepaar auftreten, wie es sich hier ergeben hat. Man nennt den Punkt M das Metazentrum, und die gesuchte Stabilitätsbedingung lautet also, daß **das Metazentrum über dem Schwerpunkt liegen muß.**

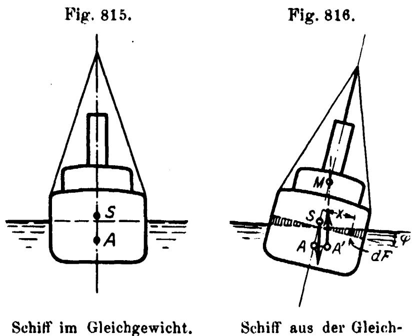


Fig. 815. Schiff im Gleichgewicht.

Fig. 816. Schiff aus der Gleichgewichtslage herausgedreht.

Zu einer Berechnung des Metazentrums ist noch die Kenntnis der Strecke $a = \overline{AA'}$ erforderlich. Wir wenden den Momentensatz für die auf der senkrechten Schiffsmittelebene gelegene Schnittlinie zwischen der alten und der neuen Wasserfläche in Fig. 816 als Momentenachse an. Das verdrängte Volumen sei V, die Auftriebskraft daher γV; ihre Verschiebung um a bedeutet ein Drehmoment

[1]) Eine Ausnahme bilden auch die Unterseeboote, die der Unterwasserfahrt wegen einen tiefliegenden Schwerpunkt haben müssen.

$\gamma V a$, das hervorgerufen wird von dem Auftrieb des neueingetauchten und dem Abtrieb (verschwundenen Auftrieb) des ausgetauchten Keiles. Ist dF ein Flächenelement der „Wasserlinienfläche"[1]), das von der Mittelebene des Schiffes um x abliegt, so ist bei einem kleinen Neigungswinkel φ (im Bogenmaß gerechnet) die Höhe des kleinen Volumenteils $= x\varphi$, sein Auftrieb $\gamma x \varphi dF$, und sein Moment $\gamma x^2 \varphi dF$. Die Auftriebe der linken Seite sind negativ, die Hebelarme aber auch, so daß die Beiträge zum Moment wieder positiv sind. Es ergibt sich also

$$\gamma V a = \gamma \varphi \int x^2 dF = \gamma \varphi J,$$

wo J das Trägheitsmoment der Wasserlinienfläche bezogen auf deren Schwerpunktsachse bedeutet (es muß ebensoviel Volumen eintauchen wie austauchen; daraus folgt leicht, daß die Drehachse durch den Schwerpunkt der Wasserlinienfläche gehen muß). Somit wird $a = \frac{\varphi J}{V}$. Aus der Fig. 816 kann leicht die Beziehung abgelesen werden, daß $a = \overline{AM} . \varphi$ ist. Damit wird aber

$$\overline{AM} = \frac{J}{V}.$$

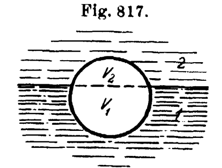
Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst.

Handelt es sich um einen Körper, der an der Grenze zwischen einer schwereren und einer leichteren Flüssigkeit schwimmt, so liefert die sinngemäße Übertragung unserer früheren Überlegungen leicht das Folgende: Verdrängt der Körper von der schweren Flüssigkeit (Raumgewicht γ_1) ein Volumen V_1 und von der leichteren (Raumgewicht γ_2) ein Volumen V_2, so kommt ein Gesamtauftrieb

$$A = V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2$$

zustande. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß die beiden Flüssigkeitskörper, die vorher den Platz unseres Körpers eingenommen haben, dort im Gleichgewicht waren. Es läßt sich aber auch vom Standpunkt der Druckverteilung auf den Körper ohne Rechnung einsehen. Wir denken uns den Körper längs der Trennungsebene der beiden Flüssigkeiten gespalten (Fig. 817), so daß der in dieser Ebene vorhandene Druck sich in den Spalt hinein fortpflanzt. Dann befindet sich jeder der beiden Teile V_1 und V_2 in nur je einer Flüssigkeit und erfährt den entsprechenden Auftrieb. Eine nachträgliche starre Verbindung beider Teile zu einem Körper, bei der die Druckkräfte im Spalt, die sich gegenseitig aufheben, zu inneren Kräften werden, ändert nichts an dem Resultat. Wird der Körper ganz in die Flüssigkeit 1 untergetaucht, so ist sein Auftrieb $A_1 = \gamma_1 V$; wird er ganz in die Flüssigkeit 2 gehoben, so ist er $A_2 = \gamma_2 V$ ($V = V_1 + V_2$ Gesamtvolumen). Damit er an der Grenze zwischen beiden Flüssigkeiten zum Schwimmen kommt, muß sein Gewicht G zwischen A_1 und A_2 liegen: $A_1 > G > A_2$. Da man $V_2 = V - V_1$ setzen kann, ist auch $A = \gamma_2 V + (\gamma_1 - \gamma_2) V_1 = A_2 + (\gamma_1 - \gamma_2) V_1$. Diese Beziehungen sind auch auf den Fall anwendbar, daß die Flüssigkeit 2 die uns umgebende Luft ist. A_2 ist dann der Luftauftrieb, der sich den Wägungen an der Waage entzieht, solange es nicht möglich ist, eine Wägung im Vakuum

Fig. 817.



Schwimmen an der Grenze zweier Flüssigkeiten.

[1]) „Wasserlinie" ist die Schnittlinie der Wasseroberfläche mit der Außenfläche des Schiffes.

hinzuzunehmen. Der beim Eintauchen in Flüssigkeit neu hinzukommende Auftrieb ist dann

$$A_1 - A_2 = (\gamma_1 - \gamma_2) V,$$

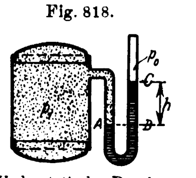
was bei sehr genauen Bestimmungen des spezifischen Gewichts zu beachten ist.

§ 15. Wechselwirkung von Luftdruck und Flüssigkeitsdruck; Flüssigkeitsmanometer. Den Druckunterschied der Luft in einem Gefäß gegenüber der äußeren atmosphärischen Luft kann man, solange er nicht zu groß ist, sehr gut durch ein teilweise mit einer Flüssigkeit gefülltes U-förmiges Rohr messen, vgl. Fig. 818. Sieht man von dem Eigengewicht der Luft ab, so ergeben sich dabei folgende Beziehungen. An der Stelle A ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Luftdruck im Gefäß, p_1. In dem anderen Schenkel des „U-Rohres" ist in gleicher Höhe, also bei B, derselbe Druck vorhanden (kommunizierende Gefäße!); der freie Flüssigkeitsspiegel in diesem Gefäß sei bei C; dort ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Druck der Atmosphäre, p_0. Nach den Beziehungen von § 9 ist nun, wenn die Höhe $\overline{BC} = h$ gesetzt wird,

$$p_1 = p_0 + \gamma h.$$

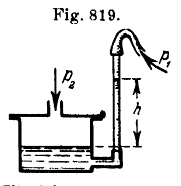
Das mit Flüssigkeit gefüllte U-Rohr ist also zum Messen solcher Druckunterschiede sehr geeignet. Es wird in verschiedenen Abänderungen praktisch angewandt. Um nicht an zwei Stellen (A und C in Fig. 818) Flüssigkeitshöhen ablesen zu müssen, gestaltet man häufig den einen Schenkel zu einem weiten Topf um, in dem dann die Spiegelbewegung sehr klein wird (vgl. Fig. 819). Für Ausführung der „Nullablesung" muß man hier beide Öffnungen mit der Atmosphäre verbinden. Für sehr kleine Druckunterschiede wendet man eine verfeinerte Höhenablesung (mit einer Art Kathetometer oder mit Beobachtung einer auf Berührung der Flüssigkeitsoberfläche einzustellenden Spitze mit einer Lupe) an, oder man verwendet geneigte Glasröhren wie bei der Töplerschen Drucklibelle (Fig. 820), oder bei dem Krellschen „Mikromanometer" (Fig. 821). Einer Verschiebung der Flüssigkeitssäule in dem Rohr um den Betrag x entspricht bei beiden Instrumenten eine Spiegelhöhenänderung von $h = x \sin \alpha$ und daher ein Druckunterschied $p_2 - p_1 = \gamma x \sin \alpha$. Dabei ist es aber nicht leicht, die kleine Neigung α

Fig. 818.



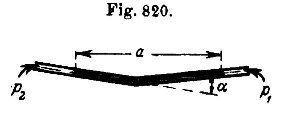
Hydrostatische Druckmessung (U-Rohr).

Fig. 819.



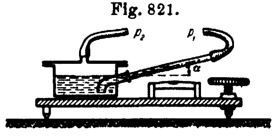
Flüssigkeitsmanometer.

Fig. 820.



Töplersche Drucklibelle.

Fig. 821.



Mikromanometer.

genügend genau zu bestimmen; man kann sich auch nicht ohne Prüfung auf die unbedingte Geradheit der Röhren verlassen. Deshalb empfiehlt sich für genauere Messungen eine Eichung.

Beim Krellschen Mikromanometer kann diese so vorgenommen werden, daß man zunächst den Durchmesser d des genau zylindrisch ausgedrehten Topfes mißt, und dann, nachdem die auf dem Grundbrett des Instruments angebrachte Libelle sorgfältig eingestellt ist, mehrmals passende abgewogene Mengen der Flüssigkeit in den Topf nachgießt und den jeweils zugehörigen Stand der Flüssigkeit im Rohr an der Skala abliest. Die zugegossenen Mengen breiten sich in dem Topfe aus und belasten so den ursprünglichen Flüssigkeitsspiegel mit einem Druck gleich dem abgewogenen Gewicht dividiert durch die Kreisfläche $\frac{\pi}{4} d^2$. Das Gleichgewicht des ursprünglichen Flüssigkeitssystems ist dabei dasselbe, als wenn ein gleicher Druck von der Luft ausgeübt worden wäre. Daß in Wirklichkeit die zugegossene Flüssigkeit sich mit der bereits im Topfe befindlichen mischt, ist für unsere Überlegung belanglos. Aus den zusammengehörigen Drucken und Flüssigkeitsständen läßt sich dann eine „Eichkurve“ oder Eichtabelle ableiten.

Die Töplersche Drucklibelle läßt sich als äußerst empfindliches Gerät für kleinste Druckdifferenzen ausgestalten, wenn man die von Töpler selbst[1]) angegebenen Feinheiten beachtet. Die Röhre rr' in Fig. 822 enthält einen etwa 25 cm langen Faden einer nicht flüchtigen, leicht beweglichen Flüssigkeit (Xylol) und befindet sich in einem Wasserbade W mit Glaswänden unmittelbar vor einer Millimeterteilung. Das Bad selbst ruht auf einer Metallplatte p, deren Neigung mittels der Schraube s verstellt werden kann; die Verdrehung der Schraube kann an einem Index abgelesen werden. Da die Ganghöhe der Schraube bekannt ist, kann hiermit auch die Neigung der Platte p ermittelt werden. Ein an der Platte p befestigtes Mikroskop M gestattet die rechtsseitige Kuppe der Flüssigkeit in ihren Bewegungen zu beobachten. Ist die Nullstellung der Drucklibelle abgelesen (gleicher Druck bei r und r'), so läßt sich eine eintretende Druckdifferenz durch die Verschiebung der Flüssigkeitskuppe oder durch die Schraubendrehung, die sie rückgängig macht, messen. Die für die erstere Beobachtungsart erforderliche Eichung wird dadurch erhalten, daß die bei Verdrehung der Schraube s ohne Druckdifferenz erfolgende Kuppenverschiebung beobachtet und mit dem Neigungswinkel φ, der durch die Schraubenbewegung hervorgerufen wird, in Beziehung gebracht wird. Ist die Entfernung der beiden Enden des Flüssigkeitsfadens $= a$, so ist die hydrostatisch wirksame Höhendifferenz $h = a \sin \varphi$. Töpler konnte bei besonders empfindlicher Einstellung (sehr kleinem Knickwinkel α) noch Druckdifferenzen von 10^{-8} kg/cm² $= 10^{-4}$ kg/m² nachweisen. (Der Knick ist in Fig. 822 in der Gegend des Buchstaben W zu denken; er ist nicht gezeichnet.)

Fig. 822.

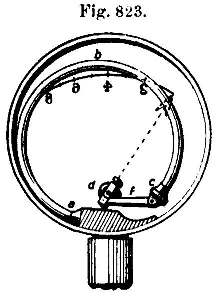
Töplersche Drucklibelle.

Die Verwendung der Flüssigkeitsmanometer hat zu einer besonderen Art von Druckeinheiten geführt, die praktisch sehr viel verwendet werden. Es liegt nahe, den Druck durch die Höhe der Flüssigkeitssäule selbst zu messen; man spricht deshalb, da die verschiedenen Flüssigkeiten ihres verschiedenen Raumgewichts wegen unterschieden werden müssen, von „Millimeter Wassersäule“, „Millimeter Quecksilber“, abgekürzt mm WS, mm QS usw. Es ist 1 mm WS $= 1$ kg/m² $= 10^{-4}$ kg/cm², wie leicht durch Nachrechnen zu bestätigen ist (eine Wassermenge von 1 m² Grundfläche und 1 mm Höhe hat gerade 1 Liter Inhalt und wiegt 1 kg). Die erstere Beziehung ist besonders bequem zu merken; sie hat dem Druckmaß 1 kg/m² zu einer weiten Verbreitung in der Technik (Lüftungstechnik, Flugtechnik usw.) verholfen. Dabei ist Wasser als Meßflüssigkeit sehr wenig geeignet, sobald es sich um höhere

[1]) Wiedem. Ann. **34**, 790, 1888 und **56**, 609, 1895.

Ablesegenauigkeit handelt, da es leicht unregelmäßig an den Wänden des Glasrohres hängt. Sehr viel besser sind alle fettlösenden Flüssigkeiten (Alkohol, Toluol, Xylol usw.). Für größere Druckunterschiede empfiehlt sich Quecksilber, das in reinem Zustand sehr saubere Einstellung in einem nicht zu engen Glasrohre liefert. Wegen des spezifischen Gewichtes 13,6 (genauer 13,595 bei 0°) ist 1 mm QS = 13,6 kg/m² = 0,001 36 kg/cm². Umgekehrt ist 1 kg/cm² = 735,5 mm QS. Die Druckeinheit 1 mm QS wird aus meßtechnischen Gründen von den Physikern stark bevorzugt. Neuerdings wurde für sie die Bezeichnung „1 Tor" vorgeschlagen (zu Ehren von Toricelli, siehe § 16).

Fig. 823.

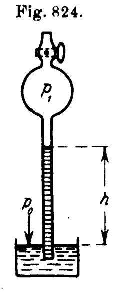


Röhrenfedermanometer.

Der Vollständigkeit halber seien noch die Federmanometer erwähnt, die besonders als Meßgeräte für hohe Drucke verwendet werden. Die verbreitetste Konstruktion ist das Röhrenfedermanometer (Fig. 823), dessen wichtigster Teil eine kreisförmig gebogene Metallröhre von elliptischem Querschnitt, ein sogenanntes Bourdonrohr (*b* in Fig. 823) ist. Solche Röhren haben die Eigenschaft, sich unter der Wirkung eines inneren Überdrucks zu strecken, was daher rührt, daß der elliptische Querschnitt sich durch den Innendruck der Kreisform zu nähern strebt, also sich aufbläht. Die Röhre *b* ist bei *a* festgelötet, das andere Ende, *c*, schwebt frei und bewegt durch das Zwischenglied *f* den Hebel *d*, an dem der Zeiger befestigt ist. Derartige Manometer werden bis zu Drucken von mehreren hundert Atmosphären ausgeführt. Sie bedürfen, wie alle Federinstrumente, der Eichung, die bei mäßigen Drucken mit einer Quecksilbersäule, sonst mit einer Holbornschen Druckwaage ausgeführt werden kann.

§ 16. Unterdruck. Barometer. Pumpt man aus dem Gefäß von Fig. 818 etwas Luft heraus, so daß der Druck dort kleiner wird als der äußere Atmosphärendruck, so wird die Flüssigkeit in dem Schenkel *A* des U-Rohres höher stehen als in dem Schenkel *B*, sie wird, wie man sagt, „in die Höhe gesaugt". Eine etwas abgeänderte Anordnung für das gleiche Experiment zeigt Fig. 824.

Fig. 824.



Man spricht in dem Fall der Fig. 818 von „Überdruck" in dem Gefäß, in dem Fall der Fig. 824 von „Unterdruck", und zwar versteht man unter der Zahlenangabe für den Überdruck oder Unterdruck jeweils die Druckdifferenz gegen die äußere Atmosphäre, die durch die Höhe *h* der Flüssigkeitssäule in Fig. 818 bzw. 824 gemessen wird.

Vom physikalischen Standpunkt erhebt sich nun die Frage, wie hoch es gelingt, eine Flüssigkeit in die Höhe zu saugen. In alter Zeit machte man sich für das Ansteigen einer Flüssigkeit beim Saugen eine „Erklärung", indem

man von einem „horror vacui“, von einer „Scheu vor dem Leeren“ sprach, und man fühlte sich mit diesem Wort, das schließlich nur die Tatsache feststellte, zufrieden. Ob der horror vacui beliebig stark war oder Grenzen hatte, darüber wurden keine Untersuchungen angestellt. Das Mißgeschick von Florentiner Pumpenmachern, die bei einer Wasserpumpe das Saugventil mehr als 10 m über dem Wasserspiegel anbrachten und dann durch alle Mühe das Wasser nicht so hoch bringen konnten, gab den Anstoß, daß Galilei sich mit der Sache befaßte. Indessen hat erst sein Schüler Toricelli auf Grund eines Experiments mit Quecksilber, das auf seine Anregung hin sein Freund Viviani 1643 gemacht hatte, den richtigen Sachverhalt erkannt.

Von unserem Standpunkt aus ist die Antwort auf die oben gestellte Frage nicht schwer. Saugen ist nichts anderes, als weniger stark drücken, als die äußere Atmosphäre drückt. Den Druck in dem Gefäß von Fig. 824 kann man nicht kleiner machen, als er wird, wenn sämtliche Luft aus dem Gefäß weggepumpt wird. Er ist dann gleich Null. Die Flüssigkeitssäule kann also höchstens so hoch steigen, daß ihre Höhe h dem vollen Luftdruck p_0 entspricht: $h = \frac{p_0}{\gamma}$. Das erwähnte Experiment Vivianis bestand nun darin, daß er eine zwei Ellen (120 cm) lange Glasröhre mit an einem Ende angeblasener Kugel von dem anderen, offenen Ende her ganz mit Quecksilber füllte und nun dieses Ende mit dem Finger verschloß, dann die Röhre umkehrte und mit dem Ende in ein flaches Gefäß mit Quecksilber brachte. Wurde nun der Finger weggezogen, so sank das Quecksilber, einen leeren Raum zurücklassend, auf $1^1/_4$ Elle (75 cm) über dem Quecksilberspiegel. Toricelli schloß daraus richtig, daß die so beobachtete Quecksilbersäule dem äußeren Luftdruck, oder wie man auch sagen kann, dem Gewicht einer Luftsäule vom gleichen Querschnitt, die bis an die Grenzen der Atmosphäre reicht, Gleichgewicht hält. Toricelli beobachtete auch schon, daß die Quecksilbersäule nicht immer dieselbe Höhe hatte, und schloß daraus, daß der Luftdruck gewissen Schwankungen unterworfen sei. Diese Tatsache ist für die Meteorologie von großer Wichtigkeit geworden. Toricelli schloß auch bereits, daß der Luftdruck auf einem Berge geringer sein müsse als im Tal und deshalb die Quecksilbersäule dort niedriger stehen müsse als unten. Den Nachweis hierfür hat einige Jahre später Perrier auf Anregung von Pascal erbracht, indem er die Höhe der Quecksilbersäule auf dem Puy de Dome und am Fuße dieses 975 m hohen Berges maß und einen Unterschied von 3 Zoll in dem verlangten Sinne feststellte. Von Pascal stammt auch der Name Barometer für das Gerät, der sich allgemein eingebürgert hat. Dieser Name (vom griechischen barys = schwer) deutet an, daß mit diesem Instrument das Gewicht der über dem Ort lagernden Luftsäule gemessen wird.

Über die heutigen Ausführungsformen des Barometers und über die Art, wie man bei genauen Messungen mit dem Barometer verfahren muß, wird in Kap. XIV, § 15 bis 24 berichtet werden. Hier sei nur noch eine auf das Barometer begründete Druckeinheit besprochen, die sogenannte „physikalische Atmosphäre“. Der mittlere Barometerstand in der Höhe des Meeresspiegels

beträgt rund 760 mm QS. Man ist übereingekommen, diesen Barometerstand bei 0° Quecksilbertemperatur als Normalzustand der Atmosphäre anzusehen und nennt den zugehörigen Luftdruck auch „eine Atmosphäre". Der Zusatz „physikalisch" wird gemacht, weil, wie bereits früher erwähnt, die von den Ingenieuren verwendete technische Atmosphäre = 1 kg/cm² daneben steht. Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° C = 13,595 ist, also 1 cm³ 13,595 g wiegt, entspricht einer Quecksilbersäule von 76 cm ein Druck von

$$76 \,.\, 13{,}596 = 1033{,}2 \text{ g/cm}^2 = 1{,}0332 \text{ kg/cm}^2.$$

Diesem Druck entspricht, wie hier angemerkt werden mag, eine Wassersäule von 10,332 m Höhe („Wasserbarometer"). Die Saughöhe von Pumpen muß also geringer sein als dieser Betrag (wegen schädlicher Räume und Undichtheiten zweckmäßig nicht über 6 bis 7 m).

Da in der vorstehenden Definition der physikalischen Atmosphäre die Erdanziehung eine Rolle spielt, und diese nicht an allen Stellen der Erde denselben Wert hat, muß für höhere Genauigkeitsbedürfnisse bei der Definition der Druckeinheiten ein bestimmter Wert der Erdbeschleunigung g zugrunde gelegt werden. Man hat als Normalschwere den Wert 980,665 cm/s², nämlich den Wert, der dem 45. Breitengrad im Meeresniveau entspricht, festgesetzt. Unter einer anderen Schwere (= g) wird damit die Normalatmosphäre durch $\frac{1{,}0332 \,.\, 980{,}665}{g}$ örtliche Kilogramm auf das Quadratzentimeter gemessen. Um von diesen etwas willkürlichen Festsetzungen frei zu werden, hat man eine an das CGS-System angeschlossene Druckeinheit vorgeschlagen, und zwar wird das Millionenfache der Druckeinheit 1 Dyn/cm² als „Bar" bezeichnet. Dem Bar entspricht bei der Normalschwere eine Quecksilbersäule von 750,06 mm Höhe.

Fig. 825.

Apparat zur Nachprüfung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes.

Im Anschluß an das Manometer und das Barometer sei hier noch ein Apparat zur Nachprüfung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes erwähnt, bei dem die erläuterten Druckmeßmethoden zur Anwendung kommen. An der Säule (Fig. 825), die auf einem Dreifuß steht, sind die beiden Glasröhren A und B, die durch einen festen Schlauch S verbunden sind, senkrecht verschieblich angeordnet. Die Röhre A ist oben geschlossen und trägt eine Volumenteilung, die Röhre B ist oben offen. Die Röhre A ist unterhalb des Hahnes R abschraubbar und wird für die Messungen zum Teil mit dem zu untersuchenden Gase, zum Teil mit Quecksilber gefüllt und dann auf den vollständig mit Quecksilber gefüllten Schlauch luftfrei aufgeschraubt. Man

stellt nun durch Verändern der Höhenlage der Röhren die beiden Quecksilberkuppen gleich hoch und liest das Gasvolumen ab, das Gas steht jetzt unter dem derzeitigen Atmosphärendruck, der an einem in gleicher Höhe angebrachten Barometer abzulesen ist. Verschiebt man nun die Röhre *B* nach oben, oder unten, so wird das Gas durch die Quecksilbersäule zusammengedrückt oder es dehnt sich durch den nachlassenden Druck aus. Der Höhenunterschied der beiden Quecksilberkuppen zu dem Barometerstand addiert bzw. von ihm subtrahiert, liefert die zugehörigen Drucke. Es zeigt sich, daß diese sich ziemlich genau umgekehrt verhalten wie das Volumen.

§ 17. Verschiedene Versuche über die Wirkung des Unterdrucks und Überdrucks. Heber, Heronsbrunnen. Wenn man eine ganz oder zum Teil mit Wasser gefüllte Flasche rasch umkehrt und ihre Öffnung unter Wasser bringt, dann läuft nichts mehr aus. Dazu müßte Luft in die Flasche

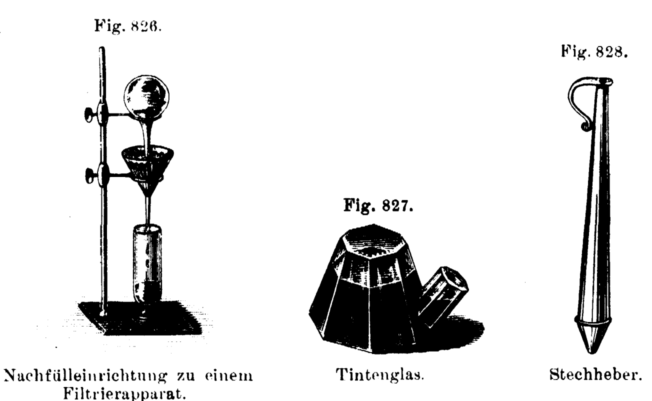


Fig. 826. Nachfülleinrichtung zu einem Filtrierapparat.

Fig. 827. Tintenglas.

Fig. 828. Stechheber.

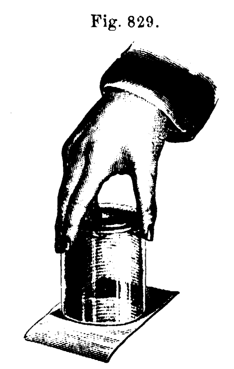
gelangen, was nicht möglich ist, solange die Öffnung völlig unter Wasser ist. Die in der Flasche über dem Wasser befindliche Luft steht durch die verschiedene Höhe des Wasserspiegels in und außerhalb der Flasche unter geringerem Druck als die äußere Atmosphäre, und dieser Druckunterschied ist es, der die Wassersäule in der Flasche trägt. Man hat sich diesen Vorgang in verschiedener Weise zunutze gemacht. Die Fig. 826 zeigt eine Einrichtung zum Filtrieren einer Flüssigkeit, die des häufigen Nachgießens dadurch enthebt, daß aus der umgekehrten Flasche nur dann etwas ausfließen kann, wenn der Flüssigkeitsspiegel im Trichter so weit gesunken ist, daß eine Luftblase in den Flaschenhals eindringen kann. Der Trichter wird also dauernd bis zur gewünschten Höhe voll gehalten, solange noch Flüssigkeit in der Flasche ist. Das Tintenglas (Fig. 827), in dessen Hals die Tinte immer ungefähr gleich hoch steht, ist ein anderes Ausführungsbeispiel desselben Grundgedankens.

Der Stechheber (Fig. 828) wird so verwendet, daß man ihn in die Flüssigkeit, von der man ein Quantum entnehmen will, hineinsenkt, wobei er sich durch seine kleine untere Öffnung füllt, während durch die obere die

Luft entweicht. Hält man jetzt mit dem Daumen die obere Öffnung zu, so kann man den Heber herausziehen, ohne daß Flüssigkeit aus ihm ausfließt; dies ist erst der Fall, wenn man das obere Loch wieder freigibt. Hier bewirkt die Kapillarspannung der Flüssigkeitsoberfläche, daß in der unteren Öffnung hier keine Luft an der Flüssigkeit vorbei eindringt, wie es bei einer weiteren Öffnung der Fall wäre. Die Kapillarspannung stabilisiert also sozusagen die freie Oberfläche, die sonst, da ja die schwere Flüssigkeit sich über der leichteren (nämlich der Luft) befindet, labil wäre.

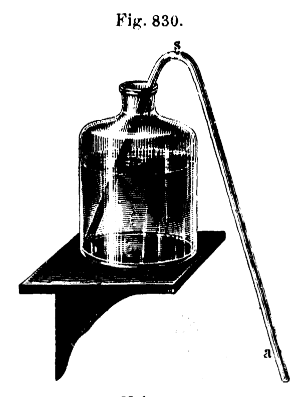
Ähnlich ist es bei dem bekannten Versuch, daß man ein mit einem Papier bedecktes Wasserglas umkehren kann, ohne daß das Wasser in größerem Maße ausfließt[1]), vgl. Fig. 829; die Stabilisierung der schwereren Flüssigkeit über der leichteren wird hier durch die Steifigkeit des Papierblattes erreicht.

Fig. 829.



Versuch mit dem umgedrehten Wasserglas.

Fig. 830.



Heber.

Verschwindet diese durch allmähliches Aufweichen des Papiers, so stürzt das Wasser, besonders wenn das Glas nicht genau wagerecht gehalten wird, heraus. Bemerkenswerterweise gelingt das Experiment auch, wenn man statt des Papiers ein (nicht zu schweres) Sieb verwendet. Das einzelne Siebloch verhält sich dabei ebenso wie das untere Loch des Stechhebers.

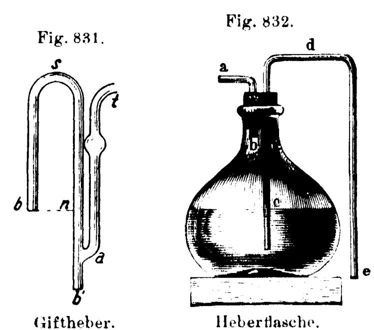
Der Heber, eine gekrümmte Röhre mit zwei ungleichlangen Schenkeln (Fig. 830), wird in der Weise verwendet, daß man durch Saugen bei a die Röhre mit Flüssigkeit anfüllt, worauf diese zu fließen beginnt und so lange weiterfließt, bis die Luft Zutritt zu der Öffnung b erhält. Die genaueren Umstände dieses Vorgangs lassen sich am einfachsten übersehen, wenn man sich bei gefülltem Heber die Öffnung bei a verschlossen denkt. Dann bildet das Innere der Flasche und das des Hebers ein zusammenhängendes, von einer ruhenden Flüssigkeit erfülltes Gebiet; der Druck ist dann hydrostatisch ver-

---

[1]) Ein wenig Wasser wird, wenn das Glas nicht völlig luftfrei gefüllt ist, ausfließen, da die Luft in dem Glase sich etwas ausdehnen muß, um den erforderlichen Unterdruck anzunehmen.

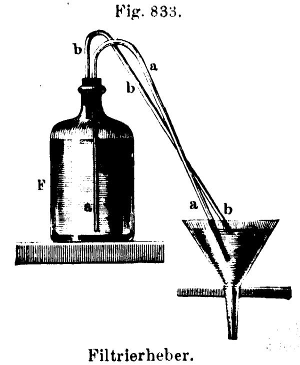
teilt, er ist in der Höhe des Flüssigkeitsspiegels in der Flasche gleich dem Luftdruck, darüber ist er kleiner und darunter größer. Bei *a* herrscht demnach ein Überdruck entsprechend der Höhendifferenz gegen den Spiegel. Öffnet man nun, so muß offenbar Wasser bei *a* ausfließen. Diese Betrachtungsart führt auch zu dem Schluß, daß es, um den Heber in Gang zu bringen, genügt, soviel Flüssigkeit durch Saugen über den Punkt *s* herüberzuheben, bis das Ende des Flüssigkeitsfadens sich ein wenig unterhalb des Spiegels in der Flasche befindet.

Eine Abart des Hebers ist der „Giftheber" (Fig. 831), mit dem man ohne Gefahr ätzende und giftige Flüssigkeiten ansaugen kann. Man senkt den Schenkel *b* in die zu entleerende Flasche und verschließt zunächst die Öffnung *b'*. Saugt man nun mit dem Munde bei *t*, bis die über *s* herübergehobene Flüssigkeit in dem mittleren Rohre tiefer steht als der Spiegel in der Flasche, so läuft dieses voll und füllt auch das Mundrohr bis zur Spiegelhöhe. Wird nun bei *b'* geöffnet, so fließt der Heber.



Giftheber. Heberflasche.

Lehrreich ist auch die Einrichtung Fig. 832. Hier wird der Heber *cde* dadurch in Gang gebracht, daß man bei *a* in das kurze Winkelrohr *ab* hineinbläst, wodurch unter der Voraussetzung, daß der Kork, durch den die beiden Röhren hindurchgeführt sind, dicht schließt, der Luftdruck in der Flasche erhöht wird und die Flüssigkeit in dem Rohr *cd* hochsteigt und nach *e* zu überfließt. Der nun fließende Heber kann wieder angehalten werden, wenn man die Öffnung *a* mit dem Daumen verschließt. Vorher fließt noch die kleine Flüssigkeitsmenge aus, die nötig ist, um die Luft in der Flasche auf den Unterdruck expandieren zu lassen, der der Flüssigkeitssäule von der Höhe *ce* entspricht. Beim erneuten Öffnen fließt der Heber wieder. Man kann ihn abstellen, wenn man durch Saugen bei *a* die Flüssigkeit in dem Rohr *de* nach *c* zurückholt.



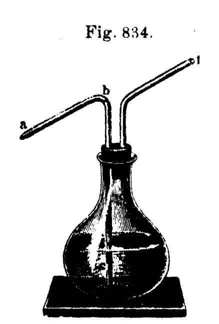
Filtrierheber.

Eine interessante Abänderung der eben besprochenen Einrichtung ist der Filtrierheber (Fig. 833). Die Röhre *aa* ist der Heber, die Röhre *bb* entspricht der Röhre *ab* von Fig. 832. Der Heber hört hier jedesmal zu laufen auf, wenn die Flüssigkeit im Trichter das Ende von *b* erreicht hat. In den Pausen steigt

diese in b bis zur Höhe des Spiegels in der Flasche. Das Fließen beginnt wieder, sobald Luftblasen in b eindringen können.

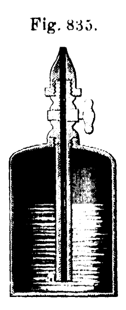
Durch Überdruck, der in dem Luftraum einer teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Flasche erzeugt wird, läßt sich die Flüssigkeit emporheben, wie schon gelegentlich der Beschreibung der Einrichtung Fig. 832 erwähnt wurde. Die Spritzflasche der Chemiker (Fig. 834) ist ein verwandtes Beispiel hierfür. Der Heronsball, dem Grundgedanken nach ähnlich der Spritzflasche, ist in Fig. 835 in einer Ausführungsart wiedergegeben. In die zur Hälfte mit Wasser gefüllte Flasche wird durch kräftiges Blasen mit dem Munde, oder noch besser mit einer Kompressionspumpe, Luft hineingedrückt und der Hahn geschlossen. Man würde, wenn man an die Mündung ein senkrechtes Rohr anschließt, nach Öffnen des Hahns das Wasser durch die Wirkung des Luftdrucks in der Flasche zu einer Säule von beträchtlicher Höhe ansteigen lassen können. Wenn man es statt dessen durch eine Öffnung frei austreten läßt, wird es in einem Strahl von ähnlicher Höhe (geringer wegen Reibung und Luftwiderstand) herausspritzen. Eine

Fig. 834.



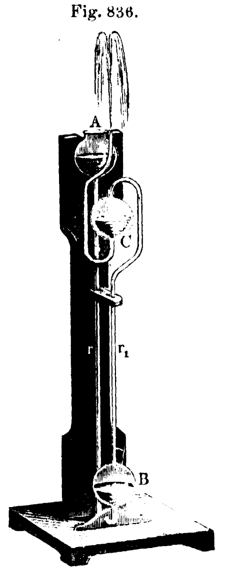
Spritzflasche.

Fig. 835.



Heronsball.

Fig. 836.



Heronsbrunnen.

Einrichtung ähnlich dem Heronsball ist der Druckwindkessel der Feuerspritzen und anderer Druckwasserpumpen.

Der Heronsbrunnen (Fig. 836) kann als die Verbindung eines Heronsballes (C) mit einem Drucklufterzeuger (AB) aufgefaßt werden. Die Luft in dem Gefäß B steht unter dem Überdruck, der durch die Wassersäule im Rohr r (Spiegel im Gefäß A) erzeugt wird. Dieser Überdruck teilt sich durch das Rohr r_1 dem Luftraum im Gefäß C mit und treibt das Wasser in Springbrunnenform aus C aus. Der Vorgang ist zu Ende, wenn die Luft aus dem Gefäß B und dem Rohr r_1 ausgetrieben ist. Durch Kippen des Apparats kann man den Inhalt von B nach C bringen, worauf, wenn bei A neues Wasser aufgegossen wird, das Spiel wieder beginnt. Es gibt verschiedene geistreiche

Abänderungen dieser Einrichtung, meist zum Betrieb von Zimmerspringbrunnen, die hier aber nicht mehr besprochen werden können.

§ 18. Flüssigkeitsgleichgewicht bei anderen Kraftfeldern. Bei den Darlegungen von § 9 bis 17 ist ein homogenes Schwerefeld zugrunde gelegt worden, also eine überall gleich starke und gleich gerichtete Erdbeschleunigung vorausgesetzt worden. Dies trifft auf mäßige Räume genügend genau zu und reicht daher für die meisten Anwendungen aus. Handelt es sich aber z. B. um Anwendung auf ein Gebiet auf der Erde, das nicht mehr klein gegen den Erdradius ist, dann muß davon Rechenschaft genommen werden, daß die Erdbeschleunigung in Größe wie Richtung veränderlich ist. Bei einer relativ zu einem gleichförmig rotierenden Gefäß ruhenden Flüssigkeit hat man zur Schwere die Zentrifugalbeschleunigung hinzuzunehmen, um mit dem rotierenden Raume wie mit einem ruhenden rechnen zu können. Wir wollen deshalb ganz allgemein die Frage behandeln, wie es mit dem Gleichgewicht einer homogenen oder nicht homogenen Flüssigkeit in einem Kraftfeld allgemeiner Art steht, dessen Kraft auf die Masseneinheit (d. h. dessen Beschleunigung) von Ort zu Ort nach Stärke und Richtung veränderlich ist.

Wir knüpfen an die Erörterungen von § 9 an und stellen leicht fest, daß wie dort in jeder Richtung senkrecht auf der jeweiligen Kraftrichtung der Druck sich nicht ändern kann (Gleichgewicht eines kleinen Prismas nach Fig. 778 mit Achse senkrecht zur Kraftrichtung). Weiter stellen wir fest, daß in der Kraftrichtung der Druck zunehmen muß, und zwar so, daß

$$dp = g\varrho\, dh \qquad (1)$$

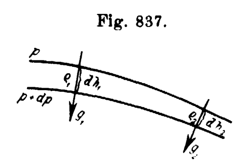
ist (Gleichgewicht eines kleinen Prismas entsprechend Fig. 795 mit der Höhe dh parallel der Kraftrichtung, dp Druckanstieg, g Stärke des Kraftfeldes). Aus der ersteren Beziehung folgt zunächst, wenn man die Gesamtheit der zur Kraftrichtung senkrechten Richtungen in einem Punkt zusammenfaßt, daß auf dem zur Kraftrichtung senkrechten Flächenelement der Druck konstant sein muß. Für den Fall, daß sich die aneinander angrenzenden Flächenelemente zu einer endlichen Fläche zusammenfassen lassen, wenn also, wie man sagt, das Kraftfeld Normalflächen besitzt, dann folgt aus obigem, daß längs jeder solchen Normalfläche der Druck konstant ist. Wenn ein Kraftfeld keine Normalfläche besitzt, dann ist auch kein Gleichgewicht einer Flüssigkeit in diesem Kraftfeld möglich[1]).

Wir nehmen nun an, daß das Kraftfeld Normalflächen besitzt, und betrachten zwei solche Normalflächen mit den Drucken p und $p + dp$. Wir greifen, vgl. Fig. 837, zwei Stellen 1 und 2 heraus und stellen fest, daß dp

[1]) In diesem Falle würde eine senkrecht zu den Kraftlinien gezogene Schleifenlinie, die zu derjenigen Kraftlinie, von der sie ausging, zurückführt, nicht wieder an den Ausgangspunkt zurücklaufen, sondern je nach ihrem Umlaufssinn tiefer oder höher als dieser auf der Kraftlinie einmünden. Ein Beispiel eines Vektorfeldes dieser Art kann z. B. gewonnen werden, indem man zunächst zwei parallele Ebenen durch eine Schar zu ihnen senkrechter, also unter sich paralleler Geraden verbindet, nun die eine Ebene gegen die andere um eine der Geraden als Achse etwas verdreht und die jetzt schraubenartig angeordneten Geraden als Kraftlinien betrachtet.

gemäß der obigen Beziehung einerseits $= g_1 \varrho_1 dh_1$, andererseits auch $g_2 \varrho_2 dh_2$ ist. In dem Falle, daß ϱ entweder konstant oder eine Funktion von p ist (homogene Flüssigkeit oder homogenes Gas, vgl. § 9 und 10), ist im letzteren Falle wegen $p_1 = p_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$, und es bleibt $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$. Nun ist $g dh$ die Arbeit, die von der Feldkraft beim Übergang von der einen Normalfläche zur anderen geleistet wird. Daß nun, wie unsere Betrachtung lehrt, diese Arbeit zwischen den beiden Normalflächen an allen Stellen denselben Wert hat, ist das Kennzeichen dafür, daß unser Kraftfeld ein Potential hat. Die Normalflächen sind dann Flächen konstanten Potentials, vgl. S. 518 bis 529. Führen wir das Potential U an einem Punkte A durch die Formel

Fig. 837.



$$U = \int^{A} g dh \qquad (2)$$

ein, so erkennt man, daß

$$dp = \varrho dU \quad \text{oder} \quad dU = \frac{dp}{\varrho} \qquad (3)$$

geschrieben werden kann, woraus

$$U_A - U_B = \int_B^A \frac{dp}{\varrho} \qquad (4)$$

folgt. In dem hier angenommenen Falle einer homogenen Flüssigkeit oder eines homogenen Gases läßt sich die rechte Seite ausrechnen, und man erhält dann den Druck unmittelbar als Funktion des Potentials. Diese Ergebnisse lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Im Falle der homogenen Flüssigkeit bzw. des homogenen Gases ist nur Gleichgewicht möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential hat. Die Flächen konstanten Potentials, die senkrecht zur Feldkraft verlaufen, sind gleichzeitig auch Flächen konstanten Druckes. Der Druck steigt in der Richtung der Feldkraft an, und zwar ist $dp = \varrho dU$.

Bei der inhomogenen Flüssigkeit ist der Fall denkbar, daß zwar $g_1 dh_1 \neq g_2 dh_2$ ist, aber durch geeignete Verteilung der Dichte überall $\varrho_1 g_1 dh_1 = \varrho_2 g_2 dh_2$ ist. Gleichgewicht wäre dann vorhanden, aber es ist leicht zu sehen, daß das Gleichgewicht labil wäre, denn man braucht nur Verschiebungen von Flüssigkeit längs der Normalfläche auszuführen, die keinerlei Arbeit erfordern, und hat dadurch, da jetzt die Verteilung der Dichte geändert ist, das Gleichgewicht gestört. Wenn man sich also auf stabile Zustände beschränken will, so kommen auch hier nur Kraftfelder in Betracht, die ein Potential besitzen. Ist aber $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$, so muß zur Erfüllung des Gleichgewichts auch $\varrho_1 = \varrho_2$ sein. Wir stellen also fest:

Eine stabile Lagerung einer inhomogenen Flüssigkeit ist nur möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential besitzt. Die Flächen konstanten Potentials sind gleichzeitig Flächen konstanten Druckes und konstanter Dichte.

Die Formeln (3) und (4) sind also hier wieder verwendbar. Die Bedingungen für die Stabilität der Schichtung sind dieselben, wie sie in § 9 und 10 für das homogene Schwerefeld auseinandergesetzt wurden.

Die in der Physik vorhandenen Kraftfelder haben, wenn man von gewissen, durch elektrische Ströme in magnetischen Feldern hervorgerufenen Kräften absieht, fast immer ein Potential, so daß die obige Forderung eines Potentials praktisch kaum eine Einschränkung bedeutet. Von praktischer Bedeutung ist aber die Forderung, daß auf allen Flächen konstanten Potentials die Dichte je konstant sein muß. Diese Bedingung kann z. B. dadurch verletzt werden, daß die Flüssigkeit oder das Gas örtlich erwärmt wird, wodurch sich die Dichte dort verringert. In einem solchen Falle ist kein Gleichgewicht mehr möglich, die erwärmte Flüssigkeit setzt sich und damit auch ihre Nachbarschaft in Bewegung, und das Ganze kommt erst zur Ruhe, wenn die wärmsten Teile über den anderen geschichtet liegen.

Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit oder die Grenze einer Flüssigkeit gegen eine andere sich nicht mit ihr mischende Flüssigkeit von anderer Dichte folgt immer einer Fläche konstanten Potentials; man findet deshalb für die Flächen gleichen Potentials („Äquipotentialflächen") auch die Bezeichnung „Niveaufläche" (freie Oberfläche oder Niveau einer gedachten Flüssigkeit). Bei der Erdvermessung bildet die Meeresoberfläche die grundlegende Niveaufläche, auf die alle Höhen bezogen werden.

Die Anwendung der im vorstehenden dargelegten Gesetze möge an zwei Beispielen erläutert werden:

1. Druckverteilung auf einem Weltkörper, der als homogene Flüssigkeit angenommen wird. Der Weltkörper besitze keine Rotation, unterliegt also nur seiner eigenen Gravitation. Er wird im Gleichgewicht die Gestalt einer Kugel annehmen. Der Radius des Weltkörpers sei R, irgend ein Radius in seinem Innern r. Wie in der Lehre vom Gravitationspotential gezeigt wird, ist die Feldkraft (= Beschleunigung) im Radius r gleich derjenigen, die die Masse der Kugel vom Radius r hervorbringen würde, wenn sie im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre. Die (mit r veränderliche) Beschleunigung im Radius r ist also unter der Annahme einer gleichförmigen Dichte ϱ, mit k = Gravitationskonstante:

$$g = \frac{k m}{r^2} = \frac{k}{r^2} \cdot \varrho \cdot \frac{4 \pi r^3}{3} = k \varrho \cdot \frac{4 \pi r}{3}.$$

An der Oberfläche ist

$$g_0 = k \varrho \cdot \frac{4 \pi R}{3},$$

so daß auch einfacher $g = g_0 \frac{r}{R}$ geschrieben werden kann. Setzen wir willkürlich das Potential U an der Oberfläche gleich Null, so wird

$$U = \int_r^R g\,dr = \frac{g_0}{2R}(R^2 - r^2).$$

Für den Druck hat man bei konstantem ϱ einfach die Beziehung $p = p_0 + \varrho U$, wo p_0 den Druck an der Stelle $U = 0$, also hier an der Oberfläche bedeutet. Der Druck ist also

$$p = p_0 + \frac{\varrho g_0}{2R}(R^2 - r^2),$$

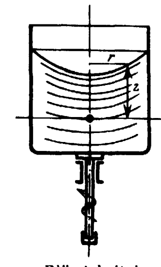
er zeigt also eine parabolische Verteilung. Am größten ist er in der Kugelmitte ($r = 0$), nämlich $p_{max} = p_0 + \frac{\varrho g_0 \cdot R}{2}$. Wendet man diese Rechnung auf die Erde an, deren Inneres vielfach als feurig-flüssig angenommen wird (wennschon gewisse Beobachtungen über Erdbebenwellen und anderes dagegen sprechen), und nimmt man die Dichte der Flüssigkeit entsprechend der mittleren Dichte der wirklichen Erde zu 5,5 mal derjenigen von Wasser an, so ergibt sich bei $R = 6380$ km $= 6{,}38 \cdot 10^6$ m, wenn wieder $\varrho g_0 = \gamma$ eingeführt ist, mit $\gamma = 5500$ kg/m³:

$$p_{max} = \frac{\gamma R}{2} = \frac{1}{2}\, 5500 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 = 1{,}754 \cdot 10^{10}\,\text{kg/m}^2$$
$$= 1\,754\,000\,\text{kg/cm}^2.$$

Natürlich würde bei diesem ungeheuren Druck eine wirkliche Flüssigkeit sehr erheblich zusammengedrückt werden; die vorstehende Rechnung hat aber nur den Wert einer rohen Überschlagsrechnung, die allerdings die Größenordnung der im Erdinnern vorhandenen Drucke ganz richtig wiedergibt.

2. Als weiteres Beispiel sei das Gleichgewicht einer homogenen schweren Flüssigkeit behandelt, die in einem gleichförmig um eine senkrechte Achse rotierenden Gefäß in relativer Ruhe ist. Wir stellen zunächst den Ausdruck für das Potential auf, das sich additiv aus einem durch die Schwerkraft und einem durch die Zentrifugalkraft erzeugten Anteil zusammensetzt.

Fig. 838.



Flüssigkeit in rotierendem Gefäß.

Nehmen wir Zylinderkoordinaten r und z an, vgl. Fig. 838, und nehmen die z-Koordinate nach oben positiv an, dann wird der Schwereanteil des Potentials

$$U_1 = U_0 - gz,$$

wo g die Erdbeschleunigung und U_0 ein willkürlicher Anfangswert ist. Für den Anteil durch Zentrifugalkraft hat man zunächst den Wert der Beschleunigung $= \omega^2 r$ zu setzen, mit $\omega =$ der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes und der Flüssigkeit. Daraus folgt durch Integration in Richtung dieser Beschleunigung, also in Richtung von r, der zweite Anteil des Potentials zu

$$U_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Im ganzen ist also

$$U = U_1 + U_2 = U_0 - gz + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Die Flächen gleichen Potentials ergeben mit $U = const$:

$$z = const + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Die freie Oberfläche und alle Flächen gleichen Druckes sind also Paraboloide mit dem gemeinsamen Parameter g/ω^2.

Der Druck selbst wird wieder $p = p_0 + \varrho U$, also mit $\varrho g = \gamma$

$$p = const + \gamma\left(-z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right).$$

Anmerkung: Die Aufgabe, die Gestalt eines flüssigen Weltkörpers, der um eine Achse rotiert, zu berechnen, ist von den Astronomen ausführlich behandelt worden, führt aber auf große mathematische Schwierigkeiten, die daher kommen, daß durch die Gestaltveränderung auch die Anziehungskräfte geändert werden. Für geringe Stärke der Rotation ergibt sich mit guter Annäherung die ellipsoidische Gestalt, die an der rotierenden Erde auch beobachtet wird.

Elftes Kapitel.

Strömende Bewegung der Flüssigkeiten und Gase. I. Teil.

Kinematik; Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit.

Vorbemerkung.

Die strömenden Bewegungen der Flüssigkeiten und die der Gase zeigen so viel Gemeinsames, daß es zweckmäßig erscheint, ihre Behandlung nicht zu trennen. Die Gase sind zwar in viel höherem Maße zusammendrückbar als die Flüssigkeiten. Die Frage ist aber hier die, ob sie bei dem jeweils betrachteten Strömungsvorgang merkliche Zusammendrückungen erfahren oder nicht. Zu merklicher Zusammendrückung gehören beträchtliche Druckänderungen. Bei kleinen und mäßig großen Geschwindigkeiten, sowie bei mäßigen Höhenabmessungen der strömenden Gasmassen bleiben die Druckänderungen aber gering gegenüber dem im Mittel vorhandenen Druck, und die Volumenänderungen sind dann so klein, daß man sie zur Vereinfachung der Rechnung meist ganz vernachlässigt. Die Gasströmungen unterscheiden sich dann in nichts mehr von denen volumenbeständiger Flüssigkeiten. Betrachtet man Volumenänderungen von 1 v. H. als vernachlässigbar, so darf man bei Strömungen atmosphärischer Luft von gewöhnlicher Temperatur die Formeln für volumenbeständige Strömung anwenden für Geschwindigkeiten des Gases bis zu rund 50 m/sec und für Höhenausdehnungen bis zu 100 m (vgl. § 4 b und Kap. X, § 10). (Die Volumenänderungen sind rund 10 v. H. bei 160 m/sec und 1000 m Höhe.) Die Volumenänderungen werden sehr beträchtlich und beeinflussen die Strömungsform in fühlbarer Weise, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit (rund 340 m/sec) werden. Bei Strömungsgeschwindigkeiten, die größer als die Schallgeschwindigkeit sind, ergibt sich sogar ein gegenüber dem bei gewöhnlichen Flüssigkeiten üblichen Verhalten völlig geänderter Charakter der Strömung.

In diesem und dem folgenden Kapitel handeln die meisten Abschnitte lediglich von den Strömungen ohne merkliche Volumenänderung. Um hierbei nicht immer von „Flüssigkeiten und Gasen“ sprechen zu müssen, wird im folgenden das Wort „Flüssigkeit“ als Sammelbegriff für Flüssigkeiten und Gase gebraucht werden. Die Gase wird man im Sinne dieses Sprachgebrauchs als „zusammendrückbare Flüssigkeiten“ bezeichnen. Von den Besonderheiten der Bewegungen mit starker Volumenänderung und von Analogien dazu bei Strömungen von Flüssigkeiten mit freiem Spiegel werden die letzten Paragraphen dieses Kapitels (§ 15 bis 17) berichten.

1. Kinematik.

§ 1. Darstellungsmittel. Von den strömenden Bewegungen einer Flüssigkeit würde man dadurch ein erschöpfendes Bild gewinnen können, daß man von jedem Flüssigkeitsteilchen für jeden Zeitpunkt den Ort angibt, wo es sich aufhält; seine Ortsänderung in der Zeit liefert dann seine Geschwindigkeit und Beschleunigung. Mathematisch kann man zu diesem Zwecke so verfahren, daß man zunächst zur Unterscheidung der einzelnen Teilchen voneinander ein besonderes, mit den Flüssigkeitsteilchen fest verbundenes, im Raume aber bewegliches Koordinatensystem einführt. Das kann z. B. so geschehen, daß man zunächst eine Flächenschar $a = const$ betrachtet, wobei a in irgend einer Anfangslage als Funktion der Raumkoordinaten x, y, z gegeben sein kann. Nimmt man noch zwei weitere Flächenscharen $b = const$ und $c = const$ dazu, die man so wählt, daß eine a-Fläche, eine b-Fläche und eine c-Fläche sich immer nur in einem einzigen Punkte schneiden, dann ist das Flüssigkeitsteilchen in diesem Schnittpunkt durch die Werte von a, b und c vollständig gekennzeichnet. Nach unserer Festsetzung soll nun ein Flüssigkeitsteilchen die „Flüssigkeitskoordinaten" a, b und c dauernd beibehalten, was darauf hinauskommt, daß jede Fläche $a = const$, und ebenso jede Fläche $b = const$ oder $c = const$ dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Die ursprüngliche Wahl der Flüssigkeitskoordinaten ist dabei willkürlich und nur durch Zweckmäßigkeitsgründe bestimmt. Man kann z. B. auch die gewöhnlichen Koordinaten in irgend einer Anfangslage oder Ruhelage als Flüssigkeitskoordinaten wählen.

Die Aufgabe, die Bewegung, d. h. Ortsänderung aller Teilchen anzugeben, besteht jetzt darin, die Werte der augenblicklichen Koordinaten x, y, z des Teilchens als Funktionen der Zeit und der „Flüssigkeitskoordinaten" a, b, c des Teilchens anzugeben. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(a, b, c, t) \\ y &= F_2(a, b, c, t) \\ z &= F_3(a, b, c, t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur vollständigen Beschreibung des Zustandes der strömenden Flüssigkeit gehört noch eine Aussage über den Druck p, und bei veränderlicher Dichte ϱ auch eine Aussage über diese. Die wirkliche Durchführung dieses Programms bis zum numerischen Endresultat gelingt aber nur in einigen dafür besonders geeigneten Fällen. Da es schließlich auch nicht so wichtig ist, die individuellen Schicksale der einzelnen Teilchen zu erfahren, begnügt man sich meist mit einer einfacheren Darstellungsweise, die darauf ausgeht, lediglich den an jedem Orte und zu jeder Zeit vorhandenen Strömungszustand näher zu beschreiben, ohne nach dem Verbleib der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu fragen. Handelt es sich um eine zeitlich gleichbleibende Strömung („stationäre Strömung"), so hat man hierzu nur für jeden Ort des durchströmten Raumes die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung anzugeben, wozu noch entsprechende Angaben über den Druck und gegebenenfalls die Dichte hinzu-

kommen. Ändert sich aber die Strömung in der Zeit, so sind solche Angaben für jeden Zeitmoment erforderlich. Mathematisch werden diese Angaben meist in der Form geleistet, daß man die drei rechtwinkligen Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit (und gegebenenfalls auch den Druck p und die Dichte ϱ) als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t angibt, also für u, v, w in Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1\,(x, y, z, t) \\ v &= f_2\,(x, y, z, t) \\ w &= f_3\,(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man pflegt das Formelsystem (1) nach Lagrange, das System (2) nach Euler zu benennen, trotzdem schon Euler beide gekannt hat.

Wenn es in einem Einzelfalle wünschenswert ist, die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens zu verfolgen, so sind die drei simultanen Gleichungen $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ zu integrieren. Da die drei Integrationskonstanten unmittelbar als Flüssigkeitskoordinaten a, b, c gedeutet werden können, kommt man hiermit auf die Darstellung (1) zurück.

Um eine anschaulichere Darstellung vom augenblicklichen Strömungszustand einer Flüssigkeit zu gewinnen, hat man die sogenannten Stromlinien eingeführt, die ganz analog den „Kraftlinien" bei den Kraftfeldern sind, nämlich Linien, die überall in der Richtung der Strömung verlaufen, d. h. deren Tangente überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zeigt.

Die Differentialgleichungen der Stromlinien heißen:

$$dx : dy : dz = u : v : w.$$

Bei einer stationären Bewegung stimmen die Stromlinien mit den Bahnen der Teilchen überein, bei der zeitlich veränderlichen Bewegung dagegen durchaus nicht, da die Stromlinien ein Bild der augenblicklich nebeneinander vorhandenen Geschwindigkeitsrichtungen geben, die Bahnen aber die im Laufe der Zeit von einem Teilchen nacheinander eingenommenen Geschwindigkeitsrichtungen zeigen.

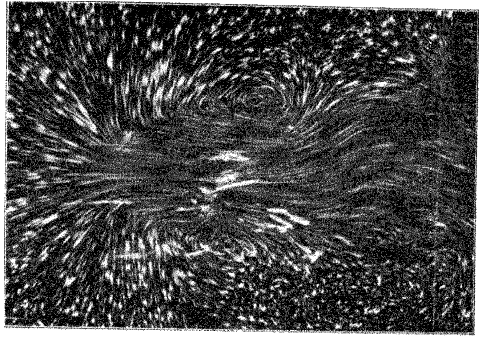
Es mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Stromlinien ein und derselben Strömung, ebenso wie die Bahnlinien, ganz verschiedenes Aussehen haben, wenn das Bezugssystem gewechselt wird, wenn also z. B. bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit der Beobachter relativ zu der ungestörten Flüssigkeit in Ruhe ist, und ein andermal sich mit dem Körper mitbewegt, so daß für ihn nun der Körper ruht und die Flüssigkeit dem Körper entgegenströmt.

Die Stromlinien können sichtbar gemacht werden, wenn man auf die Flüssigkeitsoberfläche oder in das Flüssigkeitsinnere kleine Teilchen streut, die die Bewegung der Flüssigkeit mitmachen. Bei einer kurzen Zeitaufnahme zieht jedes Teilchen auf der photographischen Platte einen kurzen Strich. Diese Striche fügen sich bei hinreichend dichter Bestreuung, wenn man die Aufnahmen betrachtet, zu einem Stromlinienbilde zusammen (Bahnlinien würde man erhalten, wenn man bei wenig dichter Bestreuung lange Zeitaufnahmen macht). Die beiden Bilder stellen gleichzeitige Aufnahmen der Bewegung einer Platte in ruhender Flüssigkeit von zwei Bezugssystemen aus dar, die eine (Fig. 839) ist von einer ruhenden Kamera, die andere (Fig. 840) von einer mit der Platte mitbewegten Kamera aufgenommen. Die Aufnahmen

stammen von Prof. Fr. Ahlborn, Hamburg, und sind mit Lykopodium als Bestreuung erhalten. Die Belichtung solcher Aufnahmen erfolgt zweckmäßig durch eine Mischung von Blitzlicht- und Zeitlichtpulver.

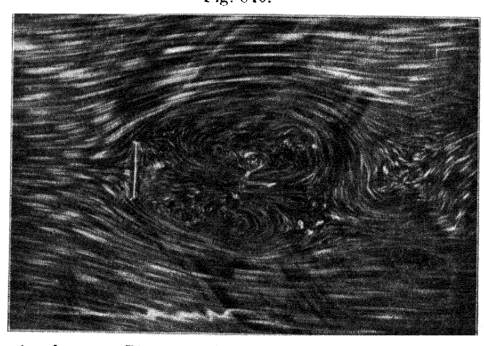
Zieht man durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve die Stromlinien, so bilden diese, wenn das „Geschwindigkeitsfeld" überall stetig ist, auf beliebig lange Erstreckung eine Röhre; diese hat die besondere Eigen-

Fig. 839.



Strömung um eine bewegte Platte, nach Ahlborn. Ruhende Kamera.

Fig. 840.



Strömung um eine bewegte Platte, nach Ahlborn. Kamera fährt mit der Platte mit.

schaft, daß die Flüssigkeit in ihr in dem betrachteten Augenblick wie in einer festen Röhre strömt (denn sie strömt definitionsgemäß parallel den Stromlinien; ein Durchdringen durch die Röhrenwand würde eine Geschwindigkeitskomponente quer zu dieser, also quer zu den Stromlinien voraussetzen, was deren Definition widerstreitet). Man nennt solche Röhren „Stromröhren", ihr flüssiger Inhalt wird als „Stromfaden" bezeichnet. Bei stationären Bewegungen bleiben die Stromröhren dauernd bestehen, und die

Teilchen in ihnen fließen dauernd darin wie in einer festen Röhre. Bei nichtstationären Bewegungen dagegen sind in einem späteren Augenblick im allgemeinen andere Teilchen miteinander durch Stromröhren verbunden als vorher. Man kann den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum in solche Stromröhren aufgeteilt denken und erhält damit ein sehr anschauliches Bild von der Flüssigkeitsströmung. Bei vielen einfacher gearteten Aufgaben, besonders Strömungen durch Röhren und Kanäle, ist es erlaubt, den ganzen von der Strömung erfüllten Raum als einen einzigen Stromfaden anzusehen. Man kümmert sich dann nicht um die Unterschiede der Geschwindigkeiten in einem Querschnitt, sondern strebt nur Aussagen über die mittlere Geschwindigkeit dortselbst an. Von diesem Verfahren machen besonders die Ingenieure bei ihren praktischen Berechnungen einen umfangreichen Gebrauch.

§ 2. **Kontinuität.** Bei den wirklichen Strömungen der Flüssigkeiten und Gase verschwindet nirgends Materie, noch entsteht irgendwo neue Materie. Es ergibt sich daher bei den von uns betrachteten Geschwindigkeitsfeldern die Aufgabe, dafür zu sorgen, daß sie mit der Tatsache der Konstanz der Materie im Einklang stehen. Am einfachsten wird die Formulierung bei den stationären Bewegungen, wenn die Gestalt der Stromlinien bereits hinreichend bekannt ist. Man betrachtet dann einen Stromfaden und hat nur auszudrücken, daß durch jeden Querschnitt desselben in der Zeiteinheit gleich viel Masse strömt. (Wäre diese Masse für zwei Querschnitte nicht gleich, so müßte der Masseninhalt des Stromfadens zwischen den zwei Querschnitten unbegrenzt zu- oder abnehmen, was dem stationären Zustand widersprechen würde.) Ist F der Querschnitt des Stromfadens an einer bestimmten Stelle, w[1]) die mittlere Geschwindigkeit in diesem Querschnitt und ϱ die Dichte dortselbst, so ist das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen $= Fw$, und die in der Zeiteinheit hindurchfließende Masse $= \varrho Fw$. Die Kontinuität fordert also, daß ϱFw in allen Querschnitten desselben Stromfadens denselben Wert haben muß. Hieraus folgt auch, daß ein Stromfaden einer stationären Strömung im Innern der Flüssigkeit nirgends aufhören kann. Er kann sich von einer Grenze des betrachteten Raumes bis an eine andere Grenze dieses Raumes erstrecken, oder er kann in sich zurücklaufen.

Handelt es sich um Strömungen, bei denen keine Volumenänderungen auftreten, also z. B. um solche einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit, so gelten die im vorstehenden für die durch einen Querschnitt fließende Masse ausgesprochenen Beziehungen auch für das Volumen, und da hier keinen Augenblick lang durch einen Querschnitt eines Stromfadens mehr Volumen hindurchfließen kann als durch irgend einen anderen, kann hier auch die Be-

---

[1]) Der Buchstabe w für Strömungsgeschwindigkeiten (statt v) ist deshalb gewählt, weil bei Rechnungen über die Strömungen von Gasen mit merklicher Volumenänderung mit v das Volumen der Masseneinheit bezeichnet zu werden pflegt, im Einklang mit der Bezeichnungsweise der Thermodynamik, die in diese Dinge mit hineinspielt.

schränkung auf stationäre Bewegungen fallen. Für volumenbeständige Strömungen gilt also allgemein

$$Fw = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Querschnitt des Stromfadens umgekehrt proportional. Teilt man den ganzen von der Flüssigkeit durchströmten Raum in lauter Stromröhren auf, durch die sämtlich in der Zeiteinheit gleiche Flüssigkeitsmengen fließen, so werden sich da, wo die Geschwindigkeit groß, also der Stromfadenquerschnitt klein ist, viele Stromfäden zusammendrängen, da wo die Geschwindigkeit klein ist, werden sie sich entsprechend weiter ausdehnen. Die Zahl der Stromfäden, die jeweils die Flächeneinheit durchsetzen, ist proportional zu der Geschwindigkeit an diesem Orte. Das Stromröhrenbild dient also bei der volumenbeständigen Strömung nicht nur durch seine Richtung an jedem Orte, sondern auch durch seine Dichtigkeit zur Veranschaulichung der Strömung.

Die hier erörterten Beziehungen werden besonders handgreiflich in solchen Fällen, wo man die ganze Strömung als einen einzigen Stromfaden behandeln darf. Hier geben die vorgegebenen Querschnitte gleich die Stromfadenquerschnitte ab, und es läßt sich die mittlere Geschwindigkeit an jeder Stelle einer derartigen volumenbeständigen Strömung aus der Beziehung

$$Fw = Q$$

ermitteln, wobei Q das in der Zeiteinheit geförderte Volumen („Fördervolumen", „Ergiebigkeit" der Strömung) bedeutet.

Für Strömungen mit Volumenänderung gilt in gleicher Weise

$$\varrho F w = M,$$

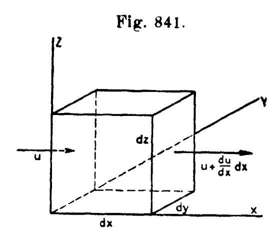
wo M die in der Zeiteinheit geförderte Masse ist. Da hier aber meist die Dichte ϱ erst im Zusammenhang mit dem Druck bestimmt werden kann, läßt sich die Geschwindigkeit nicht aus der Kontinuität allein ermitteln (vgl. hierüber § 15).

Bei solcher Art der Darstellung hat man, sowie es sich um stationäre volumenbeständige Strömungen handelt, nur noch eine unabhängige Veränderliche, nämlich die längs der Röhrenmittellinie gemessene Entfernung des betreffenden Querschnitts von irgend einem Anfangspunkt. Man spricht in diesem Zusammenhang von „eindimensionaler Behandlung", im Gegensatz zu der dreidimensionalen Behandlung, bei der die räumliche Veränderlichkeit der Geschwindigkeit und der übrigen Größen voll berücksichtigt wird. Soweit es sich um Wasser handelt, faßt man die Gesamtheit der eindimensional behandelten Aufgaben unter dem Sammelnamen Hydraulik zusammen. Die mehrdimensional behandelten Aufgaben werden dagegen unter dem Namen Hydrodynamik zusammengefaßt. Bei Aufgaben, die aus dem Gebiet der Luftfahrt und aus anderen Anwendungsgebieten der Luftströmungen stammen, verwendet man auch gern den Namen Aerodynamik.

Bei der dreidimensionalen Behandlung, wo gewöhnlich die rechtwinkligen Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z berechnet werden, drückt man die Kontinuität dadurch aus, daß man verlangt, daß in ein kleines Parallelepiped mit den Seiten dx, dy

und dz ebensoviel einströmt als aus ihm ausströmt. Für volumenbeständige Strömungen, die hier allein betrachtet werden sollen, drückt sich dieses folgendermaßen aus, vgl. Fig. 841[1]): In der X-Richtung wird durch die Geschwindigkeitskomponente u in der Sekunde die Flüssigkeitsmenge $dy . dz . u$ in das Parallelepiped hineingetragen, und auf der entgegengesetzten Seite, wo u bereits in $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ geändert ist, eine Menge $dy \cdot dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$ hinausgetragen. Es tritt also mehr aus als ein die Menge $dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$. Ähnliche Beträge liefern die Y- und Z-Richtung. Die Bedingung, daß im ganzen ebensoviel ausströmt als einströmt, erhält demnach die Form

Fig. 841.



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Dies ist die „Kontinuitätsgleichung“ der Hydrodynamik.

Grenzt irgendwo die Flüssigkeit gegen einen festen Körper oder gegen eine andere Flüssigkeit, so verlangt hier die Kontinuität, daß weder eine Lücke entsteht, noch beide Stoffe sich durchdringen. Damit beides vermieden ist, müssen offenbar die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Grenzfläche zu beiden Seiten dieser Grenzfläche übereinstimmen. Handelt es sich um ruhende Körper in der strömenden Flüssigkeit oder um feste Wände, so muß die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit senkrecht zur Körperoberfläche oder Wand an dieser verschinden. Die zur Wand parallele Komponente kann vom Gesichtspunkt der Kontinuität aus jeden beliebigen Wert annehmen.

2. Dynamik der „idealen“ reibungsfreien Flüssigkeit.

§ 3. Kräfte in einer strömenden Flüssigkeit. Bernoullische Druckgleichung. Die beiden an einer ruhenden Flüssigkeit wirksamen Kräftearten: Schwere (und andere Massenkräfte) und Druckunterschiede, die dort ein Gleichgewichtssystem bilden, finden sich auch bei der bewegten Flüssigkeit vor; zu ihnen tritt noch die Flüssigkeitsreibung, die als ein Widerstand gegen Formänderung anzusehen ist. Von ihr wird im nächsten Kapitel noch ausführlich die Rede sein, für die Betrachtungen dieses Kapitels soll sie jedoch vernachlässigt werden. Die technisch wichtigsten Flüssigkeiten (Wasser, Luft usw.) haben in der Tat eine sehr geringe Zähigkeit und zeigen deshalb unter den meist vorliegenden Verhältnissen nur sehr geringe Reibungswiderstände, so daß deren Vernachlässigung berechtigt erscheint; sie ist aber auch dringend geboten, da die Kräfteverhältnisse nur bei Ab-

---

[1]) Die Figuren 841—844, 847—848, 850, 864—867, 871—880, 886—888, 890, 891, 893, 902, 905—907, 909, 913, 928, 931—935, 939—942, 945, 965, 995—997 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Gustav Fischer (Jena) den Abhandlungen des Verfassers: „Über Flüssigkeitsbewegung“ im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. IV, entnommen.

wesenheit von Reibungswiderständen einfach genug werden, um übersichtliche Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen. Es ist daher üblich geworden, die fundamentalen Gesetze der strömenden Bewegung an dem Idealbild der „reibungslosen Flüssigkeit" zu entwickeln, und erst hinterher zu fragen, welche Abänderungen von dem idealen Verhalten durch das Vorhandensein der Reibung verursacht werden. Wir legen also dem Folgenden die „ideale Flüssigkeit" zugrunde, der wir im übrigen außer der Reibungslosigkeit auch Unzusammendrückbarkeit zuschreiben wollen, so daß Volumenänderungen bei ihr nicht vorkommen.

Um die dynamische Beziehung zwischen dem Druck und der Massenkraft einerseits und dem Bewegungszustand andererseits zu entwickeln, müssen wir an die Newtonsche Gleichung Kraft = Masse × Beschleunigung anknüpfen, die das Fundament aller Dynamik ist. Zunächst ist hier die Berechnung der gleichzeitigen Zustände längs eines Stromfadens beabsichtigt; dazu braucht man die Beschleunigungskomponente in der Bewegungsrichtung, die sogenannte longitudinale Beschleunigung. Diese soll daher erst berechnet werden. Die Bogenlänge entlang der Stromlinie heiße s, die Zeit t, die Geschwindigkeit w. Die Geschwindigkeitsänderung bei gleichzeitiger Änderung von s um ds und t um dt ist dann

$$dw = \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial w}{\partial t} dt\text{[1]}.$$

Bei der Beschleunigung handelt es sich um diejenige Geschwindigkeitsänderung, die ein Teilchen bei seiner Bewegung erfährt. Wir müssen daher $ds = w\,dt$ setzen; damit ergibt sich die Longitudinalbeschleunigung zu

$$\frac{dw}{dt} = w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dabei bedeutet $w \frac{\partial w}{\partial s}$ den Beschleunigungsanteil, der dadurch entsteht, daß das Teilchen an Orte mit anderer Geschwindigkeit kommt, und $\frac{\partial w}{\partial t}$ den Anteil durch die zeitliche Änderung des Strömungszustands am Orte. Bei stationären Strömungen ist der zweite Anteil gleich Null. Der erste Anteil kann übrigens auch in der Form $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right)$ geschrieben werden.

Zur Anwendung der Gleichung: Kraft = Masse × Beschleunigung trennen wir aus der strömenden Flüssigkeit wieder ein Zylinderchen mit dem Querschnitt dF und der Länge ds heraus, ähnlich wie dies bereits beim Studium des Gleichgewichts in § 9 von Kapitel X geschehen ist. Die Achse des Zylinderchens wollen wir dabei in die Strömungsrichtung legen (vgl. Fig. 842). Die Masse des Zylinderchens ist $= \varrho\, dF . ds$.

Auf das Teilchen wirken nun, wenn die Bewegung als reibungslos angesehen wird, die folgenden Kräfte: Erstens ein Druckunterschied. Der

---

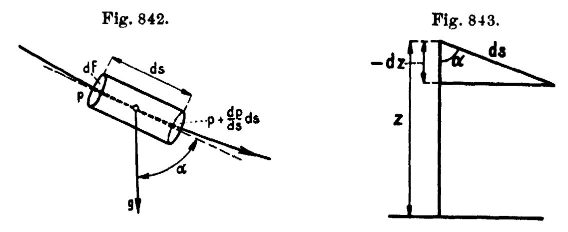
[1]) $\frac{\partial w}{\partial t}$ = partieller Differentialquotient (bei festgehaltenem s), $\frac{dw}{dt}$ = totaler Differentialquotient (bei festgehaltenem Teilchen).

Druck an dem stromaufwärts gelegenen Ende des Zylinderchens habe den Wert p, er wirkt dann auf die dortige Endfläche dF mit einer Kraft $p\,dF$. An dem stromabwärts gelegenen Ende hat er den etwas veränderten Wert $p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$, so daß sich also die Resultierende aus den beiden Druckkräften zu $p\,dF - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dF = -\frac{\partial p}{\partial s} ds\, dF$ ergibt. Auf die Flüssigkeit wirke ferner eine Massenkraft, deren Wirkung auf die Masseneinheit $= g$ sei (z. B. die Erdschwere); schließt die Richtung der Massenkraft mit der Strömungsrichtung einen Winkel α ein, so ergibt sich an der Masse $\varrho\, dF\, ds$ in Richtung der Bewegung eine Kraftkomponente

$$= \varrho\, dF\, ds \,.\, g \cos \alpha.$$

In der Gleichung: Kraft = Masse × Beschleunigung hat jetzt jedes Glied den Faktor $dF.ds$, der infolgedessen fortgelassen werden kann (d. h., das will-

Fig. 842. Fig. 843.



kürlich gewählte Teilchenvolumen ist für das Endergebnis ohne Belang). Dividiert man nun noch durch ϱ, so wird

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial w}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich handelt es sich bei der Massenkraft allein um die Schwerkraft, dann ist g nach Größe und Richtung konstant, und für $\cos \alpha$ kann, mit z = vertikale Koordinate, vgl. Fig. 843, $-\frac{\partial z}{\partial s}$ geschrieben werden.

Handelt es sich um eine stationäre Bewegung $\left(\text{für die } \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ ist}\right)$, und wird noch die Dichte ϱ als konstant vorausgesetzt, so sind sämtliche Glieder Differentialquotienten nach s; die Gl. (1) kann daher in diesem Falle längs der Stromlinie integriert werden. Aus

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

wird somit

$$\frac{p}{\varrho} + g z + \frac{w^2}{2} = const \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung, die den Namen „Bernoullische Gleichung"[1] oder „Druckgleichung" führt, bildet die Hauptgleichung für die eindimensionale Behandlung von Strömungsaufgaben, sie ist aber auch für die ganze Hydro-

[1]) Nach Daniel Bernoulli 1738.

dynamik von fundamentaler Bedeutung. Sie bringt die Konstanz der Energie zum Ausdruck; ihre Glieder stellen nämlich Energie pro Masseneinheit dar, und zwar das erste die Druckarbeit, das zweite die potentielle Energie der Schwere, das dritte die kinetische Energie. Dividiert man alle Glieder der Gl. (3) durch g, so bekommen sie die Dimension einer Länge und erhalten die Bedeutung von Höhen. Führt man wie im vorigen Kapitel wieder das Gewicht der Volumeneinheit (Raumgewicht) $\varrho g = \gamma$ ein, so erhält die Bernouillische Gleichung die besonders von den Ingenieuren bevorzugte Form:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{w^2}{2g} = const \qquad (3a)$$

p/γ bedeutet gemäß § 9 in Kapitel X die Höhe einer Flüssigkeitssäule, die durch ihr Gewicht den Druck p erzeugt, und heißt deshalb „Druckhöhe", z ist die Höhe der bezüglichen Stelle über einer irgendwie festgesetzten Horizontalebene und wird „Ortshöhe" genannt; $w^2/2g$ ist die Höhe, um die ein Körper herunterfallen muß, um die Geschwindigkeit w durch den freien Fall zu erlangen, und heißt daher „Geschwindigkeitshöhe". Nach der Bernoullischen Gleichung ist also die Summe der Druckhöhe, der Ortshöhe und der Geschwindigkeitshöhe in der ganzen Erstreckung einer Stromlinie konstant. Der Wert der Konstanten kann dabei von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein, und ist es besonders dann, wenn die Stromlinien verschiedenen Ursprung haben. Kommen alle Stromlinien aus einem Raum, in dem statische Verhältnisse (d. h. Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung) herrschen, so ist die Konstante für alle Stromlinien dieselbe, die Bernoullische Gleichung gilt also hier auch quer über die Stromlinien weg im ganzen Raum. (Gemäß § 9 von Kapitel X ist in einer ruhenden Flüssigkeit $p/\gamma + z = const$, was mit der Bernoullischen Gleichung für $w = 0$ oder $w = const$ übereinstimmt.) Es mag erwähnt werden, daß der hier beschriebene spezielle Strömungszustand mit der später zu behandelnden stationären Potentialbewegung identisch ist.

Für andere Massenkräfte ist, wenn sie ein Potential U besitzen, die Integration ebenfalls ausführbar, da $g \cos \alpha$ dann $= -\frac{\partial U}{\partial s}$ gesetzt werden kann. Handelt es sich um eine zusammendrückbare Flüssigkeit, so ist die Integration ebenfalls möglich, wenn die Flüssigkeit homogen ist, d. h. die Dichte nur allein vom Druck abhängt. Dann ist $\int \frac{dp}{\varrho} = P(p)$ eine Funktion des Druckes, und es kann also $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial s}$ geschrieben werden. Durch Integration nach s ergibt sich somit die allgemeine Form der Druckgleichung für stationäre Bewegungen

$$P + U + \frac{w^2}{2} = const \qquad (3b)$$

Mathematische Ergänzung.

In der mathematischen Hydrodynamik geht man gewöhnlich von den drei rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit u, v, w aus. In Analogie zu unserer Gl. (1) erhält man hier für die Beschleunigungskomponente in der X-Richtung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w \qquad (4)$$

für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ gelten die entsprechenden Formeln. Das Druckgefälle liefert für die Volumeneinheit die drei Komponenten $-\frac{\partial p}{\partial x}$; $-\frac{\partial p}{\partial y}$; $-\frac{\partial p}{\partial z}$; die Massenkraft (bisher g) habe die drei Komponenten X, Y, Z, die Komponenten der Kraft auf die Volumeneinheit ergeben sich also, da die Masse der Volumeneinheit $= \varrho$ ist, zu ϱX, ϱY und ϱZ. Damit werden nun für die in der Volumeneinheit enthaltene Masse als Ausdruck der (vektoriellen) Beziehung „Masse × Beschleunigung = Summe der Kräfte" die drei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{du}{dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x}\\ \varrho\frac{dv}{dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y}\\ \varrho\frac{dw}{dt} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen, in denen noch die Beschleunigungen durch die Ausdrücke von Gl. (4) ersetzt werden können, heißen die **Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik**. Um zu zeigen, wie man sie verwenden kann, soll die Bernoullische Gleichung für eine Stromlinie aus ihnen hergeleitet werden.

Wir multiplizieren die Gl. (5) der Reihe nach mit dx, dy, dz und setzen gleichzeitig fest, daß

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

sein soll, was bedeutet, daß dx, dy, dz die Komponenten eines Stromlinienelements sein sollen. Dann läßt sich $v\,dx$ durch $u\,dy$ ersetzen, $w\,dx$ durch $u\,dz$ usf.

Dadurch kann

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)$$

gesetzt werden. Der Klammerausdruck bedeutet die Änderung von u beim Fortschreiten auf der Stromlinie; wir schreiben abkürzend dafür du. Also ist

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + u\,du.$$

Nimmt man zur Vereinfachung eine stationäre Bewegung an, so daß $\frac{\partial u}{\partial t}$ usw. $= 0$ wird, so geben die linken Seiten der mit dx, bzw. dy und dz multiplizierten Gl. (5) durch ϱ dividiert:

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz = u\,du + v\,dv + w\,dw = d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

Haben die Massenkräfte ein Potential U, ist also

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

so geben die entsprechenden Glieder von Gl. (5):

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU.$$

Entsprechend wird auch

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{1}{\varrho}dp,$$

so daß, immer unter Beschränkung auf Punkte einer Stromlinie, erhalten wird

$$d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + dU + \frac{dp}{\varrho} = 0,$$

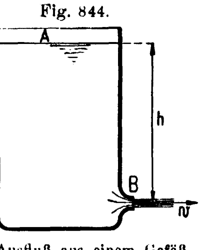
was mit Gl. (3b) gleichbedeutend ist.

§ 4. Folgerungen aus der Bernoullischen Gleichung. Die Bernoullische Gleichung liefert für eine große Reihe von Anwendungen in sehr

einfacher Weise eine Antwort. Drei besonders wichtige Beispiele mögen hier angeführt werden.

a) **Ausfluß aus einem Gefäß unter dem Einfluß der Schwere.** Verfolgt man in dem Gefäß Fig. 844 die Stromlinien von der Ausflußmündung B rückwärts, so findet man leicht, daß sie zum Wasserspiegel A hinführen, der sich unter langsamem Sinken der Wassermasse selbst mit senkt. Die Wasserteilchen bei A stehen unter dem Atmosphärendruck p_0, die in dem freien Strahl bei B ebenso[1] (vgl. unten). Die Geschwindigkeit bei A ist, wenn die Wasserspiegelfläche groß gegen die Mündungsfläche F ist, so klein, daß ihr Quadrat gegen das der Geschwindigkeit bei B vernachlässigt werden kann. Die Bernoullische Gleichung liefert also, mit z_A und z_B = Ortshöhe von A und B,

Fig. 844.



Ausfluß aus einem Gefäß.

$$\frac{p_0}{\varrho} + g z_B + \frac{w_B^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho} + g z_A + 0$$

also

$$\frac{w_B^2}{2g} = z_A - z_B = h,$$

oder

$$w_B = \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit bei B wird damit so groß, als wenn das ausfließende Wasserteilchen die Höhe h frei durchfallen hätte. In Wirklichkeit ist es so, daß die Teilchen bei A etwas tiefer gerückt sind und die vorher an dieser Stelle befindlichen Teilchen ebenfalls tiefer gerückt sind usw., und daß sich die Arbeiten dieser Teilchen, die vermöge des inneren Mechanismus der Flüssigkeit alle auf das ausfließende Teilchen übertragen werden, geradeso addieren, als wenn ein einziges Teilchen von der Größe des ausgeflossenen die ganze Höhe durchfallen hätte. Die in Gl. (1) enthaltene Beziehung wird „Toricellisches Theorem" genannt.

Der experimentelle Nachweis des Toricellischen Theorems wird am besten durch die Sprungweite des ausfließenden Wasserstrahls geführt. Jedes einzelne Teilchen dieses Strahles bewegt sich, da es der Schwere unterworfen ist, genähert auf einer Wurfparabel. Die Abweichungen, die vom Luftwiderstand verursacht werden, sind in geeigneten Fällen (glatter Strahl) nur gering. Verläßt der Strahl die Mündung in wagerechter Richtung, so ist der wagerechte Weganteil $x = w \cdot t$, der senkrechte besteht aus der Fallbewegung, ist also $y = \frac{1}{2} g t^2$, wenn t die Zeit seit dem Verlassen der Mündung bedeutet. Elimination von t gibt $y = \frac{1}{2} \frac{g x^2}{w^2}$ oder $x = w \sqrt{\frac{2y}{g}}$. Mit $w = \sqrt{2gh}$ gibt dies $x = 2\sqrt{hy}$. Zur Ausführung des Versuchs wird mit Vorteil eine soge-

[1]) Die Schwere der Luft ist dabei vernachlässigt, was erlaubt ist, wenn es auf die dritte Dezimale nicht mehr ankommt.

nannte „Mariottesche Flasche“ verwendet, vgl. Fig. 845. In den Hals dieser Flasche ist eine oben und unten offene Glasröhre mittels eines durchbohrten Korkes dicht eingesetzt, so daß die Luft, die für das bei o austretende Wasser in das Gefäß nachfließen muß, nur bei a in dieses gelangen kann. Dadurch herrscht in der Höhe von a im Wasser Atmosphärendruck, so daß also die Ausflußhöhe h unabhängig von der Lage des Wasserspiegels in der Flasche gleich dem Höhenunterschied zwischen a und o ist, solange nur der Wasserspiegel höher liegt als a. Durch Verschieben des Glasrohres läßt sich die Höhe h leicht verändern. Läßt man nun den Wasserstrahl z. B. auf eine wagerechte Fläche herunterfallen, die um y tiefer liegt als die Mündung o, so muß die Sprungweite x, wenn man das untere Ende des Glasrohres in die Höhe von Teilstrich 1, 2, 3 oder 4 einstellt ($h = 1$, 2, 3 oder 4 dm), sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{4}$ ändern. Die Nachrechnung der Versuche mit der obigen Formel zeigt, daß die Sprungweite etwas kleiner ist, als sich nach der Theorie ergibt. Dies kommt sowohl von der Reibung des ausfließenden Wassers an den Wänden der Mündung als auch vom Luftwiderstand. Die erstere ist bei einer Öffnung in dünner Wand am geringsten.

Fig. 845.

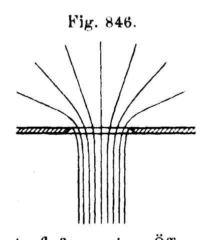


Mariottesche Flasche.

Macht man den Versuch mit einer senkrecht nach oben gerichteten Mündung (vgl. das rechts oben in Fig. 845 dargestellte Ansatzstück mit der Ausflußöffnung o), so müßte theoretisch der Strahl bis zur Höhe des freien Wasserspiegels aufsteigen (bei der Mariotteschen Flasche also bis zur Höhe a). Praktisch wird er aber durch das zurückfallende Wasser stark gedrückt. Man erhält größere Sprunghöhen, wenn man den Strahl ein wenig zur Seite neigt, bis er durch das zurückfallende Wasser nicht mehr gestört wird.

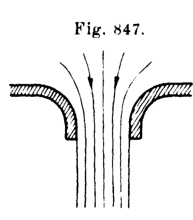
Der Querschnitt des Strahles stimmt in der Regel nicht mit dem des Loches überein. Bei einem Strahl, der z. B. aus einer kreisförmigen Öffnung in dünner Wand kommt, ist der Strahlquerschnitt etwa 0,61 bis 0,64 von dem Lochquerschnitt. Diese Erscheinung, die man Kontraktion nennt, kommt daher, daß die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes radial auf das Loch zuströmt und am Lochrand nicht plötzlich von der radialen Richtung in die Richtung der Strahlachse umlenken kann. Fig. 846 stellt eine solche Strömung dar. Im Falle einer abgerundeten Öffnung, Fig. 847, wo sich die Umlenkung der Stromfäden innerhalb der Mündung

Fig. 846.



Ausfluß aus einer Öffnung in ebener Wand.

Fig. 847.



Ausfluß aus einer abgerundeten Mündung.

vollziehen kann, ist die obige Ziffer, die man Kontraktionsziffer nennt, allerdings ungefähr gleich 1. Die durch eine Öffnung vom Querschnitt F sekundlich ausfließende Menge Q (Volumen pro Sekunde) ist

$$Q = \alpha F \sqrt{2 g h},$$

wobei α die Kontraktionsziffer ist. Bei nicht kreisförmiger Öffnung in dünner Wand ist α meist wenig von dem Wert bei einer kreisförmigen Öffnung verschieden, aber die Strahlformen, die sich hier ausbilden, sind in der Regel ziemlich verwickelt. Der Strahl, der aus einem quadratischen Loch kommt, formt sich z. B. in einen dünnen kreuzförmigen Querschnitt um, der aus einem rechteckigen Loch kommende, in ein Band, das auf der langen Rechteckseite senkrecht steht.

b) Ausfluß aus einem Gefäß unter dem Einfluß eines inneren Überdruckes. In dem Gefäß Fig. 848 herrsche ein Druck p_1, im Außenraum der Atmosphärendruck p_0. Für eine Stromlinie, die wagerecht verläuft, ist $z_A = z_B$, die Druckgleichung liefert daher, wenn wieder die Geschwindigkeit bei A als vernachlässigbar klein angesehen wird,

Fig. 848.

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = \frac{p_1}{\varrho} + 0,$$

also

$$w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2 g (p_1 - p_0)}{\gamma}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Bezeichnet man die Höhe $\frac{p_1 - p_0}{\gamma}$, d. i. die Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Raumgewicht γ, zwischen deren oberen und unteren Ende der Druckunterschied $p_1 - p_0$ herrscht, mit h, so wird aus Formel (2) wieder $w = \sqrt{2 g h}$. Die Formel (2) gibt uns eine Möglichkeit, die Größe derjenigen Geschwindigkeit abzuschätzen, bis zu der es noch erlaubt ist, ein Gas als volumenbeständige Flüssigkeit zu behandeln. Die Grenzgeschwindigkeit w_1 hängt natürlich von der Größe derjenigen Dichteschwankung ab, die man noch zulassen will, und ist daher um so kleiner, je höher die gestellten Ansprüche an die Genauigkeit sind. Nimmt man etwa die zulässige Dichteänderung $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = 1$ v. H., also 0,01, so ergibt sich für die Druckdifferenz Δp, da wegen $p v^{\varkappa} = const$[1]) oder $p = const\, \varrho^{\varkappa}$ $\frac{\Delta p}{p} \approx \varkappa \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$ ist, $\Delta p \approx \varkappa p_0 \cdot \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$; in kg/m² ergibt dies, wenn es sich um Luft von gewöhnlichem Druck handelt, rund 1,4 . 10333 . 0,01 = 144,5 kg/m²; mit einem Mittelwert von $\varrho = 0{,}125 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ wird somit

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\varrho}} = \sqrt{2312} = \text{rund } 48 \text{ m/sec}.$$

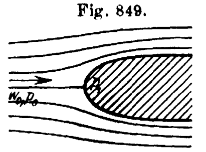
Läßt man 10 Proz. Dichteschwankung zu, dann erhält man aus unserer Näherungsformel eine $\sqrt{10}$ mal größere Geschwindigkeit, also rund 150 m/sec.

[1]) Vgl. Kapitel X, § 6.

Die Wirkung der Dichteschwankung ist zweierlei Art; kinematisch ändern sich die Stromfadenquerschnitte, dynamisch wird das Maß der zu einer Beschleunigung gehörigen Druckänderung beeinflußt, vgl. § 3, Gl. (2).

c) Aufstau vor einem Hindernis. Befindet sich in einer gleichförmigen Flüssigkeitsströmung von der Geschwindigkeit w_0 ein Hindernis, so staut sich unmittelbar vor dem Hindernis die Strömung an und zerteilt sich nach allen Seiten, um das Hindernis zu umfließen, vgl. Fig. 849. Im Mittelpunkt des Staugebietes, dem „Staupunkt", kommt die Strömung völlig zur Ruhe. Die Bernoullische Gleichung liefert also für die durch den Staupunkt gezogene Stromlinie, wenn der Druck am Staupunkt p_1 und der ungestörte Druck in der gleichen Höhe p_0 heißt,

Fig. 849.



Strömung um ein Hindernis.

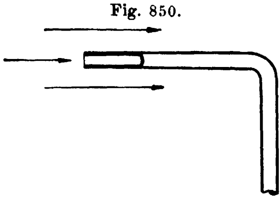
$$\frac{p_1}{\varrho} + 0 = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{w_0^2}{2},$$

also

$$p_1 = p_0 + \varrho \frac{w_0^2}{2}.$$

Der Druckanstieg $p_1 - p_0 = \varrho \frac{w_0^2}{2}$ führt den Namen Staudruck oder Geschwindigkeitsdruck, auch dynamischer Druck. Die Beobachtung dieses Druckanstiegs liefert ein Mittel zur Feststellung von Strömungsgeschwindigkeiten. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v durch ruhende Luft (oder Flüssigkeit) bewegt, so spielt sich bezüglich eines mit ihm mitbewegten Bezugssystems die Strömung ebenso wie vorstehend beschrieben ab, wobei die Geschwindigkeit w_0 gleich und entgegengesetzt v ist. Auch in diesem Falle wird daher eine Druckerhöhung $= \frac{\varrho v^2}{2}$ beobachtet. — Weist das Hindernis am Staupunkt eine Anbohrung auf, so pflanzt sich der Druck p_1 durch diese ins Innere fort und kann zu einem Meßinstrument geleitet werden. Zur Messung des Druckes $p_1 = p + \frac{\varrho w^2}{2}$ in irgend einer Strömung genügt als „Hindernis" ein einfaches, umgebogenes Rohr, vgl. Fig. 850, das nach seinem Erfinder Pitotrohr heißt.

Fig. 850.



Pitotrohr.

Man kann jedem Punkt der strömenden Flüssigkeit außer dem dort herrschenden Druck p (den ein mit der Flüssigkeit mitbewegtes Druckmeßgerät anzeigen würde), auch den Druck p_1 zuschreiben, den ein dort angebrachtes Pitotrohr liefern würde. Die Ingenieure nennen den Druck p den „statischen Druck", den Druck p_1 den „Gesamtdruck", es ist also Gesamtdruck = statischer Druck + dynamischer Druck. Aus der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + g z + \frac{w^2}{2} = const$$

ergibt sich durch Einführung des Gesamtdruckes $p_1 = p + \varrho \frac{w^2}{2}$:

$$\frac{p_1}{\varrho} + g z = const, \quad \text{oder} \quad p_1 + \gamma z = const,$$

d. h. p_1 ist nach statischen Gesetzen verteilt, also in dem Falle, daß alle Stromlinien dieselbe Konstante haben, konstant in jeder Horizontalebene.

Um die vorstehenden Beziehungen zur Ermittlung von Strömungsgeschwindigkeiten zu verwerten, bedarf es neben der Bestimmung von p_1 auch der des statischen Druckes p. Diese macht viel mehr Schwierigkeiten als die von p_1, da der statische Druck durch das Einbringen einer Sonde gerade an der Stelle gestört wird, wo man ihn messen will. Über die Ausführung solcher Druckmessungen vgl. § 7.

§ 5. Weitere Ausführungen über den Flüssigkeitsdruck. Die folgenden Ausführungen sind nicht auf den Fall der reibungsfreien Flüssigkeit beschränkt, sondern gelten (unter Umständen mit geringen Abänderungen) auch für mäßig stark reibende Flüssigkeiten. Die erste Bemerkung setzt aber eine volumenbeständige Flüssigkeit von konstanter Dichte voraus.

a) Man kann den Druck in einer solchen Flüssigkeit in zwei Summanden zerspalten, von denen der eine denjenigen Druck darstellt, der sich einstellen würde, wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre. Dieser „Gleichgewichtsdruck“ sei mit p' bezeichnet. Offenbar ist $p' = const - \gamma z$. Setzt man nun den wirklichen Druck in der strömenden Flüssigkeit $p = p' + p^*$, so stellt p^* den Unterschied des Druckes im Bewegungsfall gegenüber dem in der Ruhe dar. Ist die Bernoullische Gleichung verwendbar, also $p + \gamma z + \varrho \frac{w^2}{2} = const$, so folgt bei Berücksichtigung des Wertes von p': $p^* + \varrho \frac{w^2}{2} = const$, d. h. p^* verteilt sich so wie bei einer zwar mit träger Masse begabten, aber schwerelosen Flüssigkeit; die Ortshöhe z hat auf p^* keinen Einfluß. Dies Ergebnis, das einfach mit dem Umstand zusammenhängt, daß jedes Teilchen einer schweren Flüssigkeit durch den Auftrieb, den es von seinen Nachbarteilchen erfährt, gerade in der Schwebe gehalten wird, läßt sich offenbar auch auf reibende Strömungen übertragen. Wir werden deshalb in den folgenden Betrachtungen stets, wenn es sich um Bewegungen unter Wasser oder in Luft handelt, von den Wirkungen der Schwere absehen, was also darauf hinauskommt, daß wir statt des Druckes p immer den Druckunterschied p^* betrachten. Der Einfachheit halber werden wir aber statt p^* wieder p schreiben.

Wird bei einer Luft- oder Wasserströmung der Druck mittels außenliegender ruhender Druckanzeigegeräte gemessen, zu denen von der beweglichen Druckentnahmestelle (Sonde) Rohrleitungen oder Schläuche führen, so wirkt die Schwere der Flüssigkeit in den Rohrleitungen so, daß der angezeigte Druck unabhängig von der Höhenlage der Druckentnahmestelle wird. Das Gerät zeigt also einen Druck von der Art von p^* an. Ist die Sonde ein gegen die Strömung gekehrtes Pitotrohr (siehe oben), so zeigt das ruhende Gerät auf einer Stromlinie konstanten Druck an. In dem Falle, daß alle Stromlinien dieselbe Konstante haben, ist diese Druckanzeige für das ganze Gebiet dieselbe.

b) Die Bernoullische Gleichung behandelt die Drucke längs einer Stromlinie. Über die Druckunterschiede in einer Richtung quer zur Strömung läßt sich ebenfalls eine Aussage gewinnen, wenn man statt der Longitudinalbeschleunigung die Transversalbeschleunigung betrachtet. Diese hat bekanntlich die Richtung der Hauptnormale der Bahnkurve und den Betrag $\frac{w^2}{r}$, wo r der Krümmungsradius der Bahnkurve ist. Durch Betrachtung der Kräfte an einem kleinen Prisma, dessen Achse in die Richtung der Hauptnormale gelegt ist, ergibt sich für die Komponenten in der Richtung des Radius r:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ds' ein Bogenelement in der Richtung der Hauptnormale ist und p im Sinne von p^* im vorstehenden Absatz aufzufassen ist. Die Formel bringt die Zentrifugalwirkung in einer krummlinigen Strömung zum Ausdruck. Der Druck steigt von der konkaven Seite der Stromlinie zur konvexen hin an, und zwar um $\frac{\varrho w^2}{r}$ für die Längeneinheit. Durch diese Beziehung sind also nebeneinander liegende Stromfäden miteinander verknüpft. Wichtig ist vor allem die Feststellung, daß bei geradliniger Strömung ($r = \infty$) ein Druckunterschied quer zur Strömungsrichtung nicht bestehen kann. Bei krummliniger Strömung ergibt sich ein besonders einfaches Resultat in dem bereits besprochenen Sonderfall, daß die Konstante der Bernoullischen Gleichung für alle Stromlinien denselben Wert hat. Hier läßt sich aus $\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = const$ durch Differentiation nach s' ein zweiter Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'}$ herleiten, nämlich $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'} = -w\frac{\partial w}{\partial s'}$. Durch Gleichsetzen mit dem früheren Ausdruck ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies drückt, wie in Vorwegnahme späterer Ergebnisse (§ 9) bemerkt werden mag, aus, daß bei der krummen Strömung die einzelnen Flüssigkeitselemente keine Drehung erfahren [„drehungsfreie Bewegung"][1]).

Als Beispiel sei eine Bewegung in einem Spiralgehäuse nach Fig. 851 betrachtet. Alle Stromlinien beginnen in der Parallelströmung bei A, und es mag dort die Geschwindigkeit aller Stromfäden dieselbe sein, so daß — bei der Druckgleichheit in der Parallelströmung — die Bernoullische Konstante auf allen Stromlinien dieselbe ist. Die Krümmungsradien der einzelnen Stromlinien können genähert gleich dem vom Mittelpunkt O aus gezogenen Radius r, und das Bogenelement ds' kann $= dr$ gesetzt werden. Dann ist

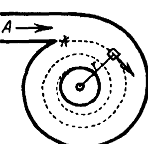
---

[1]) Es läßt sich leicht zeigen, daß die „Zirkulation" längs eines aus zwei Radiensücken von der Länge ds' und zwei Stromlinienbögen gebildeten Rechtecks verschwindet, wenn Gl. (2) erfüllt ist. Der Beweis findet sich in § 8.

gemäß dem Vorstehenden $\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}=0$, oder $\frac{dw}{w}=-\frac{dr}{r}$, oder integriert $\ln w=\ln C$[1]$-\ln r$, also $w=\frac{C}{r}\cdot$ Die Geschwindigkeit nimmt also nach innen beträchtlich zu[2]). Der Druck ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung zu $p=const-\frac{\varrho C^2}{2r^2}\cdot$ Gelangt die Flüssigkeit innen auf einem Radius r_1 ins Freie (Druck p_0), so ist der Druck an einer anderen Stelle

$$p=p_0+\varrho\frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r^2}\right).$$

Fig. 851.

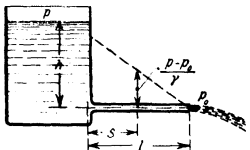


Spiralgehäuse.

Bei einigermaßen kleinem Radius des Abflußloches können also sehr bedeutende Überdrücke bei A auftreten.

c) Bei nichtstationären Bewegungen von Flüssigkeiten kommt für die Änderung des Strömungszustandes noch ein zusätzliches Druckfeld zu den bisherigen Drücken dazu. Die Betrachtungen mögen hier auf die longitudinale Beschleunigung beschränkt werden, in der gemäß § 3, Gl. (1) hier das Glied $\frac{\partial w}{\partial t}$ (zeitliche Geschwindigkeitsänderung am festgehaltenen Ort) hinzukommt. Führt man die Rechnungen, die zur Bernoullischen Gleichung geführt haben, gemäß der vollständigen Gl. (2) von § 3 durch, so kommt in Gl. (3) von § 3 auf der linken Seite das Glied $\int_0^s\frac{\partial w}{\partial t}\,ds$ hinzu. Handelt es sich z. B. um eine Röhre mit konstantem Querschnitt, in der also in allen Querschnitten die Geschwindigkeit dieselbe ist (über dem Querschnitt soll sie jeweils auch konstant angenommen werden, da Reibungslosigkeit vorausgesetzt ist), so ist $\frac{\partial w}{\partial t}$ unabhängig vom Ort, das Integral kann daher $=\frac{dw}{dt}\cdot s$ gesetzt werden.

Fig. 852.



Beginn des Ausfließens.

Beispiel: Beginn des Ausfließens durch ein Ansatzrohr von der Länge l, vgl. Fig. 852. Es ist längs der wagerecht angenommenen Röhrenachse

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{w^2}{2}+\frac{dw}{dt}\cdot s=const=\frac{p_0}{\varrho}+gh.$$

Solange $\frac{dw}{dt}$ noch von Null verschieden ist, sinkt der Druck p längs der

[1]) Integrationskonstante.

[2]) Die Radialkomponente der Geschwindigkeit ergibt sich bei konstanter Höhe des Spiralgehäuses wegen der Kontinuität ebenfalls proportional $\frac{1}{r}$, so daß also der Winkel der Stromlinien mit den Radien überall derselbe ist, die Stromlinien also logarithmische Spiralen werden.

Röhre proportional mit s ab. Ist der Druck am Röhrenende $(s = l) = p_0$, so gilt

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt} \cdot l = \frac{p_0}{\varrho} + gh,$$

also

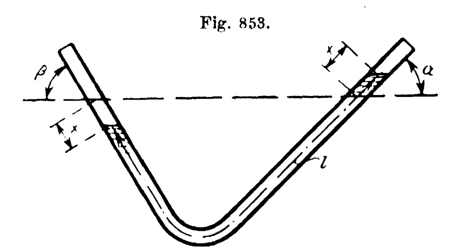
$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{l}\left(gh - \frac{w^2}{2}\right).$$

Für den ersten Moment ergibt sich, da hier $w = 0$ ist, die einfache Beziehung $\frac{dw}{dt} = g \cdot \frac{h}{l}$. Mit dem Anwachsen von w nimmt $\frac{dw}{dt}$ immer mehr ab und geht später gegen Null, d. h. die Bewegung wird stationär und w wird $= \sqrt{2gh}$. Das genaue Gesetz des zeitlichen Anwachsens von w, das an sich nicht schwierig zu berechnen ist, mag hier übergangen werden. Eine Abschätzung der Zeit, die bis zur angenäherten Erreichung des stationären Zustandes verfließt, wird gewonnen, wenn man eine bis zur Erreichung von $w_1 = \sqrt{2gh}$ konstante Beschleunigung $\frac{dw}{dt}$ annimmt und $\frac{w_1}{T}$ an Stelle von $\frac{dw}{dt}$ in die obige Formel einführt. Dies gibt

$$T = \frac{w_1 l}{gh} = \frac{2l}{w_1}.$$

Ein anderes einfaches Beispiel einer nichtstationären Bewegung einer Flüssigkeit ist die Schwingung einer Flüssigkeitssäule in einem gebogenen Rohr unter dem Einfluß der Schwere, vgl. Fig. 853. Das Rohr habe konstanten Querschnitt, die Länge der Flüssigkeitssäule, in der Rohrachse gemessen, sei l. Der Ausschlag in einem Augenblick sei x, gemessen in der Richtung der Rohrachse (der Kontinuität wegen gleich an beiden Enden und auch für jede Zwischenstelle). Die Geschwindigkeit ist überall gleich, nämlich $w = \frac{dx}{dt}$, also $w \frac{\partial w}{\partial s} = 0$, somit ist die Beschleunigung einfach $\frac{d^2x}{dt^2}$. Das eine Ende ist um $h_1 = x \sin\alpha$ gehoben, das andere um $h_2 = x \sin\beta$ gesenkt, die Ortshöhendifferenz ist also $h_1 + h_2 = x(\sin\alpha + \sin\beta)$. Der Druck ist an beiden Enden $= p_0$, so daß also die erweiterte Bernoullische Gleichung, auf die Enden angewandt, ergibt

Fig. 853.



Schwingung einer Wassersäule.

$$g x(\sin\alpha + \sin\beta) + l \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

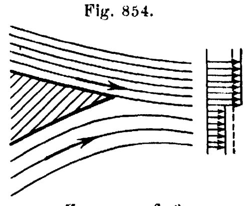
Die Lösung dieser Differentialgleichung, die mit der der elastischen Schwingung übereinstimmt, ist $x = A\cos(\omega t + \gamma)$, mit $\omega = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha + \sin\beta)}{l}}$. Dies gibt eine Schwingungszeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}.$$

Für ein senkrechtes U-Rohr ($\sin\alpha = \sin\beta = 1$) ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, also gleich der Schwingungsdauer eines Pendels von einer Länge gleich der halben Länge der Flüssigkeitssäule.

§ 6. Zusammenfluß zweier Flüssigkeitsströme. Trennungsflächen. Wirbelbildung. Wenn sich zwei Flüssigkeitsströme verschiedener Herkunft hinter einer scharfen Kante vereinigen, vgl. Fig. 854, so ist im allgemeinen die Konstante der Bernoullischen Gleichung in beiden Strömen nicht dieselbe. Da längs der Fläche, die die beiden Ströme trennt („Trennungsfläche"), Druckgleichheit herrscht, ist daher die Geschwindigkeit dem Betrage nach auf beiden Seiten verschieden. Aber selbst wenn die Bernoullische Konstante beider Ströme gleich ist, kann noch die Richtung der Strömung auf beiden Seiten verschieden sein. In der Trennungsfläche wechselt also in den betrachteten Fällen die Geschwindigkeit sprungweise. In dem ersterwähnten Falle handelt es sich um einen longitudinalen Geschwindigkeitssprung, im zweiten um einen transversalen. Derartige Trennungsflächen werden vielfach beobachtet. Sie bleiben allerdings dadurch nicht lange in der ursprünglichen Form bestehen, daß sie labil sind. Sie zeigen eine starke Neigung dazu, daß irgendwelche zufällige Ausbuchtungen schnell anwachsen und sich die Geschwindigkeitsunterschiede an einigen Stellen anhäufen, an anderen vermindern. Die Trennungsfläche zerfällt dadurch in eine große Zahl meist unregelmäßiger Wirbel. Dieser für das Verständnis wirklicher Flüssigkeitsbewegungen wichtige Vorgang mag hier noch etwas näher beschrieben werden. Die Trennungsfläche von Fig. 854 möge durch irgendwelche Schwankungen im Zustrom eine leichte Wellung aufweisen, die in Fig. 855 näher gekennzeichnet ist. Die Wellen bewegen sich mit dem Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten vorwärts, der in Fig. 854 durch eine punktierte Linie angedeutet ist. In Fig. 855 ist ein Bezugssystem gewählt, das sich mit dieser mittleren Geschwindigkeit mitbewegt, für das also die Wellenberge und -täler am Orte bleiben. Die obere Flüssigkeit strömt für dieses Bezugssystem nach rechts, die untere bleibt nach links zurück. Analysiert man nun nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen die Druckverhältnisse in dieser Strömung, so gibt sowohl die Bernoullische Gleichung wie auch die

Fig. 854.



Zusammenfluß.

Gleichung für den transversalen Druckanstieg [§ 5, Gl. (1)] den Aufschluß, daß unter der Voraussetzung, daß die Bewegung stationär wäre, in den Wellenbergen jedes einzelnen Stromes Überdruck, in den Tälern dagegen Unterdruck herrscht (in Fig. 855 durch + und — angedeutet). Diese Druckverteilung zeigt aber deutlich, daß die Bewegung nicht stationär sein kann; es wird vielmehr die Flüssigkeit in den Überdruckgebieten sich nach dem benachbarten Unterdruckgebiet hin in Bewegung setzen, was offenbar bedeutet,

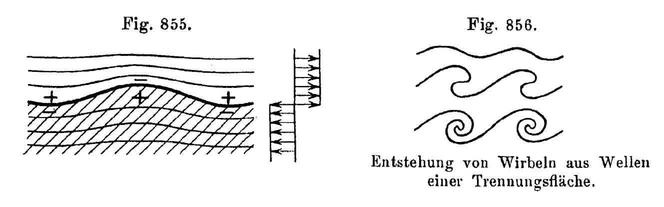


Fig. 855.

Fig. 856. Entstehung von Wirbeln aus Wellen einer Trennungsfläche.

daß die Wellung stärker wird. Die weiteren Schicksale einer solchen Trennungsfläche sind in Fig. 856 dargestellt. Das Ende ist ein Zerfall in einzelne Wirbel. Da die ursprünglichen kleinen Störungen in Wirklichkeit meist nicht eine gleichmäßige Wellung, sondern eine unregelmäßige Verteilung zeigen, ist der Endzustand auch in der Regel ein ungeordnetes Durcheinander von größeren und kleineren Wirbeln.

Im Zusammenhang mit diesen Dingen muß noch eine andere Art von Trennungsflächen besprochen werden, bei deren Entstehung zugleich ein Wirbel gebildet wird (nebenher gesagt, wo eine Trennungsfläche neu gebildet wird, sind die Verhältnisse fast regelmäßig ähnlich wie in dem im folgenden beschriebenen Fall). Strömt eine Flüssigkeit um eine scharfe Kante, so tritt im ersten Augenblick eine Umströmung der Kante gemäß Fig. 857 ein. Die Geschwindigkeit an der Kante selbst ist dabei sehr groß, für die reibungsfreie Flüssigkeit wäre sie nach der Theorie unendlich groß. Man beobachtet nun, daß die Geschwindigkeit an der Kante unter Bildung eines Wirbels sehr bald kleiner wird. Man kann für dieses Verhalten als ein besonderes Prinzip anführen, daß die Flüssigkeit unendliche Geschwindigkeiten zu vermeiden strebe und statt dessen Trennungsflächen bilde. Später werden wir erkennen, daß hinter diesem Prinzip die Flüssigkeitsreibung steckt, die, wenn sie auch noch so klein ist, doch in der Nähe fester Wände nicht wirkungslos bleibt. Nehmen wir für den Augenblick einen Wirbel hinter der scharfen Kante an, der der Kante in Form einer umlaufenden Strömung auch von hinten Flüssigkeit zuführt, dann sind die Bedingungen des Zusammenflusses an der Kante erfüllt, und es wird hier eine Trennungsfläche erzeugt (vgl. Fig. 858), die Trennungsfläche wiederum wird von dem Wirbel aufgewickelt und führt ihm dadurch

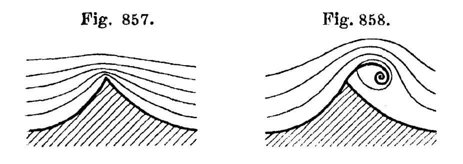


Fig. 857.

Fig. 858.

neue Nahrung zu, so daß er wachsen kann. In Wirklichkeit sind beide, Wirbel und Trennungsfläche, eine Einheit und wachsen zusammen aus winzigen Anfängen hervor (vgl. Fig. 859). Später entfernt sich dieser „Anfahrwirbel", und die Trennungsfläche, von der an der Kante immer neue Stücke gebildet werden, zerfällt wie oben beschrieben, in einzelne Wirbel. Ganz analoge Vorgänge spielen sich an den Kanten eines runden Loches in ebener Wand ab. Der sich aufrollende vordere Rand der Trennungsfläche erzeugt einen Wirbelring, der unter Ausbildung eines gut abgegrenzten Flüssigkeitsstrahles fort wandert (vgl. Fig. 860). Man kann sehr schöne Wirbelringe erzeugen, wenn man einen Kasten mit nachgiebiger Rückwand und einem kreisförmigen Loch in der Vorderwand mit Rauch füllt und nun auf die Rückwand schlägt. Da in diesem Falle das Herausfließen sehr schnell wieder aufhört, entsteht kein Strahl, sondern nur ein Ring, der sich selbständig weiterbewegt, und, da er in sich Rauch mitführt, als Rauchring sichtbar wird. Derartige Wirbelringe sind sehr stabile Gebilde und zerfallen erst, wenn ihre Energie durch Reibung bis auf einen kleinen Rest aufgezehrt ist.

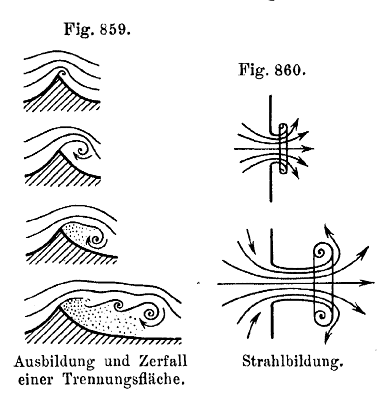
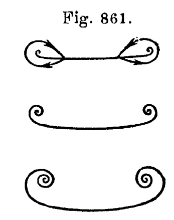

Fig. 859. Ausbildung und Zerfall einer Trennungsfläche.

Fig. 860. Strahlbildung.

Transversale Geschwindigkeitssprünge ergeben sich z. B. bei dem Zusammenfluß hinter einer unter kleinem Winkel gegen die Bewegungsrichtung geneigten Platte. Auf der „Druckseite" streben die Stromlinien unter der Wirkung des sich hier ausbildenden Überdrucks nach links und rechts auseinander, auf der „Saugseite" werden sie durch den Unterdruck zusammengebogen. An der Hinterkante der Platte hat die Strömung daher — von der Mitte abgesehen — auf der Druckseite eine Komponente nach dem Seitenrande zu, auf der Saugseite dagegen eine nach der Mitte zu; im stationären Fall muß wegen der Stetigkeit des Druckes und weil alle Stromlinien einheitlichen Ursprung haben, der Betrag der Geschwindigkeit auf beiden Seiten der Trennungsfläche je derselbe sein, der Geschwindigkeitssprung ist daher hier rein tangential. Erfahrungsgemäß rollen sich solche Trennungsflächen von den Seitenrändern her ein und ergeben so zwei Wirbel, die auf der ganzen von der Platte durchfahrenen Bahn zu finden sind. Fig. 861 gibt von dieser Art von Vorgängen eine Anschauung; sie stellt die Gestalt der Trennungsfläche in verschiedenen Schnitten hinter der Platte dar. Das Studium derartiger Vorgänge ist für das Verständnis der Wirkung von Flugzeugtragflügeln sehr wichtig geworden, vgl. § 14 und 15 von Kapitel XII.


Fig. 861. Trennungsfläche hinter einer geneigten Platte.

§ 7. Weiteres über Trennungsflächen. Druckmessung. In einer Flüssigkeit, deren Reibung gering genug ist, um in erster Näherung von ihr abzusehen, kann nach dem Vorstehenden als feste Regel angesehen werden, daß von jeder scharfen Kante, die quer überströmt wird, eine Trennungsfläche ausgeht. Ist die Kante ringförmig geschlossen, und findet die Strömung durch das Innere der geschlossenen Linie statt, wie bei Ausflußmündungen, bei plötzlich erweiterten Rohren usw., so bildet sich ein Strahl ähnlich den in § 4a beschriebenen Ausflußstrahlen aus, auch bei Wasserausfluß unter Wasser, wie bei Luftausfluß in Luft. In diesen Fällen wird der Strahl allerdings nach einer gewissen Strecke durch die Wirbel, die sich aus der Trennungsfläche bilden, wieder aufgezehrt. Findet die Strömung außen um die Linie herum statt, wie z. B. beim Umströmen einer senkrecht zum Strom stehenden Scheibe, so bildet sich hinter dieser ein „Totwasser“, das allerdings meist nicht gänzlich tot ist, sondern mehr oder weniger von Wirbeln erfüllt ist (vgl. Fig. 840). Doch sind dort immerhin die Geschwindigkeiten wesentlich kleiner als außerhalb[1]).

Trennungsflächen bilden sich übrigens unter geeigneten Bedingungen auch an runden Körperoberflächen, vgl. darüber § 6 von Kapitel XII. An abgerundeten Kanten ist daher die Strömung meist durchaus derjenigen an scharfen Kanten ähnlich.

Ein besonderes Interesse verdient der in Fig. 862 und 863 dargestellte Fall. Beim ersten Bewegungsbeginn muß hier eine Strömung nach der in Fig. 862 angedeuteten Form entstehen. An den Kanten entstehen dann zunächst Wirbel und Trennungsflächen. Nachdem die Wirbel sich aber entfernt haben, bleibt — wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Entfernung der beiden Kanten klein genug ist, um Labilität zu vermeiden — eine Strömung nach Fig. 863 zurück.

Fig. 862.

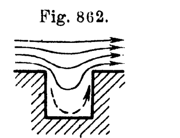
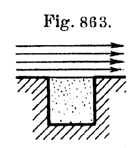


Fig. 863.



Strömung an einem Schlitz.

In dem Einschnitt herrscht praktisch Ruhe. Der Druck ist dort, da er in dem ruhenden Teil konstant ist und in der Trennungsfläche stetig in den der strömenden Flüssigkeit übergehen muß, offenbar gleich dem Druck in der strömenden Flüssigkeit. Schließt man an das Innere des Einschnitts durch eine Rohrleitung oder einen Gummischlauch ein Druckmeßgerät an, so gelingt es damit, den Druck in der strömenden Flüssigkeit zu messen. Statt eines Einschnitts kann auch ein irgendwie gestaltetes Loch, z. B. eines von kreisförmigem Querschnitt verwendet werden. Die Ränder des Loches und Schlitzes müssen gut eben sein, keinesfalls darf ein Grat in die strömende Flüssigkeit vorstehen, da dadurch der Druck in der nun gewölbten Trennungsfläche erheblich von dem der benachbarten Flüssigkeitsteile abweichen würde. Eine mäßige Abrundung der Lochränder ist zulässig. Eine zweckmäßige Anordnung für eine Druckentnahmestelle an einer Rohrwand zeigt Fig. 864. Um den Druck im Innern der strömenden Flüssigkeit zu messen,

[1]) Trennungsflächen, auf deren einer Seite die Flüssigkeit ruht, sind zuerst von Helmholtz theoretisch untersucht worden.

kann man in Verwendung desselben Grundgedankens eine vor das Ende eines dünnen Rohres gelötete, in der Mitte durchbohrte, sehr feine Scheibe (Sersche Scheibe, Fig. 865) verwenden. Diese ist aber gegen eine Richtungsabweichung des Luftstroms gegen die Scheibenebene sehr empfindlich. Besser ist ein Gerät nach Fig. 866, das bis zu Winkelabweichungen von etwa 5^0 den Druck einigermaßen genau liefert. Bei schräger Haltung zeigt es zu niedrigen Druck.

Durch Verbindung einer solchen Druckmessung mit der in § 4c und Fig. 850 angegebenen Messung des Gesamtdrucks ist man nun in der Lage,

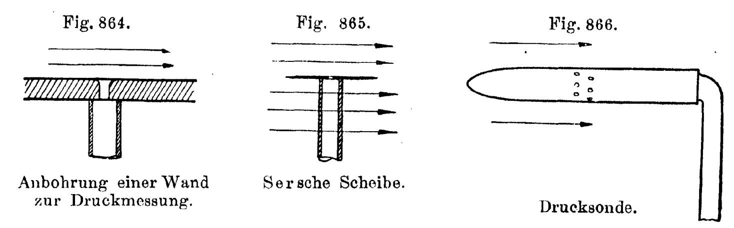


Fig. 864. Anbohrung einer Wand zur Druckmessung.

Fig. 865. Sersche Scheibe.

Fig. 866. Drucksonde.

als Differenzdruck den Geschwindigkeitsdruck (dynamischen Druck oder Staudruck) $q = \frac{\varrho\, w^2}{2}$ zu erhalten, aus dem bei bekannter Dichte ϱ die Geschwindigkeit w berechnet werden kann. Im m-kg-sec-System ist für atmosphärische Luft $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ ziemlich genau $= \frac{1}{8}\,\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$, dies gibt für w in m/sec und q in kg/m²: $q = \frac{w^2}{16}$ und $w = 4\sqrt{q}$, was leicht zu merken ist. Für Wasser ist in demselben Maßsystem $\varrho = \frac{\gamma}{g} = 102$; man ist aber bei Wasser mehr geneigt, statt der Drücke Druckhöhen anzugeben. Mit der Druckhöhe $= h$ (in m) wird $w = \sqrt{2\,g\,h}$ wie früher.

Man kann die Drucksonde nach Fig. 866 mit dem Pitotrohr nach Fig. 850 zu einem einzigen Gerät vereinigen, wodurch ein sehr handliches Mittel für die Geschwindigkeitsmessung entsteht. Fig. 867 stellt eine Ausführungsform eines solchen „Staugeräts“ dar, die sich durch große Unempfindlichkeit gegen Neigungsabweichungen des Instruments gegen die Strömungsrichtung auszeichnet. Bei Luftgeschwindigkeitsmessungen wird es gewöhnlich in Verbindung mit einem Mikromanometer (vgl. Kap. X, § 15) gebraucht.

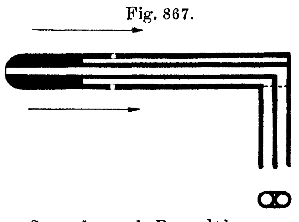


Fig. 867. Staurohr nach Prandtl.

Die Druckmessung durch Anbohrung gestattet auch sonst viele nützliche Anwendungen. So kann die Druckverteilung auf der Oberfläche eines umströmten Körpers (z. B. eines Luftschiffmodells oder Flugzeugflügels) dadurch studiert werden, daß man eine Reihe von Anbohrungen nach Fig. 863 anbringt,

die man nacheinander mit der einen Seite eines Druckmeßgeräts verbindet, wobei der Gegendruck konstant gehalten wird (man kann auch eine Anzahl Druckmeßgeräte gleichzeitig arbeiten lassen). Ein sehr bekannter Versuch über die Druckverteilung in einem verengten und wieder erweiterten Rohr, der zur Demonstration der Bernoullischen Gleichung verwendet wird, ist in Fig. 868 wiedergegeben. Durch den Drosselhahn am Rohrende kann der Druck dort passend eingestellt werden. Wird der Hahn voll geöffnet, so entsteht bei *b* erheblicher Unterdruck, der durch Anbringung eines nach unten führenden Rohres, das in ein Quecksilbergefäß taucht, deutlich nachgewiesen werden kann (Fig. 869). Der Rückgewinn an Druck ist im übrigen wegen

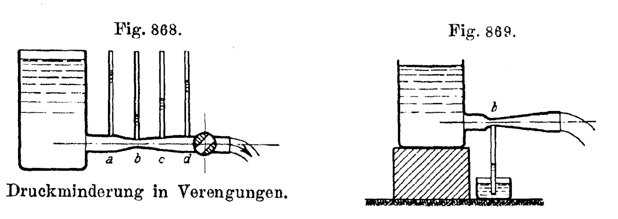


Fig. 868. Druckminderung in Verengungen.

Fig. 869.

Reibungsvorgängen in dem Teil hinter dem engsten Querschnitt etwas kleiner als nach der Theorie, immerhin ist qualitativ das Verhalten so, wie es der Bernoullischen Gleichung entspricht, und in dem verengten Teil stimmt sie, falls durch genügende Abrundung Wirbelbildung vermieden wird, sogar sehr gut. Solche Druckunterschiede an Verengungen können zur Mengenmessung verwendet werden, vgl. Kap. XII, § 10.

§ 8. Verfeinerte Betrachtungen über die Bewegungen einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit. Potentialströmung. Die mathematische Hydrodynamik steckt ihr Ziel weiter, als es in den vorausgehenden Paragraphen geschehen ist, sie will wirklich so, wie in § 1 angedeutet, die Geschwindigkeit an jedem Raumpunkt angeben können, und sich nicht, wie wir es bisher meist getan haben, mit Mittelwerten begnügen. Für die homogene reibungslose Flüssigkeit ist in dieser Beziehung ziemlich viel erreicht worden, doch ist zum Verständnis der einschlägigen Methoden mehr Mathematik erforderlich, als hier vorausgesetzt wird. Es müssen deshalb hier einige allgemeinere Darlegungen über die Eigenschaften solcher Bewegungen und einige einfache Beispiele genügen. Vorangestellt sei ein Satz von W. Thomson (Lord Kelvin), der hier zunächst ohne Beweis mitgeteilt wird. Bevor der Satz formuliert wird, müssen einige Begriffe erklärt werden.

1. Unter „flüssigen Linien“ und „flüssigen Flächen“ sollen solche Linien und Flächen verstanden werden, die dauernd von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet werden.

2. Unter einem Linienintegral längs einer gegebenen Linie zwischen den Punkten *A* und *B* soll verstanden werden das Integral über das Produkt

des Linienelements ds mit der Geschwindigkeitskomponente in Richtung von ds, also

$$L = \int_A^B w\,ds\,\cos\alpha = \int_A^B \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s}\ ^{1)}$$

(α = Winkel zwischen w und ds). Im Falle einer nichtstationären Bewegung ist festzuhalten, daß solche Linienintegrale für einen Momentanzustand der Geschwindigkeitsverteilung zu bilden sind.

3. Der Betrag des Linienintegrals für eine geschlossene Linie heißt Zirkulation (Bezeichnung Γ), also, mit $\oint$ als Zeichen für ein Integral längs einer geschlossenen Linie

$$\Gamma = \oint \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Mit diesen Erklärungen kann der Satz von W. Thomson so ausgesprochen werden: In einer reibungslosen homogenen Flüssigkeit bleibt die Zirkulation längs einer geschlossenen flüssigen Linie zeitlich konstant.

Aus diesem Satz können viele wichtige Folgerungen gezogen werden. Die erste ist die folgende:

Beginnt die Bewegung aus der Ruhe heraus, so ist der Anfang, d. h. vor Beginn der Bewegung, sicher die Zirkulation für jede geschlossene flüssige Linie gleich Null, sie bleibt daher dauernd für diese Linie gleich Null. Wenn aber das Linienintegral über geschlossene Linien in einem Gebiet gleich Null ist, so ist auch das Linienintegral von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B vom Wege unabhängig, gleichgültig, welcher Weg innerhalb des Gebietes gewählt wird. Denn man kann ja den bisherigen Weg von B nach A zurückgehen (wodurch die Beträge von A nach B wegen umgekehrten Richtungssinnes von ds genau aufgehoben werden) und auf einem anderen Wege wieder nach B gehen. Das Ganze ist $\int_A^B$ plus einem Integral über einen geschlossenen Weg, das $= 0$ ist, also $= \int_A^B$, was zu beweisen war. Betrachtet man den Punkt A als fest, dann ist durch das $\int_A^B \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s}$ jedem Punkt B ein Zahlenwert zugeordnet. Wir bezeichnen ihn mit Φ und nennen ihn Potential am Punkt B. Geht man von B nach einem um ds entfernten Punkt C weiter, dann ist, da für die Bildung von $\int_A^C$ der Weg über B genommen werden darf,

$$\int_A^C = \int_A^B + \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s} \quad \text{oder} \quad \Phi_C = \Phi_B + w\,ds\,\cos\alpha = \Phi_B + w\,dh, \quad (2)$$

[1]) $\mathfrak{w}\,d\mathfrak{s}$ = skalares Produkt der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $d\mathfrak{s}$, vgl. Kap. IV, § 27.

wenn dh die Projektion von ds auf die Richtung von w bedeutet. Für $\alpha = 90^0$ wird $\cos \alpha = 0$ und daher $\Phi_C = \Phi_B$. Die Strecke $ds = \overline{BC}$ steht daher immer senkrecht auf der Richtung von $\mathfrak{w}$, wenn $\Phi_C = \Phi_B$ ist. Die Gesamtheit aller Punkte, für die $\Phi = \Phi_B$ ist, bildet aber eine Fläche, die durch den Punkt B geht[1]). Die Tangentialebene dieser Fläche im Punkt B steht also nach dem Vorstehenden senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ im Punkt B. Es gilt daher allgemein, daß die Stromlinien, die ja überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors haben, überall senkrecht auf den Flächen $\Phi = const$ stehen.

Für beliebige Werte von α ergibt sich aus Gl. (2) mit $\Phi_C - \Phi_B = d\Phi$ einmal

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = w \cos \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

andererseits auch

$$\frac{d\Phi}{dh} = w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

dh steht dabei gemäß obigem senkrecht auf der Fläche $\Phi = const$. Vektoriell schreibt man

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \Phi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

(lies „Gradient von Φ“) und faßt damit die Aussage (4) mit der zusammen, daß $\mathfrak{w}$ senkrecht auf den Flächen $\Phi = const$ steht, also: Geschwindigkeit nach Größe wie nach Richtung = größter Anstieg (= Gradient) von Φ.

Die geometrische Begriffsbildung des Potentials und Gradienten, wie sie hier auftritt, stimmt völlig mit der des Kräftepotentials überein, vgl. Kap. IV, § 73. Von dort ist auch der Name Potential entnommen. Der Gradient des Kräftepotentials ist allerdings eine Feldstärke, der unseres Potentials eine Geschwindigkeit. Man bezeichnet es deshalb als „Geschwindigkeitspotential“ oder auch „Strömungspotential“. Als ein Unterschied mag noch erwähnt werden, daß es üblich ist, die Feldstärke $\mathfrak{g} = -\operatorname{grad} U$ und $\mathfrak{w} = +\operatorname{grad} \Phi$ zu setzen. Man könnte unter Umkehrung des Vorzeichens von Φ Übereinstimmung herbeiführen, und es geschieht auch manchmal, hier mag aber an dem bequemen + -Zeichen festgehalten werden.

Aus dem weiter oben Gesagten folgt also unter Verwendung der hier entwickelten Begriffe, daß jede aus der Ruhe heraus entstandene Bewegung einer homogenen reibungsfreien Flüssigkeit ein Potential besitzt. Die „Potentialströmung“, wie wir solche Bewegungen nennen wollen, zeichnet sich dadurch aus, daß die Elemente keine Drehung erfahren. Als Maß für die Drehung kann nämlich immer die Zirkulation längs einer kleinen geschlossenen Kurve dienen, die hier nach dem Gesagten gleich Null ist.

Nimmt man als Gegenbeispiel eine Flüssigkeit an, die wie ein starrer Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so ist hier für einen Kreis vom Radius r, falls der Kreismittelpunkt als Nullpunkt des Bezugssystems gewählt wird[2]), die Geschwindigkeit $= \omega r$; sie hat die Richtung des Kreisumfangs. Das Linien-

[1]) Diese Fläche scheidet das Gebiet $\Phi > \Phi_B$ von dem Gebiet $\Phi < \Phi_B$.

[2]) Eine Translationsbewegung liefert zur Zirkulation keinen Beitrag, man darf daher von ihr bei der Berechnung der Zirkulation immer absehen.

integral für diesen ist also $\Gamma = 2\pi r \,.\, \omega r = 2\pi r^2 \omega$. Dividiert man durch die Kreisfläche $F = \pi r^2$, so wird $\frac{\Gamma}{F} = 2\omega$; $\frac{\Gamma}{F}$ ergibt sich sonach als ein gutes Maß für die Drehung. Hat die Fläche F eine allgemeine Lage, d. h. bildet sie mit der Drehachse einen Winkel α, so ergibt sich leicht, daß dann für unsere Bewegung $\frac{\Gamma}{F} = 2\omega \sin \alpha$ wird. Die Flächenlage, die das Maximum von $\frac{\Gamma}{F}$ liefert, ist also dadurch ausgezeichnet, daß die Drehachse senkrecht zu F steht.

Bei der Potentialbewegung ist jede Zirkulation für im Innern des Gebietes verlaufende Linien gleich Null, die Bewegung daher überall im Innern „drehungsfrei". Man hat geglaubt, daraus schließen zu müssen, daß bei einer aus der Ruhe heraus entstehenden Bewegung einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit nie ein Wirbel entstehen könne. Betrachtet man jedoch die Bewegungsvorgänge bei der Bildung einer Trennungsfläche von der in § 6 geschilderten Art näher, so zeigt sich, daß alle im Ruhezustand im Innern der Flüssigkeit gezogenen flüssigen Linien sich so bewegen und deformieren, daß sie der Trennungsfläche ausweichen und so keine von ihnen die Trennungsfläche durchsetzt. Über die gegenseitigen Beziehungen der Gebiete zu beiden Seiten der Trennungsfläche sagt demnach der Thomsonsche Satz nichts aus. Es ist daher auch kein Widerspruch gegen den Thomsonschen Satz, daß in einer praktisch reibungsfreien Flüssigkeit an scharfen Kanten Trennungsflächen und damit auch Wirbel entstehen können.

Anmerkung: Bei den wirklichen Flüssigkeiten, die immer etwas Zähigkeit besitzen, tritt an Stelle der Trennungsfläche eine Trennungsschicht, die aber häufig sehr dünn ist. Die Teilchen der Trennungsschicht stammen immer aus der unmittelbaren Nähe der Oberfläche des festen Körpers, wo die Reibungswirkungen ebenfalls auch bei noch so kleiner Zähigkeit nicht mehr vernachlässigt werden können. Die genauere Analyse der inneren Vorgänge in den Trennungsschichten muß daher die Zähigkeitswirkungen berücksichtigen. Für das Studium der äußeren Vorgänge genügt aber meist schon die Betrachtung der an Stelle der Trennungsschicht eingeführten Trennungsfläche. Über die Reibungswirkungen vgl. Kap. XII, § 1 bis 6.

In § 5 war für die Strömung, bei der die Konstante der Bernoullischen Gleichung für alle Stromlinien eines Gebietes denselben Wert hat, aus dem Druckgefälle quer zur Stromlinie abgeleitet worden, daß

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0$$

ist (r = Krümmungsradius der Stromlinie). Die Zirkulation um ein kleines Viereck aus zwei Stromlinien und zwei Normalen (vgl. Fig. 870) liefert nun, da die Normalen keine Beiträge geben:

Fig. 870.

$$w \,.\, r\,d\varphi - \left(w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot ds'\right)(r + ds')\,.\,d\varphi$$
$$= -ds' \,.\, d\varphi\left(r\frac{\partial w}{\partial s'} + w + \frac{\partial w}{\partial s'} ds'\right).$$

Das letzte Glied in der Klammer ist als klein von höherer Ordnung zu streichen, der Rest ist nach der obigen Beziehung gleich Null, d. h. die obige Bewegung ist eine Bewegung mit Zirkulation gleich Null für jeden kleinen Bezirk, d. h. sie ist eine Potentialbewegung. Umgekehrt gilt in jeder

stationären Potentialbewegung die Bernoullische Gleichung unabhängig von den Stromlinien (Beweis am Schluß der folgenden „mathematischen Ergänzung").

Mathematische Ergänzung.

a) Beweis des Thomsonschen Satzes. Sind u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit, so drückt sich das Linienintegral aus durch $\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ (jeder Schritt ds kann durch drei Schritte dx, dy, dz ersetzt werden, und u, v, w sind die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung von dx, dy bzw. dz). Es muß nun die zeitliche Änderung des Integrals unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Linie dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Das Zeichen dieser Differentiation sei $\frac{d}{dt}$ (man findet in der Literatur auch $\frac{D}{Dt}$ dafür). Wir wollen zunächst $\frac{d}{dt}\int u\,dx$ berechnen und können dafür zunächst schreiben $\int \frac{du}{dt}dx + \int u \frac{d}{dt}(dx)$. In dem ersten Ausdruck kann $\frac{du}{dt}$ mittels der Eulerschen Gleichung [§ 3, Gl. (5)] durch $X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$ ersetzt werden; zur Berechnung des zweiten Ausdruckes sei bemerkt, daß offenbar für festgehaltenes Teilchen $\frac{dx}{dt} = u$ ist. Dann ist auch $\frac{d}{dt}(x + dx) = u + du$, also $\frac{d}{dt}(dx) = du$, wobei also du die Änderung von u beim Fortschreiten längs der Linie bei festgehaltener Zeit ist. Wird mit den anderen beiden Gliedern des Linienintegrals ebenso verfahren, so ergibt sich also

$$\frac{d}{dt}\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$+ \int \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) + \int (u\,du + v\,dv + w\,dw).$$

Es sei nun angenommen, daß die Massenkraft X, Y, Z ein Potential U habe, daß also

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

sei; ferner soll die Dichte nur vom Druck allein abhängen („homogene Flüssigkeit"), dann sind die obigen Ausdrücke sämtlich integrabel. Die zeitliche Änderung des Linienintegrals längs einer flüssigen Linie zwischen zwei Punkten A und B, die ebenfalls dauernd mit den zugehörigen Flüssigkeitsteilchen zusammenfallen sollen, wird damit

$$\frac{d}{dt}\int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = U_A - U_B + P_A - P_B$$
$$+ \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_B - \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_A.$$

Dabei ist wieder wie in § 3 $\int \frac{dp}{\varrho} = P$ gesetzt. Es mag darauf hingewiesen werden, daß hier das Vorzeichen des Geschwindigkeitsquadrates entgegengesetzt zu dem in der Bernoullischen Gleichung ist.

Handelt es sich um eine geschlossene Linie, so fällt A mit B zusammen, und damit ergibt die rechte Seite Null. Hiermit ist der Satz bewiesen und es zeigt sich dabei die Bedeutung der Voraussetzungen. Die eine, daß das Kraftfeld ein Potential haben müsse, ist bei der bisherigen Formulierung des Satzes nicht erwähnt worden, da von der Vorstellung ausgegangen war, daß eine Massenkraft überhaupt nicht in Betracht käme. Auf die andere, die viel wichtiger ist, die Homogenität, wurde bereits früher hingewiesen. In einer inhomogenen Flüssigkeit gilt der Thomsonsche Satz nicht. Die vorstehende Ableitung zeigt den Weg an, wie z. B. bei ungleicher Erwärmung einer Luftmasse die zeitliche Änderung des Linienintegrals berechnet werden kann.

b) **Bemerkungen über die Potentialbewegung.** Die Winkelgeschwindigkeit ω hat drei Komponenten (Drehungsanteile um die Koordinatenachsen):

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Sollen diese Drehungsanteile sämtlich Null sein, so muß also $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ usw. sein. Wird nun ein Geschwindigkeitspotential Φ eingeführt, also $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$; $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$; $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ gesetzt, so sind diese Beziehungen identisch erfüllt (die angeschriebene gibt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$, was bekanntlich immer zutrifft. Mit $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ usw. kann nun aber in Gl. (4) von § 3

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)$$

geschrieben werden. Multipliziert man jetzt die drei Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit dx bzw. dy und dz und addiert, so sind alle Ausdrücke ohne Einschränkung des Integrationsweges integrabel und liefern

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + P + U = const.$$

Da die Integration bei festgehaltener Zeit erfolgt, kann die Konstante rechts noch zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werte annehmen (z. B. durch Einwirkung von außen der Druck sich ändern). Man schreibt deshalb richtiger $f(t)$ für *const.* Der Ausdruck $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ wird dadurch erhalten, daß $\Phi = \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ ist und $\int \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int u\,dx$ usw. ist. Für stationäre Strömungen geht die vorstehende Gleichung in die gewöhnliche Bernoullische Gleichung über.

§ 9. Weiteres über Potentialbewegung.

Aus Gl. (3) von § 8 folgen Formeln für den Zusammenhang der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w mit dem Potential Φ, wenn man ds der Reihe nach $= dx$, $= dy$ und $= dz$ setzt. Es wird also

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x};\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y};\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

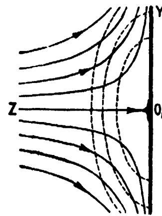
[Formel (2) von § 2] liefert damit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung, die sogenannte Laplacesche Gleichung, tritt ebenso bei den elektrostatischen Potentialen [und auch anderwärts][1]) auf, und gilt dort für diejenigen Teile des Feldes, wo keine Ladungen sitzen (und die Dielektrizitätskonstante konstant ist). Daher lassen sich die aus der Elektrostatik bekannt gewordenen Lösungen von Gl. (2) auch hier verwenden, wie z. B. die Lösung für eine Punktladung, für einen Dipol usw. Von großer praktischer Wichtigkeit ist dabei der Umstand, daß die Summe oder Differenz zweier Lösungen wieder eine Lösung liefert, wie sich aus der Linearität von Gl. (2) ergibt. Die Geschwindigkeiten setzen sich bei dieser „Überlagerung" zweier Potentiale nach dem Parallelogramm zusammen.

Einige Beispiele von Potentialströmungen: a) Staupunktströmung. Einer der einfachsten Ansätze eines Potentials ist $\Phi = {}^1/_2 (ax^2 + by^2 + cz^2)$. Gl. (2) liefert, daß dabei $a + b + c = 0$ sein muß. Wenn wir Rotationssymmetrie mit der Z-Achse als Rotationsachse haben wollen, so können wir $b = a$, $c = -2a$ setzen, wodurch Gl. (2) befriedigt wird, also wird

Fig. 871.



Staupunktströmung.

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

und $u = ax$; $v = ay$; $w = -2az$. Die Stromlinien in der YZ-Ebene ($x = 0$) sind durch die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} = -\frac{2z}{y}$$

gegeben, die

$$\ln z = const - 2 \ln y$$

oder

$$y^2 z = const$$

liefert (sogenannte kubische Hyperbel, vgl. die Fig. 871).

Ist die Bewegung stationär, d. h. a zeitlich konstant, so gilt für den Druck

$$p = const - \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$= const - \frac{\varrho a^2}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2).$$

Bei $x = y = z = 0$ ist also ein Druckmaximum, und im übrigen sind die Flächen gleichen Druckes Ellipsoide mit dem Achsenverhältnis $1 : 1 : {}^1/_2$, vgl. Fig. 871.

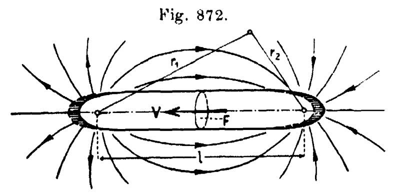
b) Quellen und Senken. Nach der an Gl. (2) geknüpften Bemerkung sind die bekannten Lösungen für die elektrostatischen Potentiale auch Lösungen für mögliche Potentialströmungen, wofern die Grenzbedingungen für diese verwirklichbar erscheinen. Bereits das elektrostatische Feld einer Punkt-

[1]) Auch z. B. bei den reibenden Strömungen zwischen eng gestellten parallelen Platten; dieser Vorgang wird vielfach zur Demonstration der Stromlinien der Potentialbewegung benutzt. Die Ergebnisse sind unter bestimmten Voraussetzungen in Übereinstimmung mit der Potentialbewegung, obwohl das Kräftespiel dort ganz anders geartet ist, vgl. hierüber § 8 von Kap. XII.

ladung liefert eine wichtige Strömung, die sogenannte Quell- bzw. Senkenströmung. Das Potential lautet $\Phi = + \frac{c}{r}$, wo r den Abstand von einem Punkte O bedeutet. Es ist also konstant auf Kugeln, die um O beschrieben werden, die Geschwindigkeit ist damit, da sie zur Fläche konstanten Potentials senkrecht steht, rein radial gerichtet und hat den Betrag $\frac{|c|}{r^2}$. Die Durchflußmenge, die in der Zeiteinheit durch die Kugel vom Radius r (Oberfläche $= 4\pi r^2$) hindurchtritt, ist $Q = 4\pi r^2 \cdot \frac{c}{r^2} = 4\pi c$. Diese Menge entsteht bei der „Quelle" im Punkt O sekundlich neu, bei der Senke verschwindet sie dort. Genau in dieser Weise kommt das physikalisch nicht vor, aber man kann z. B. bei O durch ein dünnes Rohr Flüssigkeit absaugen und hat dann in der Umgebung der Saugstelle genähert eine Strömung der angegebenen Art zu erwarten (nur genähert, da das endliche Volumen des Rohres stört usw.).

Eine andere sehr nützliche Anwendung der Quell- und Senkenströmung ist die folgende: Bewegt sich ein stabförmiger Körper mit der Geschwindigkeit V in der Richtung der Stabachse vorwärts, so wird fortwährend an seinem vorderen Ende Flüssigkeit verdrängt, an seinem hinteren Ende fließt sie in dem frei gewordenen Raum zusammen (vgl. Fig. 872). Die Bewegung in der Nachbarschaft des Vorderteils ist also so, als ob dort eine Quelle, und die am Hinterteil so, als ob dort eine Senke wäre. In der Tat gibt die Formel

Fig. 872.



Potentialströmung um einen bewegten Körper. Ruhendes Bezugssystem.

$$\Phi = c\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

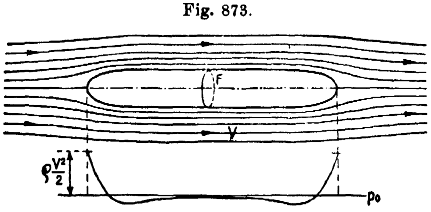
diese Strömung richtig wieder (genau genommen müssen dafür die Stabenden eine bestimmte wohl abgerundete Form haben, aber auch bei anderer Form der Stabenden stellt die Gleichung eine brauchbare Näherung dar). Die „Ergiebigkeit" Q der Quelle und der Senke ist dabei $= F \cdot V$ zu setzen, wo F den Stabquerschnitt bedeutet, also $c = \frac{FV}{4\pi}$. Betrachtet man diese Bewegung die zunächst wegen des stetigen Vorrückens des Stabes und der Geschwindigkeitsverteilung um ihn herum nicht stationär ist, von einem Bezugssystem aus, das sich mit dem Körper mitbewegt, so ergibt sich eine stationäre Bewegung, für die der Körper in Ruhe ist, und der Flüssigkeitsstrom an dem Körper vorbeigleitet. Mathematisch wird diese Strömung durch das Potential $\Phi' = \Phi + Vx$ dargestellt. Ihre Stromlinien sind in Fig. 873 dargestellt. Darunter ist die Druckverteilung über die Oberfläche des Körpers dargestellt, wie sie von der Bernoullischen Gleichung geliefert wird.

Rückt man die Quelle und die Senke immer näher zusammen und verstärkt ihre Ergiebigkeit in demselben Maße, als ihre Entfernung abnimmt,

so erhält man in der Grenze einen „Dipol"; die Strömung nach Fig. 873 geht dabei über in die um eine Kugel (vgl. Fig. 874). (Die wirkliche Strömung um eine Kugel sieht, wie bemerkt werden mag, wegen Reibungseinflüssen etwas anders aus.)

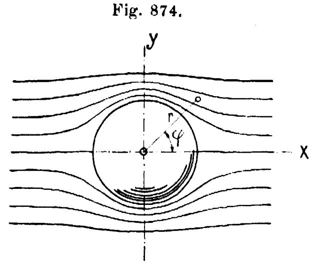
c) Ebene Bewegung. Ist die Bewegung derart, daß alle Stromlinien ebene Kurven in lauter parallelen Ebenen sind, und daß auf einer zu der Ebenenschar senkrechten Geraden überall derselbe Strömungszustand herrscht, so spricht man von „ebener Bewegung". Nimmt man eine der Ebenen zur XY-Ebene, so ist also von den drei Geschwindigkeitskomponenten u, v, w die letztere $= 0$, und die ersteren sind Funktionen von x und y allein. Die Theorie dieser Strömungen ist in der mathematischen Hydrodynamik besonders vollkommen durchgebildet, da hier ein besonders mächtiges Hilfsmittel zur Verfügung steht. Es zeigt sich nämlich, daß der reelle wie der imaginäre Teil einer jeden analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $x + iy$ ein Potential darstellt, das der Gl. (2) genügt. Die ebene Staupunktströmung z. B. wird durch $Z = Az^2$, die ebene Quellströmung durch $Z = A \ln z$ gegeben, wobei $Z = \Phi + i\Psi$ und $z = x + iy$ ist[1]). Es ist an diesem Ort nicht möglich, auf diese Dinge näher einzugehen. Auf eine bestimmte Art ebener Strömungen wird im nächsten Paragraphen noch näher eingegangen werden.

Fig. 873.



Strömung um einen bewegten Körper. Mitbewegtes Bezugssystem. Darunter Druckverteilung.

Fig. 874.



Potentialströmung um die Kugel.

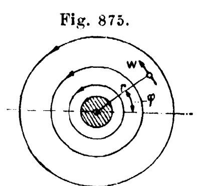
§ 10. Potentialströmung mit Zirkulation; Tragflügelauftrieb; Magnuseffekt. Obwohl bei allen Potentialströmungen in jedem kleinen Bereich die Zirkulation verschwindet, gibt es doch solche, bei denen im ganzen eine Zirkulation auftritt. Vorbedingung ist dabei allerdings, daß das Gebiet, in dem die Strömung sich abspielt, mehrfach zusammenhängend ist. Der mehrfache Zusammenhang wird dadurch gekennzeichnet, daß es Kurven gibt, die man durch stetige Veränderung nicht auf Null zusammenziehen kann, ohne das Gebiet zu verlassen[2]). Ist die Zirkulation längs einer solchen

1) Es ist $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; $\ln(x + iy) = \ln r + i\varphi$, wo $r =$ Radius, $\varphi =$ Zentriwinkel ist.

2) Beispiele von zweifach zusammenhängenden Räumen: Ein Zimmer mit einer Säule in der Mitte; der Raum, der einen Ring umgibt.

Kurve $= \Gamma$, so ist, wenn im übrigen die Strömung drehungsfrei ist (also in jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet die Zirkulation verschwindet), die Zirkulation längs jeder anderen Kurve, die durch stetige Änderung ohne Verlassen des Gebiets aus der ersten entsteht, die Zirkulation ebenfalls $= \Gamma$, wie leicht zu zeigen ist. Das Potential, das ja als Linienintegral zwischen einem festgehaltenen Punkt und dem jeweiligen Raumpunkt definiert war, ist daher bei solchen Strömungen „mehrdeutig", es nimmt bei jedem Umlauf um den Betrag Γ zu.

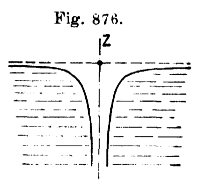
Fig. 875.



Potentialströmung mit Zirkulation.

Der einfachste Fall einer ebenen Strömung dieser Art wird durch das Potential $\Phi = c\,\varphi$ gegeben, in dem φ einen Zentriwinkel bedeutet (vgl. Fig. 875). Dieses Potential, das auch der Gl. (2) von § 9 genügt, nimmt bei einem Umlauf ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2\,\pi$) um $2\,\pi\,c$ zu, welcher Betrag also die Zirkulation Γ darstellt. Die Flächen konstanten Potentials sind hier Ebenen durch die Achse, die Stromlinien daher Kreise. Die Geschwindigkeit $w = \frac{d\,\Phi}{d\,s}$ wird mit $d\,s = r\,d\,\varphi$ $w = \frac{c}{r}$, die Strömung stimmt daher mit der in dem Beispiel von § 5, b betrachteten überein. Für $r = 0$ würde nach der Formel $w = \infty$ sein; die Strömung hat also nur für Begrenzung durch einen Kern von endlichem Durchmesser (in Fig. 875 schraffiert) physikalischen Sinn. Der Kern kann entweder durch einen festen Körper gebildet sein, er kann aber auch aus drehender Flüssigkeit bestehen (in der es kein Potential gibt), er kann endlich auch aus einer anderen (leichteren) Flüssigkeit bestehen, die an der Rotation keinen Anteil nimmt, also z. B. bei Wasser als umlaufender Flüssigkeit durch Luft gebildet werden (Hohlwirbel). Unter der Wirkung der Schwere nimmt die Oberfläche eines solchen Hohlwirbels eine Gestalt wie in Fig. 876 an, deren Form aus der Bernoullischen Gleichung zu $z = z_0 - \frac{w^2}{2\,g} = z_0 - \frac{c^2}{2\,g\,r^2}$ erhalten wird. Derartige Trichter können vielfach in fließenden Gewässern, beim Entleeren einer Badewanne usw. beobachtet werden. In allen solchen Fällen handelt es sich um Strömungen, in denen durch irgendwelche anderen Ursachen bereits vorher war Zirkulation enthalten.

Fig. 876.

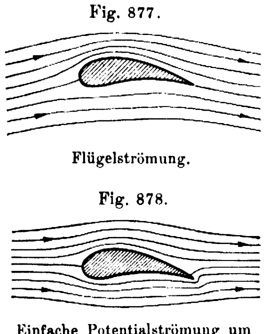


Hohlwirbel.

Eine Anwendung anderer Art wird von den Potentialströmungen mit Zirkulation in der Lehre vom Tragflügelauftrieb gemacht. Die Tragflügelströmung Fig. 877 läßt sich durch „Überlagerung" aus der „gewöhnlichen Potentialströmung" Fig. 878 (ohne Zirkulation) und der zirkulatorischen Strömung Fig. 879 darstellen; sie weist daher selbst ebenfalls eine Zirkulation auf. Diese ist mit der Entstehung des Auftriebs aufs engste verknüpft; auch ohne alle Rechnung sieht man leicht, daß die zirkulatorische Strömung oben die Potentialströmung nach Fig. 878 verstärkt, unten ihr entgegenwirkt. Nach Bernoulli bedeutet das aber eine Druckverminderung oben und eine

Druckvermehrung unten, d. h. einen Auftrieb. Kutta und Joukowski fanden unabhängig voneinander durch theoretische Rechnungen diese Kraft genau proportional der Zirkulation Γ, und zwar ist sie für die Längeneinheit $= \varrho \Gamma V$, wo V die Relativgeschwindigkeit des Tragflügels gegen die Flüssigkeit ist. Ein Beweis dieses Satzes wird in § 13, a gebracht werden.

Fig. 877.

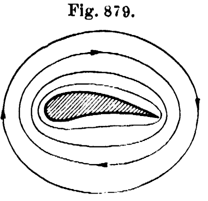


Flügelströmung.

Fig. 878.

Einfache Potentialströmung um einen Flügel.

Fig. 879.



Zirkulatorische Umströmung eines Flügels.

Nach dem Thomsonschen Satz kann bei Bewegungen aus der Ruhe heraus auch in einen mehrfach zusammenhängenden Raum zunächst keine Zirkulation entstehen, denn im Ruhestand war die Zirkulation auf jeder Linie gleich Null, und sie bleibt dann auch gleich Null. In Wirklichkeit entsteht die Zirkulation in der Regel auf dem Wege über eine Trennungsfläche. Bei dem Spiralgehäuse von Fig. 851, S. 1057 z. B. bildet sich beim Bewegungsbeginn an der scharfen Kante bei K ein Wirbel von der Art der Fig. 858, S. 1060 aus. Der Wirbel fließt später bei O ab, und nur seine Zirkulation bleibt für die Dauer der Strömung zurück.

Für die Bewegung eines Tragflügels ergibt sich eine ganz ähnliche Lösung. Beim Bewegungsbeginn entsteht an der Hinterkante des Tragflügels, die im Anfang gemäß Fig. 878 quer überströmt wird, eine Trennungsfläche nach Fig. 880. Später wandert der aus der Trennungsfläche entstandene Wirbel ab und läßt an dem Tragflügel eine Zirkulation, die seiner eigenen entgegengesetzt gleich ist, zurück. (Die flüssigen Linien, die den Tragflügel und den Wirbel zusammen umschließen, behalten dabei die Zirkulation Null, wie es der Thomsonsche Satz verlangt.)

Fig. 880.



Anfahrt eines Flügels.

Anmerkung. Damit der Flügel den Raum zweifach zusammenhängend macht, muß man ihn seitlich durch zwei parallele Wände begrenzen, oder man muß annehmen, daß er nach beiden Seiten ins Unendliche reicht. Bei wirklichen Tragflügeln ist weder das eine noch das andere der Fall. Die Zirkulation um den Flügel, die auch hier vorhanden und zum Zustandekommen des Auftriebs notwendig ist, wird hier möglich durch eine Trennungsfläche von der bereits in § 7 geschilderten Art mit transversalem Geschwindigkeitssprung, über die in § 13 von Kap. XII noch Näheres gesagt werden wird.

Eine Zirkulation von derselben Art, wie beim Tragflügel, entsteht auch bei einem quer zur Achse angeströmten rotierenden Kreiszylinder (und zwar

durch Reibungswirkungen, vgl. Kap. XII, § 7), und erzeugt hier auf der Länge 1 eine Kraft quer zur Strömung gleich $\varrho \, \Gamma V$, die hier auch „Quertrieb“ genannt wird. Auch bei dreieckigen und viereckigen Prismen, die um ihre Längsachse rotieren, sowie bei Kugeln usw., zeigt sich eine solche Kraft. Der Sinn der Kraft ist dabei immer von der Seite, wo Drehung und Strömung einander entgegenlaufen nach derjenigen, wo sie gleichlaufen, gerichtet. Diese Erscheinung führt nach ihrem Entdecker Magnus (1852) den Namen Magnuseffekt.

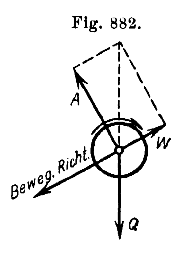
Das Verhalten kugelförmiger Geschosse, die häufig beim Verlassen des Laufes unbeabsichtigte Rotationen um Querachsen erhalten und dadurch in ihrer Flugbahn Seitenabweichungen ergeben, ist der Anlaß zum Studium dieser Erscheinungsgruppe gewesen. Solche Seitenabweichungen lassen sich auch beim Fluge von „geschnittenen“ Tennis- und Golfbällen durch die Luft beobachten; sie können sehr beträchtlich sein. Neuerdings hat A. Flettner mit seinem Rotorschiff die Erscheinung im großen zum Antrieb von Schiffen durch den Wind angewandt, wobei an Stelle der Segel senkrecht stehende schnell rotierende Zylinder verwendet werden. Es empfiehlt sich dabei, an den Enden überstehende Scheiben anzubringen (vgl. Fig. 881), da sonst die nicht mit umlaufende Luft an den Zylinderenden in den Unterdruckraum auf der Saugseite eindringt, und die Strömung dort teilweise zerstört.

Fig. 881.

Rotierender Zylinder.

Versuch: Ein von einem kleinen Elektromotor angetriebener rotierender Zylinder befindet sich auf einem auf Schienen laufenden Wägelchen. Wird der Zylinder mittels eines kleinen Schraubenventilators (Tisch-Ventilator) quer zu den Schienen angeblasen, so läuft der Wagen auf den Schienen vorwärts. Wendet man den Ventilator so, daß der Wind mit dem Gebläse einen anderen Winkel bildet, so kann man das Verhalten des Zylindersegels unter den verschiedenen Kursen studieren. Es gelingt, den Wagen unter spitzem Winkel gegen den Wind fahren zu lassen. Bei Umkehrung der Drehrichtung läuft er in der entgegengesetzten Richtung. — Ein mit wagerechter Achse in schnelle Rotation versetzter leichter Zylinder fällt losgelassen nicht senkrecht herunter, sondern führt einen flachen Gleitflug aus. Er erleidet außer dem Auftrieb (A) senkrecht zu seiner Bahn einen Widerstand (W) in der Richtung der Bahn, der aber im günstigsten Falle (länglicher Zylinder mit Endscheiben) wesentlich kleiner als der Auftrieb ist. Die Resultierende der beiden Kräfte hält dem Gewicht des Zylinders das Gleichgewicht (vgl. Fig. 882) und verhindert so sein Fallen.

Fig. 882.

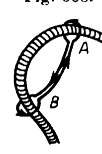


§ 11. Drehende Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit. Wirbelfäden. Beim Studium der drehenden Bewegung einer homogenen

reibungsfreien Flüssigkeit kann wieder der Thomsonsche Satz von der Konstanz der Zirkulation längs einer flüssigen Linie als Führer dienen. Man kann aus ihm und aus den geometrischen Eigenschaften des Drehungsvektors (auch Wirbelvektor genannt) Sätze ableiten, die gewisse wichtige geometrische und mechanische Zusammenhänge aufzeigen. Es sind dies die berühmten Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen, die dieser auf einem anderen Wege, ausgehend von elektrodynamischen Vorstellungen gefunden hat[1]). Die aus diesen Sätzen zu ziehenden Folgerungen werden aber nur dann einfach, wenn das Gebiet der in Drehung befindlichen Flüssigkeit fadenförmige Gestalt hat und die übrige Flüssigkeit drehungsfrei ist. Man spricht in diesem Falle von einem „Wirbelfaden". Die wichtigsten Sätze über Wirbelfäden lassen sich bereits aus dem Verhalten der sie umgebenden Potentialströmung ableiten, so daß hier ein näheres Eingehen auf die Mechanik der drehenden Flüssigkeit entbehrt werden kann.

Bei der Behandlung der Potentialbewegung mit Zirkulation in § 10 — um eine solche handelt es sich auch hier — ist bereits erwähnt worden, daß das Gebiet dieser Potentialbewegung mehrfach zusammenhängend ist, und daß die Zirkulation für alle ohne Gebietsüberschreitung ineinander überführbaren Linien gleich groß sein muß. Das heißt, für den Wirbelfaden ausgesprochen, daß dieser ringförmig in sich geschlossen sein oder beiderseits bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen muß, und daß die Zirkulation um ihn in ein und demselben Augenblick in allen Stellen denselben Betrag haben muß. Diese Eigenschaften, die einfach mit der geometrischen Struktur der Potentialströmungen zusammenhängen, können auch so eingesehen werden, daß man die in Fig. 883 angegebene geschlossene Linie betrachtet. Die Linie ist so gewählt, daß man sie durch stetige Veränderung, ohne das Gebiet des Wirbelfadens zu berühren, auf Null zusammenziehen kann; sie hat daher sicher die Zirkulation Null. Sie besteht aber aus zwei Teilstücken, die in entgegengesetzter Richtung längs ein und derselben Linie AB verlaufen und deren Beiträge sich daher gegenseitig aufheben, und aus zwei weiteren Teilen, der Umkreisung des Wirbelfadens bei A und der bei B. Diese letzteren Beiträge müssen daher, damit die Summe Null gibt, auch entgegengesetzt gleich sein. Die Linie umkreist bei A den Wirbelfaden im entgegengesetzten Sinn wie bei B, also muß die gleichsinnig genommene Zirkulation an beiden Stellen gleich groß sein. Würde der Wirbelfaden irgendwo in der Flüssigkeit aufhören, so würde man die eine der beiden Schleifen über das Ende des Wirbelfadens abstreifen können, während man die andere in ihrer den Wirbelfaden umschlingenden Lage läßt. Die erstere hätte dann ihre Zirkulation eingebüßt, die letztere hätte sie behalten. Die ganze Linie hätte damit ihre Zirkulation verändert, obwohl sie nur in einer Potentialbewegung verschoben worden ist. Man sieht, daß dies unmöglich ist. Es gilt daher der Satz: Ein Wirbel-

Fig. 883.



[1]) H. v. Helmholtz, Crelles Journ. 55, 25, 1858 = Ostwalds Klassiker Nr. 79.

faden kann im Innern der Flüssigkeit nirgends endigen und hat überall dieselbe Zirkulation. Zu dieser rein geometrischen Aussage kommt die aus dem Thomsonschen Satz folgende dynamische Aussage hinzu, daß die Zirkulation um den Wirbelfaden zeitlich ungeändert bleibt.

Betrachtet man das Verhalten von sehr kleinen geschlossenen flüssigen Linien, deren Zirkulation, soweit sie im Potentialgebiet liegen, überall gleich Null ist, soweit sie sich aber im Innern des Wirbelfadens befinden, im allgemeinen von Null verschieden ist, so folgt aus dem Thomsonschen Satz, daß diese sich in der Zeit nicht ändert. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Wirbelfaden dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Da der Impuls und die Energie des eigentlichen Wirbelfadens klein sind gegen die entsprechenden Beträge der Potentialbewegung um ihn herum, bebewegt sich der Wirbelfaden in der Hauptsache so, wie die Bewegung um ihn herum es ihm vorschreibt (vgl. das untenstehende Beispiel a!). Allerdings kann man die Potentialbewegung geometrisch auf die Zirkulation um die Achse des Wirbelfadens zurückführen, was für Berechnungen meist bequem ist. Dann erscheint die Bewegung jedes Wirbelfadenelements als verursacht von sämtlichen übrigen Wirbelfadenelementen und die ganze Potentialbewegung als durch den Wirbelfaden erzeugt. Dies ist aber nur als geometrische Beziehung zu werten; energetisch ist die äußere Bewegung das überwiegend Bestimmende.

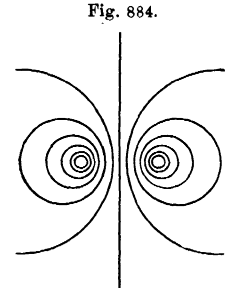
Die Formeln für die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus der geometrischen Anordnung der Wirbelfäden stimmen übrigens vollständig mit den elektrodynamischen Beziehungen im Biot-Savartschen Gesetz überein. Was dort der elektrische Leiter ist, ist hier der Wirbelfaden, der Stromstärke entspricht die Zirkulation und dem Magnetfeld des Stromes das Geschwindigkeitsfeld. Auch entspricht der Stromdichte die Drehungsintensität. Die Stromstärke ist wie die Zirkulation an allen Stellen des Leiters dieselbe, die Stromdichte ist dann umgekehrt proportional dem Leiterquerschnitt. Beim Wirbelfaden ist gemäß dem Kleingedruckten von § 8 (mit $\sin\alpha = 1$) $\Gamma = 2\,\omega\,F$; also gibt Verkleinerung von F ein Anwachsen von ω und umgekehrt. Dies gilt auch zeitlich: Wird ein Teil des Wirbelfadens gestreckt, so nimmt seine Winkelgeschwindigkeit ω umgekehrt proportional dem Querschnitt zu. Die Länge eines Abschnitts des Wirbelfadens wächst dabei auch umgekehrt proportional F, da ja das Volumen dasselbe bleibt. Also verändert sich die Winkelgeschwindigkeit genau proportional der Länge des Abschnitts.

Dies ist im wesentlichen der Inhalt der Helmholtzschen Sätze.

Beispiele: a) Gerade parallele Wirbelfäden in einer sonst drehungsfreien Flüssigkeit. Ein Wirbelfaden mit der Zirkulation (Wirbelstärke) Γ besitzt ein Geschwindigkeitsfeld um sich herum, wie es bei den Potentialbewegungen mit Zirkulation in § 10 bereits besprochen ist. Die Geschwindigkeit steht senkrecht auf der Wirbelachse und auf dem Radius (r), der von der Wirbelachse zu dem Ort des Teilchens hingezogen ist, und hat den Betrag $\Gamma/2\,\pi\,r$. Sind mehrere Wirbelfäden vorhanden, so addieren sich die einzelnen Geschwindigkeitsfelder und jeder Wirbelfaden nimmt selbst an der

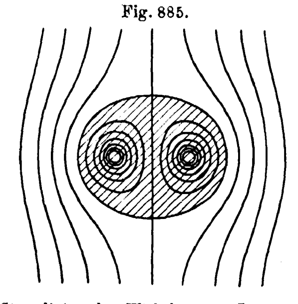
Bewegung teil, die die übrigen an seinem Ort erzeugen. Bei zwei parallelen Wirbelfäden ergibt sich so ein Kreisen der beiden Wirbelfäden um diejenige Achse, in die die resultierande Kraft fallen würde, wenn an den Orten der Wirbelachsen Kräfte proportional der jeweiligen Wirbelstärke angebracht würden; gleichgerichtete Kräfte sind zu nehmen, wenn die Wirbel gleichsinnig drehen, und umgekehrt gerichtete, wenn die beiden Wirbel entgegengesetzt drehen. In dem einen Falle liegt die Achse zwischen den Wirbelfäden, im anderen außerhalb. Für zwei entgegengesetzt umlaufende gleich starke Wirbel („Wirbelpaar“, entsprechend dem Kräftepaar) ergibt sich ein geradliniges Fortwandern senkrecht zur Verbindungslinie mit der Geschwindigkeit $\Gamma/2\pi d$, wenn d den Abstand der beiden Wirbelachsen bedeutet. Von einem relativ zur ungestörten Flüssigkeit ruhenden Bezugssystem aus ergeben die Stromlinien eines Wirbelpaares ein Bild entsprechend Fig. 884, von einem mit den Wirbelachsen mitbewegten Bezugssystem dagegen das nach Fig. 885.

Fig. 884.



Stromlinien des Wirbelpaares; ruhendes Bezugssystem.

Fig. 885.



Stromlinien des Wirbelpaares; Bezugssystem mit den Wirbelkernen mitbewegt.

Das in dieser Figur schraffierte Gebiet verbleibt dauernd in der Umgebung der Wirbelfäden. Werden diese in einem Gebiet gefärbter Flüssigkeit erzeugt (vgl. unter d), so wandert ein Körper aus gefärbter Flüssigkeit, entsprechend dem schraffierten Gebiet in Fig. 885, in die ungefärbte Flüssigkeit hinein.

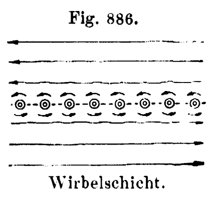
Anmerkung: Damit die vorstehenden Beziehungen zutreffen, müssen die parallelen Wirbelfäden theoretisch nach beiden Seiten ins Unendliche reichen, oder sie müssen in einer von zwei parallelen Wänden senkrecht zu den Wirbelachsen begrenzten Flüssigkeit von einer Wand bis zur anderen reichen. Doch stören im letzteren Falle Reibungseinflüsse an den Wänden. Statt der Wände kann auch ein Boden und eine freie Oberfläche vorhanden sein.

b) Bei kreisförmigen „Wirbelringen“ kommt durch die Krümmung des Wirbelfadens eine zusätzliche Geschwindigkeit des Fortschreitens zustande, die um so größer ist, je konzentrierter der mit Drehung behaftete Wirbelkern ist. (Diese Erscheinung kommt als Wirkung der benachbarten Wirbelelemente richtig aus den Helmholtzschen Gesetzen heraus, man kann sie aber auch dynamisch als Wirkung der Zugspannungen verstehen, die durch Zentrifugalkräfte der umlaufenden Flüssigkeit in dem Wirbelring geweckt werden und die den Wirbelring zu verkleinern trachten, vgl. die Ausführungen zum Kutta-Joukowskischen Satz in § 10.) Wegen der

schnelleren Fortschreitungsgeschwindigkeit ist der mit dem Wirbelring mitgeführte Flüssigkeitskörper im Gegensatz zu Fig. 885 meist ringförmig (Rauchringe!). Zwei Wirbelringe mit gemeinsamer Achse, die sich im gleichen Sinne bewegen, wirken so aufeinander ein, daß der vordere sich erweitert, der hintere aber sich zusammenzieht; dadurch nimmt die Fortschreitungsgeschwindigkeit des vorderen ab, die des hinteren zu; der hintere schlüpft schließlich durch den vorderen hindurch, und es beginnt das Spiel mit vertauschten Rollen von neuem. Zwei auf derselben Achse gegeneinander bewegte gleiche Wirbelringe vergrößern bei ihrer Annäherung ihre Durchmesser mit fortwährend wachsender Geschwindigkeit, und verlangsamen dabei ihre Bewegung so, daß sie nicht miteinander in Berührung kommen. Da sich die mittlere Ebene zwischen den beiden Wirbelringen hierbei wie eine feste Wand verhält, so gilt das gleiche von einem gegen eine Wand prallenden Wirbelring.

c) Die in § 6 besprochenen Trennungsflächen lassen sich auch als flächenhafte Scharen von Wirbelfäden auffassen, wobei die Achsen der Wirbelfäden senkrecht auf der Richtung des Vektors des Geschwindigkeitssprunges stehen. Daß in der Tat eine Reihe von parallelen Wirbelfäden eine Strömung ergibt, die in einigem Abstand von den Wirbelfäden der Strömung mit einer Trennungsfläche entspricht, zeigt die schematische Fig. 886. Umgekehrt sind Trennungsflächen labil und zerfallen leicht in einzelne Wirbel, vgl. Fig. 856.

Fig. 886.



Wirbelschicht.

d) Die Erzeugung von Wirbeln mitsamt den zugehörigen zirkulatorischen Potentialbewegungen erfolgt regelmäßig auf dem Wege über Trennungsflächen. Alle Potentialbewegungen sind das Ergebnis von Druckwirkungen auf die Flüssigkeit, die von irgendwelchen Wand- bzw. Oberflächenteilen oder von Körpern im Innern der Flüssigkeit ausgeübt werden. Zirkulatorische Bewegungen kommen vor allem dann vor, wenn eine Teilfläche im Innern der Flüssigkeit eine Zeitlang einen Druck erfahren hat, und der angrenzende Teil nicht. Die Erzeugung eines Wirbelringes nach Fig. 860, bei der die Wand außerhalb des Loches einem von links her wirkenden Druck Widerstand leistet, der Innenraum des Loches aber nicht, ist ein Beispiel davon. Ein anderes wichtiges Beispiel liefert die Bewegung eines Flugzeugtragflügels, bei der der von dem Flügel überstrichene Flächenstreifen zeitweilig durch das Gewicht des Flugzeugs belastet worden ist, das Gebiet außerhalb dieses Streifens aber keinen Druck erfahren hat. Wie bereits im Anschluß an Fig. 861 am Schlusse von § 6 angegeben, bilden sich aus der Trennungsfläche hinter dem Tragflügel zwei von den Flügelspitzen ausgehende Wirbel. An der Stelle, wo die Bewegung begonnen hat, wurde ein Wirbel gemäß Fig. 880 erzeugt. › Dieser „Anfahrwirbel“ und die seitlichen Wirbel bilden zusammen einen einzigen (meist etwas diffusen) Wirbelfaden. Der Tragflügel selbst mit seiner Zirkulation, die mit derjenigen um den Wirbelfaden genau übereinstimmt, schließt das ganze Gebilde zu einer Art von Wirbelring, von dem allerdings

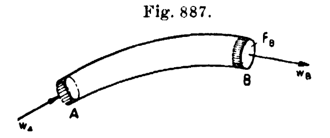
ein Teilstück durch einen festen Körper gebildet wird. Man darf die Sache vom kinematischen Standpunkt aus so auffassen, daß ein Teilstück des Wirbelfadens im Innern des festen Körpers verläuft, nach außen hier nur eine Potentialströmung mit Zirkulation erzeugend; vom dynamischen Standpunkt ist allerdings festzustellen, daß für dieses Teilstück des Wirbelfadens wegen seiner Eigenbewegung mit dem Körper der dynamische Helmholtzsche Satz nicht gilt, und daß insbesondere von seinen Enden her den seitlichen Wirbelfäden immer neue Flüssigkeitsteile zugeführt werden. Das quantitative Studium dieser Wirbelbewegungen hat wichtige Aufschlüsse über das Verhalten der Tragflügel geliefert, vgl. besonders Kap. XII, § 15 und 16.

§ 12. Impulssätze für stationäre Bewegungen. Die Impulssätze der allgemeinen Mechanik, die unter dem Namen Schwerpunkts- und Flächensätze sehr bekannt sind, finden eine eigenartige Anwendung auf die stationären Bewegungen der Flüssigkeiten, wie auch auf Bewegungen nicht stationärer Art, deren zeitliche Mittelwerte als stationäre Bewegungen angesehen werden können. Der Wert der Impulssätze besteht darin, daß sie nur Aussagen über Zustände an den Grenzflächen eines Gebietes enthalten, und man deshalb aus ihnen auch Schlüsse auf Vorgänge ziehen kann, deren Einzelheiten man nicht vollständig beherrscht.

Unter Impuls oder Bewegungsgröße einer Masse versteht man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit (der Impuls ist ein Vektor und hat daher genau wie die Geschwindigkeit drei Komponenten). Es ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der an der Masse angreifenden resultierenden Kraft. In der Mechanik wird nun gezeigt, daß bei der Summierung über alle Massen eines mechanischen Systems alle inneren Kräfte des Systems sich nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion fortheben und nur die äußeren (von nicht zum System gerechneten Massen herrührenden) Kräfte übrigbleiben.

Die Änderung der Bewegungsgröße einer irgendwie abgegrenzten stationär bewegten Flüssigkeitsmasse besteht nun allein darin, daß die Grenzen der Flüssigkeitsmasse sich durch die Bewegung verschieben: im Innern ist jedes Flüssigkeitsteilchen an seinem Orte durch ein anderes ersetzt, das seine Geschwindigkeit angenommen hat. Was an den Grenzen vor sich geht, mag an einem Stromfaden gezeigt werden. Es gehört zum Wesen unseres Satzes, daß jede Teilmasse, die zum System gehört, auch bei ihm verbleibt und auch andere Teilmassen nicht neu hinzukommen. Die zur Anwendung des Satzes gezogenen Grenzflächen verschieben sich daher mit der Strömung, sie sind „flüssige Flächen". Bei unserem Stromfaden verschwindet daher in der Zeit dt bei A in Fig. 887 die Masse $dm_1 = \varrho F_A w_A dt$. Bei B tritt die Masse $dm_2 = \varrho F_B w_B dt$ neu hinzu. Wegen der Kontinuität ist $dm_1 = dm_2 = dm$. Zur gesamten Impulsänderung liefert der Stromfaden bei

Fig. 887.

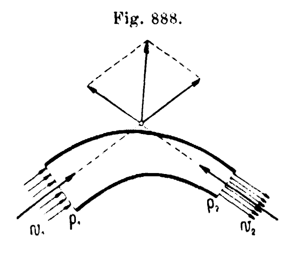


B in der Zeit dt den positiven Beitrag $dm \cdot w_B$, in der Zeiteinheit also $\frac{dm}{dt}\, w_B = \varrho\, F_B w_B{}^2$ (in der Richtung von w_B), bei A ähnlich den negativen Beitrag $-\frac{dm}{dt}\, w_A = -\varrho\, F_A\, w_A{}^2$ (in der Richtung entgegengesetzt zu w_A). Diese auf die Zeiteinheit berechneten Impulsänderungen können unmittelbar als Kräfte angesprochen werden, die durch die Flächen F_A und F_B hindurch von außen auf die betrachtete Flüssigkeitsmasse ausgeübt werden. Will man nicht die Kräfte haben, die von außen auf die Flüssigkeitsmasse ausgeübt werden, sondern die Gegenwirkung der Flüssigkeit auf die Gefäßwände, ihre „Reaktion", so braucht man nur in den obigen Beziehungen die Vorzeichen umzukehren. Es entspricht also der Flüssigkeitsströmung in Fig. 887 bei A eine Reaktion von der oben genannten Größe in der Richtung der eintretenden Strömung, bei B eine Reaktion entgegengesetzt der Richtung der austretenden Strömung.

Mit dieser Formulierung ist der Übergang von der flüssigen Begrenzungsfläche der betrachteten Flüssigkeitsmasse zu einer ortsfesten Fläche vollzogen, durch die hindurch die Impulsänderungen (bzw. ihre Reaktionen) und die Drücke übertragen werden. Um die Impulssätze richtig anzuwenden, muß die fragliche Flüssigkeitsmasse zweckmäßig mit einer geschlossenen Fläche, der „Kontrollfläche", umgeben werden (diese ist in einigen der folgenden Figuren durch .... kenntlich gemacht), und es müssen für alle ein- und austretenden Stromfäden die vorstehenden Reaktionen gebildet werden. Die Reaktionskräfte müssen dann nach den Regeln der Statik mit sämtlichen an der Flüssigkeit angreifenden äußeren Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden, d. h. es muß sowohl die Kräftesumme wie auch die Momentsumme der Kräfte für alle Koordinatenachsen gleich Null sein. Sehr häufig ist es übrigens nur eine Komponentengleichung, die bei den speziellen Aufgaben interessiert.

Anmerkung: Im Falle nicht stationärer Bewegungen kommt noch ein weiterer Beitrag hinzu, der von der Impulsänderung im Innern der Flüssigkeit herrührt. Wenn, wie häufig bei turbulenten Bewegungen, die nicht stationäre Bewegung einen gleichbleibenden Mittelwert der Bewegungsgröße besitzt, so heben sich die Beiträge des Flüssigkeitsinnern im Mittel weg und es lassen sich deshalb die Impulssätze wie bei stationären Bewegungen anwenden, nur muß bei der Bildung der Mittelwerte in der Kontrollfläche mit Vorsicht vorgegangen werden, vgl. § 14.

Fig. 888.

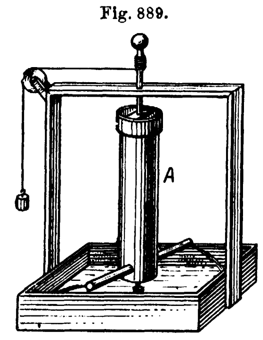


Beispiele: a) Reaktion einer durch einen gekrümmten Kanal strömenden Flüssigkeit. Die Flüssigkeit ströme (vgl. Fig. 888) mit einer Geschwindigkeit w_1 und einem Drucke p_1 ein, dann ist nach dem oben Auseinandergesetzten der Impulstransport durch die Fläche $F_1 = \varrho\, F_1\, w_1^2$; er ist gleichbedeutend mit einer von der einströmenden Flüssigkeit in ihrer Richtung ausgeübten Kraft. Dazu kommt noch eine Druckkraft in der gleichen Richtung gleich $p_1\, F_1$. Eine entsprechende Kraft $F_2(\varrho\, w_2^2 + p_2)$ findet man am Ausströmungsende des Kanals, hier entgegen-

gesetzt der Geschwindigkeit (also immer nach dem Innern der Kontrollfläche gerichtet!). Durch die Resultante der beiden Kräfte ist die in Wirklichkeit durch Druckkräfte an der Wand erzeugte Kraftwirkung des Flüssigkeitsstromes auf den Kanal gefunden.

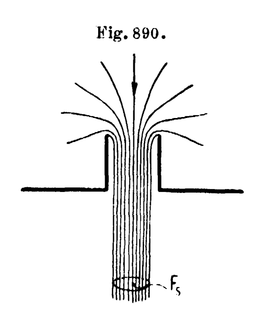
b) Reaktion ausfließender Strahlen. Ein Strahl, der durch eine Öffnung aus einem Raume mit dem Drucke p_1 in einen Raum mit dem Drucke p_2 ausströmt, führt mit sich einen sekundlichen Impuls von der Größe $J = \varrho F_s w^2$, wo F_s der Strahlquerschnitt ist; mit $w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}}$ (vgl. § 4, b) wird $J = 2 F_s (p_1 - p_2)$, also gleich dem Zweifachen der Kraft, die von dem Druckunterschied $p_1 - p_2$ auf einen Kolben von der Größe des Strahlquerschnitts ausgeübt würde. Da dieser Impuls ein Äquivalent in der Druckverteilung haben

Fig. 889.



Segnersches Wasserrad.

Fig. 890.



Borda-Mündung.

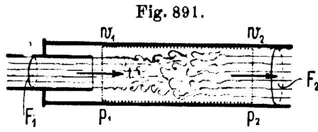
muß, folgt hieraus, daß durch den Wegfall des Überdrucks auf die Öffnung und die Druckabsenkung in deren Umgebung infolge der Zuströmung zur Öffnung zusammen ein Ausfall an Wandungsdruck gegenüber dem geschlossenen Gefäß entsprechend dem zweifachen Strahlquerschnitt entsteht. Dieser Druckausfall macht sich als Rückdruck, als „Reaktion des ausfließenden Strahles" bemerkbar. Diese Reaktion läßt sich unschwer nachweisen, wenn man ein Gefäß mit seitlicher Öffnung auf einen leicht beweglichen Wagen stellt. Das Gefäß setzt sich dann in der dem ausfließenden Strahl entgegengesetzten Richtung in Bewegung. Ein verwandter Versuch ist der mit dem „Segnerschen Wasserrad" (Fig. 889), der nach dem Vorstehenden keiner besonderen Erklärung mehr bedarf. Mit Hilfe des ausfließenden Wassers kann hier ein Gewicht gehoben werden, wie in der Figur, oder es kann eine andere Arbeit verrichtet werden. Solche Segnerschen Wasserräder sind früher auch im großen gebaut worden.

In einem besonderen Falle, nämlich dem der „Bordaschen Mündung" (vgl. Fig. 890), läßt sich aus der Größe des Impulses die sogenannte Kontraktionsziffer, das ist das Verhältnis des Strahlquerschnitts zum Lochquerschnitt bestimmen. Da nämlich hier auf allen Wandflächen, deren Druck-

kräfte Komponenten in der Strahlrichtung besitzen, der volle Überdruck herrscht, muß der Wegfall des Überdrucks im Mündungsquerschnitt F dem Strahlimpuls gleich sein, also $F(p_1 - p_2) = 2F_s(p_1 - p_2)$ oder $F_s : F = {}^1/_2$.

c) Plötzliche Erweiterung. Tritt ein Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit w_1 aus einem zylindrischen Rohrstück in ein weiteres, ebenfalls zylindrisches Rohr ein, so wird der Strahl sich, weil er labil ist (vgl. § 6), mit der umgebenden Flüssigkeit vermischen und nach der Vermischung ungefähr gleichförmig mit einer mittleren Geschwindigkeit w_2 abströmen. Der Impulssatz erlaubt hier die mit der Vermischung verbundene Drucksteigerung $p_2 - p_1$ zu berechnen, ohne daß die Einzelheiten des Vermischungsvorganges bekannt wären. Es ist für die in Fig. 891 gezeichnete Kontrollfläche, von der nur die beiden Stirnflächen Beiträge zu den Kräften liefern,

Fig. 891.



Plötzliche Erweiterung.

$$\frac{dm}{dt}(w_1 - w_2) = F_2(p_2 - p_1)$$

oder mit $\frac{dm}{dt} = \varrho F_2 w_2$:

$$p_2 - p_1 = \varrho w_2(w_1 - w_2).$$

Bei einer allmählich erweiterten Röhre wäre nach der Druckgleichung $p_2' - p_1 = {}^1/_2 \varrho (w_1^2 - w_2^2)$; durch die plötzliche Erweiterung ist demnach ein Druckverlust $p_2' - p_2$ entstanden, der, wie leicht nachzuprüfen, die Größe ${}^1/_2 \varrho (w_1 - w_2)^2$ hat. Da diese Formel mit der für den Verlust an kinetischer Energie beim unelastischen Stoß fester Körper übereinstimmt, hat man vielfach von einem „Stoßverlust" bei der plötzlichen Erweiterung gesprochen, obwohl hier keineswegs ein Stoßvorgang vorliegt. Das mit dem Stoßvorgang Gemeinsame liegt lediglich darin, daß hier wie dort eine Vermischung der Geschwindigkeiten eintritt.

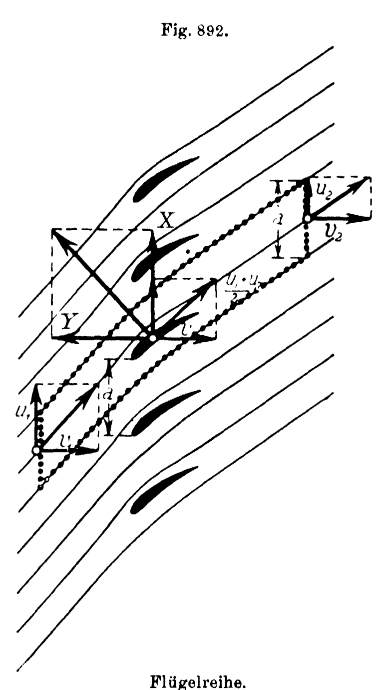
d) Schwebenderhalten von schweren Körpern in Luft. Um in ruhender Luft eine Last schwebend zu erhalten, ist es nötig, fortwährend immer neue Luftmassen nach abwärts zu beschleunigen. Ist w die erteilte Endgeschwindigkeit, die der Einfachheit halber als gleichförmig angesehen werden mag, und $\frac{dm}{dt} = M$ die in der Zeiteinheit in Bewegung gesetzte Masse, so ist, wenn nennenswerte Druckunterschiede in den nach abwärts bewegten Massen nicht verbleiben, die erzielte Kraft gleich dem Impuls: $P = Mw$. Diese Betrachtung trifft z. B. auf eine frei schwebende Hubschraube mit großer Annäherung zu, wenn die Hubschraube genügend weit vom Boden entfernt ist. Dann bildet sich ein senkrecht nach unten gerichteter Luftstrahl aus, der den Impuls Mw enthält. Der Luftstrahl wird sich bei hinreichend großem Wege mit ruhender Luft aus der Umgebung vermischen und dadurch verlangsamen. Der Impuls bleibt dabei aber ungeändert, da die bewegte Masse entsprechend vergrößert ist. Der Strahl überträgt schließlich

durch Aufprallen auf den Erdboden, wobei er seinen Impuls verliert, das Gewicht der Hubschraube als Druckkraft auf den Boden.

Beim Flugzeug werden die abwärts bewegten Massen durch das in der Luft zurückbleibende Wirbelsystem (vgl. § 11) gebildet. Doch spielt hier auch ein Druckfeld eine Rolle, und die Verhältnisse liegen daher verwickelter. Es kommt hier auf die Gestalt der Kontrollfläche an, ob man das Äquivalent des Auftriebs als Impuls oder als Druck bekommt. Auch hier ergibt sich am Erdboden unter dem Flugzeug eine Druckvermehrung, durch die das Gewicht des Flugzeugs auf den Erdboden übertragen wird.

§ 13. Weitere Beispiele zu den Impulssätzen. a) Schaufelgitter. Satz von Kutta und Joukowski. Um die Wechselwirkung zwischen den Schaufeln einer Turbine oder den Flügeln eines Propellers usw. mit der an ihnen vorbeiströmenden Flüssigkeit zu studieren, pflegt man zunächst den einfacheren Fall des aus lauter gleich großen, parallel zueinander eingestellten unendlich langen Schaufeln bestehenden „Schaufelgitters" zu betrachten. Hier liefern die Impulssätze für die zur Gitterebene parallelen und für die dazu senkrechten Kraftkomponenten zusammen mit der Bernoullischen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung sehr wertvolle Aufschlüsse über die Schaufelkräfte im Zusammenhang mit den Strömungsgeschwindigkeiten. Fig. 892 stellt ein solches Schaufelgitter mit der Strömung dar, wie sie einem relativ zu den Schaufeln ruhenden Beobachter erscheinen. Das abgebildete Schaufelgitter entspricht einem Propeller; das einer Turbine zeigt umgekehrte Wölbung der Schaufeln, und die Kraftkomponenten haben die umgekehrte Richtung; die folgende Rechnung gilt aber für beide Verwendungsarten. Die Geschwindigkeitskomponente parallel und senkrecht zu dem Schaufelgitter heiße u und v, die entsprechenden Kräfte auf die Längeneinheit einer Schaufel X und Y (positiv in den in Fig. 892 angegebenen Richtungen). Der Index 1 bezieht sich auf den Eintritt, der Index 2 auf den Austritt.

Fig. 892.



Flügelreihe.

Der Impulssatz macht von dem Umstand Gebrauch, daß — Potentialbewegung vorausgesetzt — in einigem Abstand vor und hinter dem Schaufel-

gitter die Geschwindigkeit je praktisch konstant ist. Was zwischen den Schaufeln passiert, braucht dabei nicht näher bekannt zu sein, wenn nur sicher ist, daß sich dort keine groben Wirbel ausbilden (was bei unzweckmäßiger Form der Schaufeln vorkommen kann). Zunächst liefert, mit a = Schaufelabstand, die Kontinuität

$$Q = v_1 a = v_2 a$$

(Q = sekundliche Flüssigkeitsmenge zwischen je zwei Schaufeln in einer Schicht von der Dicke 1 parallel zur Schaufelachse). Es ist also $v_1 = v_2$! Wir schreiben daher von jetzt ab für beide Werte einfach v. Die Bernoullische Gleichung gibt, mit w^2 (result. Geschw.) $= u^2 + v^2$:

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 + v^2) = p_2 + \frac{\varrho}{2}(u_2^2 + v^2)$$

oder

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \quad \dots \dots \dots \dots (1)$$

Für den Impulssatz bilden wir eine Kontrollfläche, deren Grundriß aus zwei gleichgelegenen Stromlinien, die um eine Schaufelteilung auseinander liegen, und aus zwei Geraden von der Länge a parallel der Gitterebene besteht (punktierte Linie in Fig. 892). Die Höhe sämtlicher Flächen sei = 1. Durch die beiden Stromlinienflächen strömt nichts hindurch, und wegen ihrer übereinstimmenden Eigenschaften herrscht auf ihnen auch die gleiche Druckverteilung; sie tragen daher weder zum Impuls, noch zu der Resultierenden aus den Druckkräften etwas bei. Es sind also nur die Beiträge der Flächen parallel der Gitterebene zu berechnen. Die sekundlich durchströmende Masse ist $= \varrho Q = \varrho a v$, man erhält also

$$X = 0 + \varrho a v (u_1 - u_2) \quad \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$Y = a(p_2 - p_1) + 0 \quad \dots \dots \dots \dots (3)$$

Es ist nützlich, in diese Formeln die Zirkulation um eine Schaufel einzuführen. Wir benutzen für ihre Berechnung wieder die punktierte Linie und stellen zunächst fest, daß die beiden Stromlinien in entgegengesetzter Richtung durchfahren werden und daher entgegengesetzt gleiche Beiträge liefern. Die beiden geraden Stücke liefern aber $a u_1$ und $-a u_2$, also wird

$$\Gamma = a(u_1 - u_2) \quad \dots \dots \dots \dots (4)$$

Wenn man Gl. (1) berücksichtigt und beachtet, daß

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2)$$

ist, so ergibt sich also aus (2) und (3):

$$X = \varrho \Gamma v \quad \dots \dots \dots \dots (5)$$

$$Y = \varrho \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2} \quad \dots \dots \dots \dots (6)$$

Die Proportion $Y : X = \frac{u_1 + u_2}{2} : v$ besagt, wie durch Betrachtung der entsprechenden ähnlichen Dreiecke in Fig. 892 leicht ersichtlich ist, daß die

Resultierende aus X und Y senkrecht steht zu der aus $\frac{u_1 + u_2}{2}$ und v gebildeten resultierenden Geschwindigkeit. Nennt man die resultierende Kraft R und die resultierende Mittelgeschwindigkeit w_m, so wird außerdem

$$R = \varrho \Gamma w_m \quad \text{(7)}$$

wie aus (5) oder (6) mittels ähnlicher Dreiecke leicht folgt.

Von Gl. (7) soll nun noch ein besonderer Gebrauch gemacht werden. Läßt man den Abstand a zwischen je zwei benachbarten Schaufeln immer mehr wachsen, während man $\Gamma = a(u_1 - u_2)$ konstant hält, so wird die Differenz $u_1 - u_2$ immer kleiner und kleiner. In der Grenze für $a = \infty$ wird sie Null, und die Geschwindigkeiten vor und hinter der einen Schaufel, die im Endlichen übrigbleibt, stimmen dann in genügender Entfernung von ihr überein, und für die resultierende Mittelgeschwindigkeit w_m läßt sich jetzt auch w_∞ setzen, was die ungestörte Geschwindigkeit im Unendlichen bedeutet. Durch einen Wechsel im Bezugssystem erhält man eine mit einer Geschwindigkeit vom Betrage w_∞ bewegte Schaufel in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit. Sei die Geschwindigkeit mit V bezeichnet, so ergibt sich nach Gl. (7) pro Längeneinheit eine Kraft von der Größe

$$R = \varrho \Gamma V$$

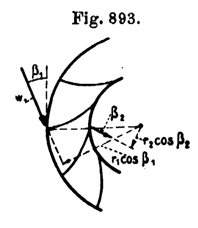
senkrecht zu V. Für ein Stück der Schaufel oder Tragfläche von der Länge l erhält man daher eine Kraft („Quertrieb" oder „Auftrieb", Bezeichnung A) vom Betrage

$$A = \varrho \Gamma V l \quad \text{(8)}$$

Dies ist der Satz von Kutta und Joukowski. Er läßt sich natürlich auch auf andere Art beweisen; Joukowski hat ihn z. B. dadurch abgeleitet, daß er den Impulssatz für eine Kontrollfläche anwendet, die aus einem Kreiszylinder mit sehr großem Radius um die Tragflächenachse als Zylinderachse besteht. Man bekommt hierbei die Hälfte von A als Impuls, die andere als Resultierende von Druckkräften. Dieser Satz ist vor allem dadurch wichtig, daß er die zu einem gegebenen Auftrieb gehörige Zirkulation, durch die die Wirbel hinter der Tragfläche bestimmt sind, kennen lehrt.

b) Impulsmomente; Eulerscher Turbinensatz. Entsprechend den Momenten von Kräften in der Statik kann man auch Momente von Impulsen bilden, und es gilt auch hier ein dem Schwerpunktssatz analoger Satz: „Die zeitliche Änderung des Impulsmoments ist gleich dem resultierenden Moment der Kräfte." Dieser Satz führt auch den Namen „allgemeiner Flächensatz", vgl. S. 695. Für stationäre Flüssigkeitsströmungen geht er wieder analog dem früheren über in den Satz vom Gleichgewicht der Momente der äußeren Kräfte und der „Reaktionen" der Flüssigkeit.

Fig. 893.



Als Beispiel mag die Ableitung der Eulerschen Turbinengleichung gegeben werden. Durch eine Turbine, Fig. 893, ströme eine sekundliche Wassermasse M. Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit sei w_1, ihr Winkel mit der

Bewegungsrichtung des Rades β_1, der Eintrittsradius r_1; das Wasser strömt durch das sich drehende Rad in einer durch die Schaufeln genähert vorgegebenen Richtung. Die relative Austrittsgeschwindigkeit im Radius r_2 setzt sich mit der dortigen Umfangsgeschwindigkeit des Rades zur absoluten Austrittsgeschwindigkeit w_2 mit der Richtung β_2 zusammen, dann ist, gleichviel, was im Innern des Rades vor sich geht, das Drehmoment, das vom Wasser auf die Turbine ausgeübt wird, gleich

$$M(w_1 r_1 \cos\beta_1 - w_2 r_2 \cos\beta_2).$$

Die günstigsten Arbeitsverhältnisse ergeben sich dann, wenn der Austritt in radialer Richtung erfolgt, also $\cos\beta_2 = 0$ ist (weil dann die verlorene kinetische Energie des austretenden Wassers am kleinsten ist. Die Arbeitsleistung für diesen günstigsten Fall erhält man als Produkt des Drehmoments mit der Winkelgeschwindigkeit ω des Rades, zu $L = M r_1 \omega w_1 \cos\beta_1$.

Anmerkung. Wendet man denselben Satz auf eine kreisende Flüssigkeitsbewegung an, in der sich kein Turbinenrad befindet, so ergibt sich offenbar

$$w_1 r_1 \cos\beta_1 = w_2 r_2 \cos\beta_2$$

oder, wenn sämtliche Winkel β klein genug sind, daß $\cos\beta = 1$ gesetzt werden darf, $wr = const$, ein Resultat, das auf einem anderen Wege schon in § 5, b erhalten worden ist.

§ 14. Impulssatz für Strömungen mit Geschwindigkeitsschwankungen. In vielen praktischen Anwendungen kommt es vor, daß in einem der Strömung angehörigen Gebiet die Geschwindigkeit beträchtlichen und meist unregelmäßigen Schwankungen unterworfen ist, dabei aber überall ein von dem gewählten Zeitintervall unabhängiger zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit angebbar ist. Die Mittelwerte an den verschiedenen Orten stellen dann in ihrer Gesamtheit wieder eine stationäre Bewegung dar; man spricht dabei von einer schwankenden („turbulenten"), aber „in Mittelwerten stationären" Bewegung. Der in § 12, c behandelte Vorgang ist ein Beispiel hierfür. Bezeichnet man die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten mit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und die augenblicklichen Abweichungen von den Mittelwerten mit u', v', w', so daß also die wirklichen Geschwindigkeiten: $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$ sind, so sind die Mittelwerte von u', v' und w' definitionsgemäß $= 0$; für Mittelwerte von Quadraten und Produkten von u', v', w' gilt das aber nicht.

Bei der Anwendung des Impulssatzes auf solche Bewegungen genügt es nun nicht, wenn der Impulssatz auf die stationäre Mittelbewegung angewandt wird, sondern es muß der Mittelwert aus den einzelnen, durch die feststehende Kontrollfläche hindurchgetragenen Impulsen (oder Reaktionen) gebildet werden. Dies soll hier für zwei Fälle ausgeführt werden:

1. X-Komponente des Impulses für ein Stück der Kontrollfläche, das auf der X-Achse senkrecht steht. In einem Zeitabschnitt dt tritt durch die Flächeneinheit die Masse $\varrho u\,dt$; sie führt mit sich die X-Komponente der Geschwindigkeit $= u$, also ist der Impuls für $dt = \varrho u^2 dt$. Die Summenwirkung über eine längere Zeit T ist, auf die Sekunde gerechnet, $= \frac{1}{T}\int_0^T \varrho u^2 dt$, oder

kürzer geschrieben, wobei Mittelbildung durch Überstreichen angedeutet wird, $= \varrho \overline{u^2}$. Nun ist $u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\,\bar{u}\,u' + u'^2$. Bei der Bildung des Mittels von u^2 ist zu beachten, daß $\bar{u}$ schon das Mittel von u darstellt und das Mittel von $u' = 0$ ist. Daher wird

$$\varrho \overline{u^2} = \varrho \bar{u}^2 + \varrho \overline{u'^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Es kommt also zu dem Impuls der stationären Mittelbewegung ($\varrho \bar{u}^2$) noch der aus dem Mittelwert des Quadrats der Schwankung resultierende Impuls hinzu (als Reaktion gerechnet mit der Richtung von außen nach innen, wie immer, also wie ein zusätzlicher Druck wirkend).

2. X-Komponente des Impulses für ein Stück der Kontrollfläche, das auf der Y-Achse senkrecht steht. Die in der Zeit dt durch die Flächeneinheit tretende Masse ist hier $\varrho v dt$; die X-Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist wieder u, so daß also der hindurchgetragene X-Impuls $= \varrho u v dt$ ist. Die Mittelwertbildung liefert hier den Impuls für die Sekunde $= \varrho \overline{u v}$. Mit $u = \bar{u} + u'$ und $v = \bar{v} + v'$ ist $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{\bar{u}v'} + \overline{u'\bar{v}} + \overline{u'v'}$ oder wegen Nullwerdens der Mittelglieder

$$\varrho \overline{uv} = \varrho \bar{u}\bar{v} + \varrho \overline{u'v'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Auch hier kommt also zu dem Impuls der stationären Mittelbewegung ($\varrho \bar{u}\bar{v}$) ein Beitrag durch die Schwankung hinzu. Der Mittelwert des Produkts von u' und v' braucht nämlich nicht zu verschwinden, da z. B. positive Werte von u' überwiegend mit positiven Werten von v' und negative von u' überwiegend mit negativen von v' zusammentreffen können, wodurch beidemal überwiegend positive Produkte entstehen. Bei entgegengesetztem Zusammentreffen (positive u' mit negativen v', und umgekehrt) überwiegen die negativen Produkte. Die Kraft, die als Reaktion von $\varrho \overline{u'v'}$ auf der Flächeneinheit auftritt, ist eine X-Kraft an einer Fläche $\perp Y$, also eine Schubspannung (vgl. Kap. VII, § 5).

3. Es ist noch zu untersuchen, ob die Flüssigkeitsmasse im Innern der Kontrollfläche Beiträge liefert. Man sieht aber leicht, daß die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeit an ein und demselben Orte, wenn diese sich im Mittel nicht ändern soll, eben starke positive wie negative Beiträge enthalten müssen, so daß im zeitlichen Mittelwert das Innere nichts beiträgt. Alles in allem zeigt sich also, daß bei im Mittelwert stationären Bewegungen aus den Geschwindigkeitsschwankungen Impulsbeträge resultieren, deren Mittelwerte Spannungen von ähnlicher Art darstellen, wie sie in stark zähen Flüssigkeiten (vgl. Kap. XII, § 1) auftreten. Anwendungen von diesen Überlegungen werden in dem Abschnitt über turbulente Strömungen (§ 4 von Kap. XII) gemacht werden.

§ 15. Strömung mit erheblichen Volumenänderungen. Druckfortpflanzung, Schallgeschwindigkeit. Im folgenden sollen über die Strömungen eines Gases oder Dampfes mit wesentlichen Volumenänderungen einige grundsätzliche Dinge mitgeteilt werden. Gemäß dem in der Vorbemerkung zu diesem Kapitel Gesagten kommen Strömungen mit erheblichen Volumenänderungen einerseits vor, wenn es sich um große Höhenerstreckung

handelt, andererseits, wenn die Geschwindigkeiten sehr groß sind. Eine Behandlung der Strömungen der ersteren Art, die in das Gebiet der dynamischen Meteorologie gehören, mag hier unterbleiben, da die diesbezüglichen Untersuchungen noch nicht sehr zahlreich und auch wenig charakteristisch sind. Es wird sich also hier lediglich um das Gebiet der großen Geschwindigkeiten handeln. Diesbezügliche Aufgaben treten einerseits bei maschinentechnischen Anwendungen, z. B. bei Dampfturbinen, andererseits auch bei der Bewegung von Geschossen auf, ferner auch bei Flugzeugpropellern, die ebenfalls sehr hohe Geschwindigkeiten aufweisen.

Für die besondere Art der Strömungen mit hohen Geschwindigkeiten spielt die Geschwindigkeit eine besondere Rolle, mit der sich irgendwelche Druckänderungen in einer Gasmasse fortpflanzen. Deshalb sei zunächst dieser Fortpflanzungsvorgang näher betrachtet.

Der Betrachtung der Druckfortpflanzung wird folgender einfache Fall zugrunde gelegt. In einer ruhenden Gasmasse, die in einem weiten Rohr eingeschlossen sein möge, werde durch geeignete Bewegung eines Stempels eine Drucksteigerung erzeugt, die sich in der in Fig. 894 angedeuteten Weise in die ruhende Gasmasse hinein fortpflanzen soll.

Es sei dabei angenommen, daß die Druckverteilung ohne Änderung ihrer Gestalt mit der konstanten Geschwindigkeit c nach rechts weiterrückt. Da das Gas hierbei zusammengedrückt wird, muß der Teil, über den der Druckanstieg bereits hinweggegangen ist, eine Geschwindigkeit w nach rechts hin besitzen. Für die Rechnung sei angenommen, daß die Drucksteigerung $p_1 - p_0$ klein gegen den Druck p_0 sei, dann wird auch die Dichteänderung $\varrho_1 - \varrho_0$ klein, ebenso wird auch w klein, wie sich aus dem Folgenden noch ergibt.

Fig. 894.

Druckwelle im Rohr.

Über die Vorgänge in dem Übergangsgebiet von der Breite b (vgl. Fig. 894) lassen sich nun zweierlei Aussagen machen:

1. betreffend die Kontinuität: Während das Gebiet b über eine Stelle hinüberrückt, steigt dort die Dichte vom Werte ϱ_0 auf ϱ_1. Die zugehörige Zeit ist $\tau = b/c$. Die in der Zeiteinheit[1]) erfolgende Massenzunahme im Übergangsgebiet ist danach gleich dem Volumen des Gebietes $F.b$ mal der Dichtigkeitszunahme in der Zeiteinheit $\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\tau}$, also $= F(\varrho_1 - \varrho_0).c$. Diese Massenzunahme wird bewirkt durch die von dem verdichteten Gebiet her in der Zeiteinheit zufließende Masse $\varrho_1 Fw$, es ergibt sich also

$$\varrho_1 w = (\varrho_1 - \varrho_0) c \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

2. der Satz: Masse mal Beschleunigung = resultierende Kraft gibt die folgende Aussage. Innerhalb des Übergangsgebiets nimmt die Geschwindigkeit in der Zeit τ von 0 bis w zu, die mittlere Beschleunigung ist also

---

[1]) Man wählt für diese Überlegung zweckmäßig eine Zeiteinheit, die klein gegen die Zeit τ ist. Da im Endergebnis die Zeit τ nicht mehr vorkommt, bedeutet dies keine Einschränkung der Ableitung.

$\frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b}$. Die jeweils zu beschleunigende Masse ist $\varrho_m F b$, wo ϱ_m die mittlere Dichte ist. Die resultierende Kraft ist $F(p_1 - p_0)$, also ergibt sich die dynamische Beziehung

$$\varrho_m w c = p_1 - p_0 \qquad (2)$$

In Gl. (1) dürfen wir links nachträglich ϱ_1 durch ϱ_m ersetzen, ohne einen größeren Fehler zu begehen, als er schon in den bisher gemachten Vernachlässigungen liegt. Dividiert man jetzt (2) durch (1), so wird nach Weghebung von $\varrho_m w$:

$$c^2 = \frac{p_1 - p_0}{\varrho_1 - \varrho_0}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt aber nur vom Kompressionsgesetz des Stoffes ab, wir schreiben für ihn den Differentialquotienten $\frac{dp}{d\varrho}$ und erhalten so

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho} \qquad (3)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Druckänderungen wird also unter der Annahme kleiner Druckänderungen unabhängig von der Größe der Druckänderung und von der Breite des Übergangsgebietes, und ist nur von dem Kompressionsgesetz des Stoffes abhängig. Deshalb können auch beliebige positive und negative kleine Druckänderungen aufeinanderfolgen, ohne sich gegenseitig zu stören. Da der Schall aus solchen Folgen positiver und negativer Druckänderungen besteht, die nach obigem mit der Geschwindigkeit c weiterlaufen, nennt man c die Schallgeschwindigkeit.

Für Gase gilt nach dem Adiabatengesetz (vgl. Kap. X, § 6) $p = const.\, \varrho^\varkappa$, also

$$\frac{dp}{d\varrho} = \varkappa \,.\, const.\, \varrho^{\varkappa - 1} = \varkappa \frac{p}{\varrho},$$

mit $\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha\vartheta}$ (hier ϱ_0 = Normaldichte beim Normaldruck p_0 und bei 0° C) wird daher

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0} (1 + \alpha\vartheta)} \qquad (4)$$

Die Schallgeschwindigkeit ist also bei ein und demselben Gase lediglich mit der Temperatur veränderlich. Für mittelfeuchte Luft ist $\sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0}} = 334$ m/sec in guter Übereinstimmung mit beobachteten Schallgeschwindigkeiten.

Der für uns wichtige Fall der Druckfortpflanzung in einer strömenden Flüssigkeit läßt sich dadurch auf den hier betrachteten Fall zurückführen, daß man ein mit der Flüssigkeit mitbewegtes Bezugssystem verwendet. Daraus folgt, daß die Druckfortpflanzung relativ zu der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit c erfolgt. Relativ zu einem Raum, in dem die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit w_1 strömt, erfolgt die Fortpflanzung stromabwärts mit der Geschwindigkeit $c + w_1$, stromaufwärts mit der Geschwindigkeit $c - w_1$.

Man sieht leicht, daß in dem Falle, daß w größer als c ist, stromaufwärts überhaupt keine Fortpflanzung von Druckänderungen stattfindet. Daher zeigen die Gase und Dämpfe bei Strömungsgeschwindigkeiten, die die Schallgeschwindigkeit übersteigen, ein von dem gewöhnlichen wesentlich verschiedenes Verhalten.

Anmerkung. Eine endliche Druckänderung läßt sich als eine Folge von vielen kleinen Druckänderungen auffassen. Nach Gl. (2) ist an den Orten höheren Druckes eine ungefähr dem Druckunterschied proportionale Geschwindigkeit in der Fortpflanzungsrichtung vorhanden (umgekehrt an Orten tieferen Druckes eine in der entgegengesetzten Richtung). Nach der vorangehenden Darlegung ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der auf eine Verdichtung folgenden weiteren Verdichtung $= c + w$, also größer; entsprechend die einer weiteren Verdünnung kleiner, so daß man also schließen muß, daß starke Verdichtungen mit mehr als Schallgeschwindigkeit fortgepflanzt werden, starke Verdünnungen mit weniger als Schallgeschwindigkeit. Die exakte Theorie dieser Erscheinungen von B. Riemann[1]) bestätigt diese Überlegung.

§ 16. Stationäre Strömungen bei erheblichen Volumenänderungen.

Hier gilt für einen Stromfaden die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung [Gl. (3 b) von § 3]. Bei Vernachlässigung der Schwere lautet diese, wenn wie in diesem ganzen Kapitel von Reibung abgesehen wird:

$$P + \frac{w^2}{2} = const = P_1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Druckfunktion $P = \int \frac{dp}{\varrho}$ ist dabei für die adiabatische Zustandsänderung zu nehmen, die allein hier in Betracht kommt. Mit $\varrho = \varrho_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$ wird durch Auswertung des Integrals

$$P = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist p_1 der Druck, bei dem $w = 0$ ist, also z. B. bei Ausflußvorgängen der Druck im Kessel, so wird

$$w = \sqrt{2(P_1 - P)} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Man sieht leicht, daß die Geschwindigkeit, die sich beim Expandieren des Gases bis in das äußerste Vakuum ergibt, endlich ist. Sie entspricht $p = 0$ in Gl. (3) und ist also

$$w_{max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Für Luft von gewöhnlicher Temperatur (rund 15° C) und Atmosphärendruck als Ausgangszustand gibt dies, wenn in kg und m gerechnet wird:

$$\sqrt{\frac{2 \,.\, 1{,}405}{0{,}405} \cdot \frac{10330}{0{,}125}} = 756 \text{ m/s.}$$

Die Kontinuität liefert für die stationäre Strömung einer zusammendrückbaren Flüssigkeit (vgl. S. 1045):

$$F \varrho w = const. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

---

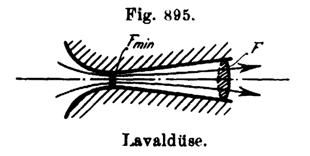
[1]) Vgl. z. B. B. Riemann und H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. 2, S. 507, 5. Aufl. Braunschweig 1912.

längs des Stromfadens. Der Verlauf des Stromfadenquerschnitts F mit dem Druck p läßt sich durch folgende Überlegung im Anschluß an Gl. (3) und (5) klarmachen: Wenn man mit $p = p_1$ beginnt, so ist zunächst $w = 0$ und daher $F = \infty$. Wenn p nun abnimmt, so wächst w allmählich an, ohne daß ϱ sich vorerst viel ändert, also muß F abnehmen. Ist jedoch p bereits sehr klein geworden, so nähert sich w dem Betrage w_{max}, ändert sich also nicht mehr viel, ϱ nimmt aber mit unbegrenzt abnehmendem p ebenfalls unbegrenzt ab, also muß F in diesem Gebiet zunehmen und gegen ∞ streben.

Zwischen dem Gebiet, wo F abnahm, und dem, wo es zunimmt, muß offenbar ein Minimum von F liegen; es liegt da, wo die verhältnismäßige Zunahme der Geschwindigkeit $\frac{dw}{w}$ geradeso groß ist wie die verhältnismäßige Abnahme der Dichte $-\frac{d\varrho}{\varrho}$. Die Nachrechnung zeigt nun, daß dieses Minimum gerade da liegt, wo die Strömungsgeschwindigkeit gleich der zu diesem Zustand gehörigen Schallgeschwindigkeit ist. Wegen der erfolgten adiabatischen Abkühlung ist diese Schallgeschwindigkeit nicht die des Anfangszustandes, sondern entsprechend der niedrigeren Temperatur kleiner (bei Luft von gewöhnlicher Temperatur im Ausgangszustand rund 300 m/sec). Die eben erwähnte Beziehung läßt sich auch ohne alle Rechnung aus der Betrachtung des vorigen Paragraphen erschließen. Betrachtet man nämlich den in Fig. 894 dargestellten Vorgang von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts hin fortbewegt, so erscheint das Gas dort, wo es in Ruhe ist, als mit der Geschwindigkeit c von rechts nach links strömend, und die Druckwelle bleibt an ihrem Orte stehen. Von diesem Bezugssystem aus hat man also eine stationäre Strömung von der Besonderheit, daß ein Druckunterschied in einer Strömung ohne Querschnittsänderung des Stromfadens besteht. Das ist aber auch gerade die kennzeichnende Eigenschaft der Stelle in unserem Stromfaden, wo der Querschnitt ein Minimum hat, also dort weder zunimmt noch abnimmt.

Nach Überschreitung des Minimums ist die Geschwindigkeit somit größer als die Schallgeschwindigkeit. In einer solchen Strömung nimmt nach obigem bei Druckabnahme, also Geschwindigkeitszunahme, der Querschnitt zu (statt abzunehmen, wie es bei volumenbeständigen Flüssigkeiten der Fall wäre); bei Druckzunahme (Geschwindigkeitsabnahme) nimmt er ab. Hieraus resultiert ein stark von dem Gewohnten verschiedenes Verhalten solcher Strömungen. Ein regelmäßiges Anwachsen der Geschwindigkeit bis zu dem aus der Druckgleichung sich ergebenden Endwert ist, wenn dieser Endwert größer ist als die Schallgeschwindigkeit, nur dann möglich, wenn die Röhre, in der die Strömung erfolgt, sich zuerst verengt und hinterher sich um einen genau bestimmten Betrag wieder erweitert (De Lavalsche Dampfdüse, vgl. Fig. 895). Ist die Erweiterung stärker oder schwächer, so stellt sich in der Mündung

Fig. 895.

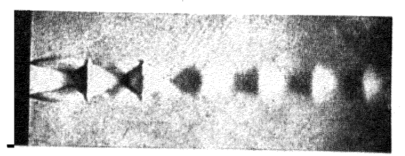


Lavaldüse.

ein anderer Druck als der außerhalb der Mündung vorhandene ein, nämlich jener, der zu der Erweiterung gehört. Dieser geht dann außerhalb der Düse in charakteristischen Schwingungen in den Außendruck über.

Bei einer einfachen Öffnung ohne Erweiterung kann sich, sobald der Gegendruck klein genug ist, um Überschallgeschwindigkeit zu erzeugen, in

Fig. 896.



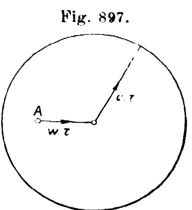
Wellen mit ausfließender Druckluft.

der Öffnung selbst nur noch derjenige Druck einstellen, der einer Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit entspricht (bei Luft und anderen zweiatomigen Gasen rund 0,53 des Druckes des ruhenden Gases). Die Ausflußmenge ist dann von dem Gegendruck ganz unabhängig. Außerhalb der Mündung erweitert sich der Querschnitt des Gasstrahles, und zwar durch Trägheitswirkung so stark, daß in seinem Innern Unterdruck entsteht. Infolge des Unterdruckes wird die Strömung dann wieder konvergent und verdichtet sich wieder ungefähr auf den Mündungsdruck, worauf das Spiel von neuem beginnt. Fig. 896[1]) zeigt eine Aufnahme eines solchen Luftstrahles von E. Mach[2]) mit der Töplerschen Schlierenmethode.

Die quantitative Berechnung der Gas- und Dampfströmung durch Öffnungen und Düsen ist ausführlich in Band III, 1 behandelt, so daß hier darauf verwiesen werden kann (Kap. XXII, S. 961 bis 979).

Eine andere Erscheinungsgruppe muß hier noch erwähnt werden: Eine momentane punktförmige Störung an einer Stelle A (Fig. 897) breitet sich in einer gleichförmigen Gasströmung in Form einer Kugelwelle aus, deren Mittelpunkt mit der Strömungsgeschwindigkeit weiterwandert. Eine andauernde Störung im Punkte A, wie sie etwa durch ein dort befindliches kleines Hindernis dargestellt würde, kann als Aufeinanderfolge von momentanen Störungen aufgefaßt werden. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit w kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit c, ergibt sich eine Ausbreitung der Wirkung des

Fig. 897.



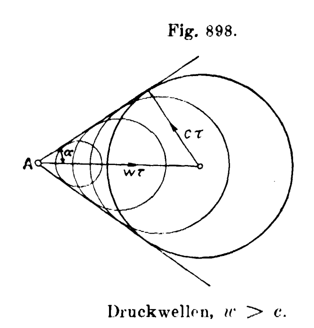
Druckwelle, $w < c$.

[1]) Die Fig. 896 bis 898 und 900 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Gustav Fischer (Jena) den Abhandlungen des Verfassers: „Über Gasbewegung" im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. IV, entnommen.

[2]) E. Mach, Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa **98**, 1303, 1889 und **106**, 1025, 1897; vgl auch R. Emden, Ann. d. Phys. u. Chem. (3) **69**, 264 u. 426, 1899 und L. Prandtl, Physik. Zeitschr. **8**, 23, 1907.

Hindernisses nach allen Richtungen hin, wennschon in verschiedenen Richtungen mit verschiedener Stärke. Ist aber die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit, so erfüllen alle Kugelwellen nur einen Kegel hinter dem Punkte A (vgl. Fig. 898). Der Raum vor dem Kegel bleibt völlig frei von jeder Einwirkung des Hindernisses. Für die Bewegung eines Körpers (z. B. eines Geschosses) durch eine ruhende Gasmasse gelten ganz entsprechende Beziehungen. Im Falle, daß die Geschoßgeschwindigkeit größer ist als die Schallgeschwindigkeit, erstreckt sich die Wirkung nur auf einen Kegel entsprechend Fig. 898 [E. Mach] [1]).

Fig. 898.



Druckwellen, $w > c$.

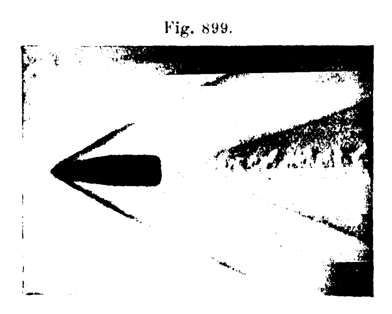
Der Winkel an der Kegelspitze ergibt sich folgendermaßen: Im Verlauf einer kleinen Zeit τ ist eine punktförmige Störung zu einer Kugel vom Radius $c.\tau$ angewachsen, deren Mittelpunkt hat sich um $w.\tau$ entfernt; der Kegel berührt die Kugel, also ist

$$\sin\alpha = \frac{c.\tau}{w.\tau} = \frac{c}{w} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Man nennt α den Machschen Winkel.

Die Schlierenbilder, die man von mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Geschossen erhält [vgl. Fig. 899, die von C. Cranz stammt] [2]), lassen sich in ihren Hauptzügen so verstehen: Aus dem Winkel der Kopfwelle läßt sich die Geschoßgeschwindigkeit ziemlich genau berechnen, wenn man die weiter von dem Geschoß entfernten Teile dieser Welle benutzt. Ganz nahe am Geschoß sind die Druckunterschiede so groß, daß hier die Kopfwelle sich mit Überschallgeschwindigkeit fortpflanzt und daher der Winkel α größer ist. Auch bei Düsenströmungen kann man solche schrägen Wellen beobachten, wenn die Düsenwände Unebenheiten aufweisen. Fig. 900, ebenfalls mit der Töplerschen Schlierenmethode gewonnen, zeigt eine solche Strömung; an der Abnahme des Machschen Winkels von links nach rechts ist deutlich die von links nach rechts zunehmende Geschwindigkeit zu erkennen.

Fig. 899.



Schlierenbild eines fliegenden Infanteriegeschosses nach Cranz.

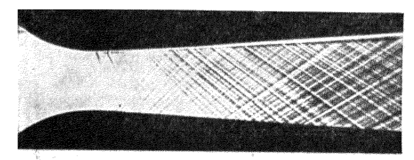
---

[1]) E. Mach, Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa, **95**, 164, 1887; **98**, 1310, 1889; **105**, 605, 1896.

[2]) Nach C. Cranz, Lehrb. d. Ballistik **2**, 451. Mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin 1926.

Auf weitere Einzelheiten soll hier mit Rücksicht auf die schon erwähnte ausführliche Darstellung unter Einbeziehung der thermodynamischen Beziehungen in Band III, 1 (Kap. XXII, § 9 bis 16) nicht eingegangen werden.

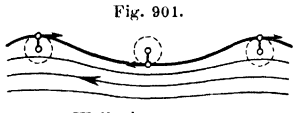
Fig. 900.



Schlierenbild der Strömung durch eine erweiterte Düse nach Prandtl.

§ 17. Wellen auf einer freien Flüssigkeitsoberfläche. Vernachlässigt man, wie meist zulässig, die Masse der von der Flüssigkeit mit in Bewegung gesetzten Luftteile gegenüber der der Flüssigkeit, so ist die Bedingung für die freie Oberfläche einfach die, daß dort der Druck gleich dem Luftdruck p_0 sein muß. Durch Beobachtung weiß man, daß bei der einfachsten Wellenbewegung die einzelnen Teilchen der Wasseroberfläche angenähert Kreisbahnen beschreiben. Von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellenberge und -täler mit den Wellen mitbewegt, ergibt sich offenbar eine stationäre Strömung, auf die die Bernoullische Gleichung angewandt werden kann, vgl. Fig. 901. Ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen $= c$, der Radius des Bahnkreises eines an der Oberfläche gelegenen Teilchens $= r$ und die Umlaufszeit $= T$, also die Geschwindigkeit auf dem Kreise $= \frac{2\pi r}{T}$, so wird in dem genannten Bezugssystem die Strömungsgeschwindigkeit

Fig. 901.



Wellenbewegung.

$$\text{auf dem Wellenberg } w_1 = c - \frac{2\pi r}{T}, \text{ im Wellental } w_2 = c + \frac{2\pi r}{T}.$$

Der Höhenunterschied ist $h = 2r$, also gilt wegen der Druckgleichheit

$$w_2^2 - w_1^2 = 2gh = 4gr.$$

Die Ausrechnung der linken Seite gibt $8\pi c r / T$. Damit wird

$$c = \frac{gT}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und r fällt heraus, d. h. die Wellengeschwindigkeit hängt von der Höhe der Wellenberge nicht ab. Wenn nicht die Schwingungszeit T, sondern die Wellenlänge λ gegeben ist, so ist noch die Beziehung zu benutzen, daß bei dem Fortschreiten der Wellenberge und -täler mit der Geschwindigkeit c zum Durchschreiten einer Wellenlänge gerade die Schwingungszeit verbraucht wird, also

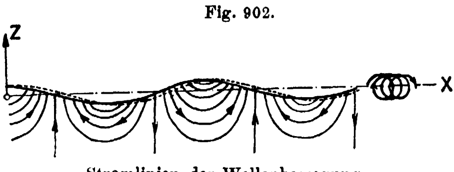
$$\lambda = cT \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Durch Wegschaffen von T aus (1) und (2) ergibt sich

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Im Gegensatz zu den Schallwellen ergibt sich also bei den Wasserwellen eine starke Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Lange Wellen laufen schneller als die kurzen. Die Wellen können sich, ohne sich wesentlich zu stören, gegenseitig überlagern. Kurze Wellen werden von den langen auf den Rücken genommen, aber sie bleiben dabei gegen diese zurück. Die Stromlinien der Wellenbewegung in einem relativ zum ungestörten Wasser ruhenden Bezugsystem zeigt Fig. 902.

Fig. 902.



Stromlinien der Wellenbewegung.

Anmerkung: Die genauere Theorie ergibt, daß Formel (3) nur für flache Wellen gilt. hier unabhängig von der Wellenhöhe; bei hohen Wellen ist die Wellengeschwindigkeit jedoch etwas größer. Dort sind auch die Bahnen der Wasserteilchen nicht mehr geschlossen, sondern das Wasser kommt im Wellenberg mehr vorwärts, als es im Wellental wieder zurückschwingt, vgl. die Nebenfigur rechts von Fig. 902. Es findet also in der Welle ein Wassertransport statt.

Von der Geschwindigkeit, mit der die Wellenköpfe fortschreiten, hier Wellengeschwindigkeit (c) genannt, ist wohl zu unterscheiden die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellengruppe, die sogenannte Gruppengeschwindigkeit c^*. Man studiert diese Aufgabe am bequemsten durch Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Amplitude, aber ein wenig verschiedener Wellenlänge. Die Betrachtung, die nicht nur für Wasserwellen, sondern ganz allgemein für Wellen gilt, deren Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, die also eine „Dispersion" haben, geht von einer einfachen Sinuswelle

$$y = A \sin(\mu x - \nu t)$$

aus. Wird x um $\frac{2\pi}{\mu}$ vermehrt, oder t um $\frac{2\pi}{\nu}$, so nimmt der Sinus denselben Wert wie vorher an, also ist $\lambda = \frac{2\pi}{\mu}$ die Wellenlänge und $T = \frac{2\pi}{\nu}$ die Schwingungszeit. Für $\mu x - \nu t = const$, also $x = const + \frac{\nu}{\mu} t$ ist das Argument des Sinus zeitlich konstant, also auch y zeitlich konstant, was so viel heißt, daß die ganze Wellenform sich mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\nu}{\mu}$ nach rechts verschiebt. Wir überlagern damit eine zweite Welle y' von derselben Amplitude, aber etwas geändertem μ und ν, das wir mit μ' und ν' bezeichnen, also $y' = A \sin(\mu' x - \nu' t)$, dann gibt

$$y + y' = A[\sin(\mu x - \nu t) + \sin(\mu' x - \nu' t)]$$

das Resultat der Überlagerung an. An den Stellen, wo beide Schwingungen gleichsinnig wirken, wird die Amplitude $= 2A$, an denjenigen Stellen, wo sie

sich entgegenwirken, wird sie = 0; dieser Vorgang wird als eine **Schwebung** bezeichnet. Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

wird hier

$$y + y' = 2A\sin\left(\frac{\mu+\mu'}{2}x - \frac{\nu+\nu'}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\mu-\mu'}{2}x - \frac{\nu-\nu'}{2}t\right).$$

In dieser Formel stellt der Faktor *sin* (...) eine Welle mit dem Mittelwert von μ und μ' bzw. ν und ν' dar, der Faktor $2A\cos(\ldots)$, der sich bei kleinem $\mu-\mu'$ und $\nu-\nu'$ nur langsam ändert, kann als veränderliche Amplitude angesprochen werden, vgl. Fig. 903. Die „Wellengruppe" ist da zu Ende, wo der Kosinus = 0 ist. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit dieser Stelle, die Gruppengeschwindigkeit c^*, ist also gemäß dem Früheren $= \frac{\nu-\nu'}{\mu-\mu'}$, oder für lange Gruppen (langsame Schwebung) genau genug

Fig. 903.

Schwebung.

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Für Wasserwellen wird nun gemäß Gl. (1)

$$\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{g}{c};$$

nach Gl. (3) ist aber

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}},$$

daher ist

$$\nu = \sqrt{g\mu},$$

also ist

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{2}c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

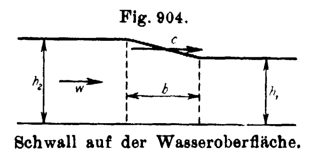
Die Wellengruppen pflanzen sich also mit der Geschwindigkeit $^1/_2\,c$ fort oder, anders gesagt, in der Gruppe laufen die Wellenköpfe mit der doppelten Geschwindigkeit der Gruppenfortpflanzung; es bilden sich immer am hinteren Ende der Gruppe neue Wellen und verschwinden am vorderen Ende wieder. Bei den Wellen, die ein in ruhiges Wasser geworfener Stein hervorbringt, ist dies sehr gut zu beobachten.

Sind zwei Flüssigkeiten von verschiedenem Gewicht übereinandergeschichtet, so kann die Grenzfläche ebenfalls Wellenbewegungen ausführen. Strömt die obere Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit w_1 über die untere hinweg, so sind nur die längeren Wellen stabil, die kürzeren sind ähnlich labil, wie dies in § 6 für die Bewegung zweier Flüssigkeitsströme längs einer Trennungsschicht gezeigt worden ist. Dies führt dann gegebenenfalls zu einer Vermischung der beiden Flüssigkeiten in der Zwischenzone, wodurch

wieder Stabilität der Strömung eintritt. Mit dem Anwachsen der Geschwindigkeit w_1 verschiebt sich die Grenze zwischen Labilität und Stabilität nach den größeren Wellenlängen. Für die Bewegung von Luft über einer Wasserfläche gilt Entsprechendes, nur daß statt einer Vermischung ein Überschlagen (Schäumen) der Wellen eintritt. Zu jeder Windstärke gehört eine größte Wellenlänge, auf die der Wind labilisierend, also verstärkend einwirkt. Die Amplituden der längeren Wellen werden nicht vom Wind verstärkt, diese treten daher gewöhnlich gar nicht in Erscheinung. Zwischen zwei Luftschichten verschiedener Dichte, wie sie in der Atmosphäre vorkommen, sind auch Wellen der erwähnten Art möglich, die manchmal durch Wolkenbildungen sichtbar werden (Helmholtzsche Luftwogen).

Die im vorstehenden angegebenen Formeln gelten für Wellen in tiefem Wasser. Die Beziehungen ändern sich, wenn die Wassertiefe klein gegen die Wellenlänge wird. Bei Wassertiefen gleich einer halben Wellenlänge sind dabei die bisherigen Formeln noch genügend genau. Für sehr kleine Tiefen, oder aber für sehr große Wellenlänge, wo die Wasserteile an der Oberfläche im wesentlichen wagerecht hin und her gehen mit im Vergleich dazu sehr mäßigen Hebungen und Senkungen, muß eine andere Rechnung Platz greifen. Man kann sie ganz analog derjenigen ausführen, die in § 15 für die Schallwellen angegeben worden ist. Es werde angenommen, daß sich ein „Schwall“, in dem die Wasserhöhe über dem ebenen Grund von h_1 auf h_2 ansteigt, mit einer Geschwindigkeit c nach rechts hin fortpflanze, vgl. Fig. 904. Vor der Ankunft des Schwalls sei das Wasser in Ruhe, nach Erhöhung des Wasserspiegels habe es die Geschwindigkeit w nach rechts hin. Die Kontinuität erfordert

Fig. 904.



Schwall auf der Wasseroberfläche.

$$h_2 w = (h_2 - h_1) c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die dynamische Gleichung kann unmittelbar aus § 15 entnommen werden, wenn man $p_2 - p_1 = \gamma (h_2 - h_1)$ setzt. Dies darf man, wenn es sich um einen sehr flachen Schwall handelt, bei dem die vertikalen Beschleunigungen vernachlässigt werden können. In diesem Falle darf man auch für h_2 und h_1, wo sie als Faktor auftreten, einen Mittelwert einführen, ohne die Ungenauigkeit zu vergrößern gegenüber der, die durch die erste Vernachlässigung schon begangen wurde. Aus Gl. (2) von § 15 wird dann (mit $\gamma = \varrho g$)

$$w c = g (h_2 - h_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

In beiden Gleichungen ergibt sich w proportional $(h_2 - h_1)$. Dividiert man beide Gleichungen durcheinander, so bleibt

$$c^2 = g h \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

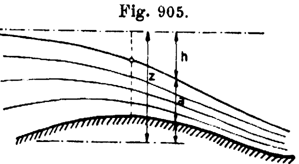
übrig. Durch aufeinander folgende positive und negative Schwalle ergeben sich auch hier Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Wellen ergibt sich gemäß Gl. (7) von der Gestalt der Welle unabhängig (also

ebenso wie bei den Schallwellen keine Dispersion). Flache Wellen schreiten also mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$ fort.

Diese Wellen- und Schwallgeschwindigkeit macht sich bei der Art des Fließens des Wassers in einem Flußlauf in ähnlicher Weise bemerkbar wie die Schallgeschwindigkeit bei Gasströmungen. Ist die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schwallgeschwindigkeit, dann macht sich ein Stau im Fluß (durch ein Wehr oder dergleichen) flußaufwärts durch eine Spiegelhebung geltend; ist die Strömungsgeschwindigkeit aber größer als die Geschwindigkeit kleiner Schwalle, so stellt sich am Wehr oder etwas davor ein stationärer endlich hoher Schwall ein (ein „Wassersprung“); stromaufwärts von diesem ist aber der Lauf des Wassers in keiner Weise durch den Stau beeinflußt. Irgendwelche Unebenheiten am Rande des Gerinnes geben zu kleinen schrägen Schwallen Anlaß, die den in § 16 erwähnten schrägen Schallwellen sehr ähnlich sind. Man hat die beiden Bewegungsarten eines Wassergerinnes mit Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als Wellengeschwindigkeit „Strömen“ und „Schießen“ genannt.

Rechnet man für eine gegebene Strömungsmenge Q_1 für die Breiteneinheit die zu wachsenden Geschwindigkeiten gehörigen Wassertiefen aus, so ergibt sich folgendes (vgl. Fig. 905): Die Spiegelsenkung vom ruhenden Spiegel aus ist $h = \frac{w^2}{2g}$. Die zum Durchfluß der Menge Q_1 in der Einheit der Breite nötige örtliche Wassertiefe ist $a = \frac{Q_1}{w}$; der Abstand des zugehörigen Gerinnepunktes unter dem ruhenden Spiegel ist danach

Fig. 905.



Überströmen über einen Wehrrücken.

$$z = h + a = \frac{w^2}{2g} + \frac{Q_1}{w}.$$

Läßt man nun w alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen, so beginnt z wegen des zweiten Gliedes mit ∞ und geht wegen des ersten Gliedes wieder auf ∞ zurück. Dazwischen muß also ein Minimum liegen, geradeso wie bei dem Stromfadenquerschnitt einer Gasströmung in § 16. Für dieses Minimum ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{w}{g} - \frac{Q_1}{w^2} = 0, \quad \text{also} \quad w = \sqrt[3]{Q_1 g};$$

damit

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{Q_1^2}{g}} \quad \text{und} \quad a = \sqrt[3]{\frac{Q_1^2}{g}} = 2h!$$

Damit ist aber $w = \sqrt{ga}$, d. h. gleich der Schwallgeschwindigkeit der Wassertiefe a! Diese Rechnung ergibt also folgendes: Strömt Wasser über einen flachen Wehrrücken, so ist über der höchsten Stelle des Wehres die Wasser-

tiefe $a = {}^2/_3$ der Tiefe z des Wehrrückens unter dem ruhenden Spiegel, und die Geschwindigkeit ist dort $\sqrt{\frac{2}{3} g z}$. Die Durchflußmenge ist daher

$$Q_1 = a w = \frac{2}{3} z \sqrt{\frac{2}{3} g z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Unterhalb des Wehrrückens hat man schießende Bewegung, die meist auf dem Wege über einen Wassersprung wieder in die strömende übergeht.

Bei stärker gekrümmten Wehren darf man nicht mehr die Annahme machen, daß im ganzen Querschnitt die gleiche Strömungsgeschwindigkeit herrsche, die qualitativen Beziehungen bleiben aber dieselben wie hier, vgl. auch § 9 des nächsten Kapitels.

Zwölftes Kapitel.

Strömende Bewegung der Flüssigkeiten und Gase. II.

Bewegung zäher Flüssigkeiten; Turbulenz; Widerstände; technische Anwendungen.

§ 1. Zähigkeit (innere Reibung). Alle wirklichen Flüssigkeiten besitzen eine gewisse „Zähigkeit“, die sich durch innere Reibung bei der Formänderung äußert. Besonders zähe Flüssigkeiten sind z. B. Honig, Glycerin, dicke Öle u. a. m. Zum Verständnis des Wesens der Zähigkeit sei zunächst folgendes einfache Beispiel betrachtet: Von zwei parallelen Platten, zwischen denen sich Flüssigkeit befindet, bewege sich die eine mit der Geschwindigkeit V in ihrer Ebene, während die andere in Ruhe ist (vgl. Fig. 906). Unter der Wirkung der Reibung stellt sich dann in der Flüssigkeit ein solcher Bewegungszustand ein, daß die unmittelbar an den Platten befindlichen Schichten dieselbe Geschwindigkeit haben wie die Platten (an den Platten „haften“), die zwischenliegenden Schichten aber mit Geschwindigkeiten u, die dem Abstand von der ruhenden Platte proportional sind, übereinander weggleiten:

Fig. 906.

$$u = V \cdot \frac{y}{a}.$$

Die Flüssigkeitsreibung äußert sich dabei durch eine Kraft, die der Bewegung der oberen Platte Widerstand leistet und die für die Flächeneinheit der Platte die Größe $\tau = \mu \cdot \frac{V}{a}$ hat. In etwas allgemeinerer Formulierung ist die bei dem Übereinanderweggleiten erzeugte Schubspannung

$$\tau = X_y = \mu \frac{du}{dy} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

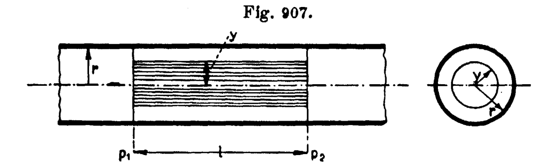
(Das Symbol X_y soll die X-Kraft pro Flächeneinheit auf einem Flächenstück bedeuten, dessen äußere Normale parallel zur Y-Achse ist.) Die Größe μ heißt Koeffizient der Flüssigkeitsreibung oder Zähigkeitsmaß, auch kurz Zähigkeit[1]).

---

[1]) Die Bezeichnung μ ist bei den Hydrodynamikern üblich, nach dem Vorbild englischer Forscher. Die Physiker bezeichnen die Zähigkeit meist mit η (Dimension im CGS-System $= g\,cm^{-1}\,s^{-1}$).

Die Kenntnis dieser Tatsache genügt bereits, um einige einfache Fälle zu behandeln, bei denen die Bewegung ebenfalls in einem einfachen Übereinanderweggleiten von Schichten besteht (sogenannte „Laminarbewegung", von lamina = Schicht). Hierher gehört die Bewegung einer reibenden (zähen) Flüssigkeit in einem geraden Rohr von Kreisquerschnitt. Der Druckunterschied $p_1 - p_2$ bewirkt an einem zylindrischen Flüssigkeitskörper vom Radius y (Fig. 907) eine Kraft $(p_1 - p_2)\pi y^2$; die Gegenkraft besteht aus der Reibung

Fig. 907.



auf der Mantelfläche $2\pi y l$, die pro Flächeneinheit $= \tau$, im ganzen also $= 2\pi y l \tau$ ist. Durch Gleichsetzen beider Kräfte ergibt sich

$$-\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2}\text{[1]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Aus Gl. (1) ergibt sich $\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu}$; durch Integration wird hieraus, wenn man gleich noch die Integrationskonstante so bestimmt, daß die äußerste Flüssigkeitsschicht an der Rohrwand haftet, also in Ruhe ist,

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r^2 - y^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

(r = Rohrradius). Die Durchflußmenge läßt sich nun auch berechnen. Es ist

$$Q = \int_0^r 2\pi y\, dy\, u = \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Diese Formel ist für die Erkenntnis des Reibungsgesetzes von grundlegender Bedeutung gewesen, da sie sich durch den Versuch mit großer Genauigkeit nachprüfen läßt; sie ergibt auch die besten Bestimmungen des Zähigkeitsmaßes μ. Ihr Ergebnis, daß die Durchflußmenge dem Druckgefälle auf die Längeneinheit und der vierten Potenz des Rohrhalbmessers proportional ist, wurde von G. Hagen 1839 durch Versuche festgestellt [2]. Es wurde unabhängig davon noch ein zweites Mal von Poiseuille gefunden [3]. Gewöhnlich wird es nach seinem zweiten Entdecker benannt, da die Veröffentlichung von Hagen, der Ingenieur war, in Physikerkreisen anscheinend unbeachtet blieb. Es ist aber richtiger, es wenigstens „Hagen-Poiseuillesches" Gesetz zu nennen [4]. Es sei hier schon bemerkt, daß das Hagen-Poiseuillesche

[1] Minuszeichen, da τ hier entgegengesetzt wirkt als im ersten Beispiel.
[2] G. Hagen, Poggendorffs Annalen **46**, 423, 1839.
[3] Poiseuille, C. R. **11**, 1840; **12**, 1841; Mém. des Savants étrangers **9**, 1846.
[4] Diese Ehrenrettung verdankt man Wolfg. Ostwald, Kolloid-Zeitschr. **36**, 99, 1925.

Gesetz nur in engen Röhrchen bei allen praktisch erreichbaren Geschwindigkeiten zutrifft. In weiteren Röhren tritt bei den größeren Geschwindigkeiten ein anderes Gesetz an seine Stelle. Diese Abweichung rührt indes keineswegs von einer Ungenauigkeit des Reibungsgesetzes her, dieses, sowie die Tatsache des Haftens an der Wand ist vielmehr durch Versuche mit engen Röhren bei den meisten Flüssigkeiten mit aller Genauigkeit bestätigt.

Anmerkung: Nach der Auffassung der kinetischen Gastheorie ist die Zähigkeit als ein Vorgang von Impulsaustausch benachbarter verschieden schneller Flüssigkeitsschichten, hervorgerufen durch die Eigenbewegung der Molekeln, anzusehen. Der Geschwindigkeitsausgleich benachbarter Schichten ist danach als eine Art Diffusionsvorgang (Diffusion von Impuls) anzusehen, und nach den im vorigen Kapitel (§ 14, 2). abgeleiteten Beziehungen zu beurteilen. — In hochverdünnten Gasen, wo die „freie Weglänge" nicht mehr vernachlässigbar klein gegen die Gefäßabmessungen ist, hat man eine scheinbare Gleitung an der Wand festgestellt, die dadurch zustande kommt, daß die aus der strömenden Flüssigkeit kommenden Molekeln im Mittel eine endliche Geschwindigkeitskomponente parallel der Wand mitbringen, während die von der Wand zurückprallenden eine regellose Verteilung mit der mittleren Tangentialkomponente Null aufweisen. Der Mittelwert der Tangentialgeschwindigkeit aller Teilchen ist dadurch von Null verschieden. Bei Gasen von gewöhnlichen Drucken, und noch mehr bei tropfbaren Flüssigkeiten, ist die freie Weglänge so klein, daß diese Erscheinung unmerklich wird. Eine echte Gleitung scheint gemäß neueren Beobachtungen über Abweichungen vom Hagen-Poiseuilleschen Gesetz bei gewissen Schmierölen vorzukommen. Diese ist durch eine einigermaßen regelmäßige Reflexion der sehr großen Molekeln an der Wand (im Gegensatz zu der ganz regellosen bei kleinen, in die molekularen Unebenheiten der Wand eindringenden Molekeln) zu erklären [1]).

Die allgemeine Theorie der Flüssigkeitsreibung lehrt, daß durch die Formänderung der einzelnen Flüssigkeitselemente Spannungen von ähnlicher Art entstehen wie bei den elastischen Körpern, nur mit dem Unterschied, daß diese Spannungen nicht den Formänderungen, sondern den Formänderungsgeschwindigkeiten proportional sind. Die Formeln für die neun Spannungskomponenten (je drei auf den drei zu den Koordinatenachsen senkrechten Flächen) lauten demnach gemäß den Lehren der Elastizitätstheorie:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & X_y &= Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ Y_y &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & Y_z &= Z_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ Z_z &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} & Z_x &= X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Haben diese Spannungen an allen Stellen eines Gebiets denselben Wert (wie es bei affiner Formänderung des Gebiets der Fall ist), so halten sie sich ohne weiteres gegenseitig das Gleichgewicht. Sind sie aber (bei allgemeinerer Art der Formänderung) von Ort zu Ort verschieden, so entstehen durch die örtliche Verschiedenheit im allgemeinen Kräfte, die, auf die Volumeneinheit bezogen, die Komponenten X' Y' Z' haben mögen. Nach den in der Elastizitätstheorie entwickelten Lehren ist

$$X' = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und entsprechend für Y' und Z'.

[1]) Mündliche Mitteilung von v. Kármán.

Durch Einsetzen der Werte von X_x usw. aus Gl. (5) in Gl. (6) erhält man

$$X' = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots (7)$$

der zweite Ausdruck in dieser Gleichung verschwindet, wenn die Strömung volumenbeständig verläuft. Für Y' und Z' gelten entsprechende Ausdrücke.

Solche Kräfte wie X' usw. treten bei den zähen Flüssigkeiten zu den in § 3 des vorigen Kapitels erörterten Kräften durch Druckunterschiede (und gegebenenfalls den Massenkräften) hinzu und bestimmen mit ihnen zusammen die Beschleunigung des Flüssigkeitsteilchens.

Durch Hinzufügung der Ausdrücke (7) auf der rechten Seite der Eulerschen Gleichungen (Mathematische Ergänzung zu Kapitel XI, § 3) entstehen die „Navier-Stokesschen Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeit.

Im Falle einer Strömung, bei der ähnlich wie bei den oben behandelten die u-Komponente vorherrscht und sich in der Y-Richtung am stärksten ändert, ist X_y [$= \tau$ von Gl. (1)] die hauptsächlichste Spannung, und es wird daher von der Kraft X' der Anteil $\frac{\partial X_y}{\partial y}$ am meisten hervortreten. Dieser wird dann nach Gl. (5) im wesentlichen durch $\mu \frac{d^2 u}{d y^2}$ wiedergegeben; er tritt dann [vgl. etwa Gl. (2) von § 3 des vorigen Kapitels] hauptsächlich mit dem Druckgefälle $-\frac{\partial p}{\partial x}$ und der „Trägheitskraft“ [1]) $-\varrho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)$ (und gegebenenfalls ähnlichen Gliedern) in Wechselwirkung. Die Rechnungen sollen jedoch hier nicht weiter verfolgt werden, da ihre Durchführung bis zum Endresultat im allgemeinen auf sehr große Schwierigkeiten stößt. Statt dessen soll hier eine Betrachtung über mechanische Ähnlichkeit durchgeführt werden, die zur Gewinnung eines allgemeinen Überblicks von großem Nutzen sein wird.

§ 2. Mechanische Ähnlichkeit; Reynoldssche Zahl. Es handelt sich hierbei um die Frage, wann wird bei geometrisch ähnlichen äußeren Umständen (geometrisch ähnlichen Kanälen, geometrisch ähnlichen Körpern in der Flüssigkeit usw.) auch die Bewegung der Flüssigkeit geometrisch ähnlich verlaufen? Man kann die Antwort zunächst so formulieren, daß hierzu in den zu vergleichenden Fällen an ähnlich gelegenen Stellen das Verhältnis der drei Kräfte Druckgefälle, Reibungskraft und Trägheitskraft das gleiche sein muß. Da zwischen den drei Kräften die Bedingung des Gleichgewichthaltens besteht, brauchen nur zwei von ihnen weiter betrachtet zu werden, als welche Trägheitskraft und Reibungskraft gewählt werden, da das Druckgefälle — wenigstens bei volumenbeständigen Strömungen — nichts genügend Charakteristisches an sich hat. Die verschiedenen geometrisch ähnlichen Strömungen sollen nun durch irgendwelche charakteristische Längen l_1, l_2 usw. (z. B. Durchmesser oder Länge eines Körpers, lichte Weite eines Kanals oder dergleichen) und durch charakteristische Geschwindigkeiten v_1, v_2, usw. (z. B. Bewegungsgeschwindigkeit eines Körpers oder mittlere Geschwindigkeit in einem be-

[1]) Unter „Trägheitskraft“ ist der Widerstand einer trägen Masse gegen Beschleunigung zu verstehen, sie ist also = — Masse × Beschleunigung, vgl. Kap. IV, § 24.

stimmten Kanalquerschnitt) gekennzeichnet werden. Die Dichten und Zähigkeiten können auch verschieden sein und ϱ_1, ϱ_2 usw., bzw. μ_1, μ_2 usw. heißen. Die Komponenten der Trägheitskräfte, von denen eine (siehe oben)

$$-\frac{\varrho}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x} = -\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

lautet, müssen sich bei den ähnlichen Strömungen wie die Produkte $\varrho \frac{v^2}{l}$ verhalten, da der angenommenen Ähnlichkeit wegen die u-Werte an entsprechenden Punkten und daher auch kleine Differenzen davon sich wie die charakteristischen Geschwindigkeiten v_1, v_2, und die Längen x und y und auch kleine Differenzen davon wie die charakteristischen Längen l_1, l_2 verhalten. Die Reibungskräfte dagegen werden sich entsprechend dem Ausdruck $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wie $\mu \frac{v}{l^2}$ verhalten. ($\partial^2 u$ bedeutet eine von der zweiten Ordnung kleine Geschwindigkeitsdifferenz, verhält sich also wie die Geschwindigkeit v, ∂y^2 ist aber das Quadrat einer kleinen Längendifferenz und verhält sich wie l^2, wenn ähnlich gelegene benachbarte Punkte herangezogen werden.) Unsere Forderung der mechanischen Ähnlichkeit kommt also darauf hinaus, daß $\frac{\varrho v^2}{l}$ und $\frac{\mu v}{l^2}$ in den verglichenen Fällen in einem festen Verhältnis stehen. Seiner Bedeutung nach (Verhältnis zweier Kräfte pro Volumeneinheit) muß dies Verhältnis eine reine Zahl sein. Es ist

$$\frac{\varrho v^2}{l} : \frac{\mu v}{l^2} = \frac{\varrho v l}{\mu},$$

die mechanische Ähnlichkeit zweier Systeme 1 und 2 ist also zu erwarten, wenn

$$\frac{\varrho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2 v_2 l_2}{\mu_2} = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist. Man nennt diese Zahl, die das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften charakterisiert, zu Ehren des Entdeckers dieses Ähnlichkeitsgesetzes, Osborne Reynolds[1]), die Reynoldssche Zahl. Das Verhältnis μ/ϱ (Zähigkeit : Dichte) wird kinematisches Zähigkeitsmaß genannt und mit ν bezeichnet. Es hat die einfache Dimension L^2/T.

Irgend ein Strömungszustand einer reibenden Flüssigkeit kann durch den Wert seiner Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{\varrho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}$ charakterisiert werden. Dabei bedeutet kleine Reynoldssche Zahl überwiegende Zähigkeitskräfte, und große Reynoldssche Zahl überwiegende Trägheitskräfte. Wie noch gezeigt werden wird, sind die Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten und die Gesetze für die Bewegungswiderstände für diese beiden Fälle sehr verschieden. Wie man aus dem Bau der Formel (1) erkennt, ist neben dem Zähigkeitsmaß auch die Größe der Raumabmessungen und Geschwindigkeiten von ent-

[1]) O. Reynolds, Phil. Trans. 1883 = Papers II, 51.

scheidendem Einfluß. Bei sehr winzigen räumlichen Abmessungen werden die für kleines $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze für alle praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten gelten, für große Abmessungen dagegen nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten oder bei sehr zähen Flüssigkeiten. Es ist noch von Interesse festzustellen, daß bei Einhaltung der Ähnlichkeit (gleiches $\mathfrak{R}$ bei geometrisch ähnlichen äußeren Umständen) die bei der Bewegung auftretenden Druckunterschiede sich wie ϱv^2 oder, was wegen (1) dasselbe ist, wie $\frac{\mu v}{l}$ verhalten.

Hier mögen einige Werte des kinematischen Zähigkeitsmaßes ν angegeben werden:

Wasser	von 0°	$\nu = 0{,}0178$	cm²/sec
„	„ 20°	$\nu = 0{,}0100$	„
„	„ 50°	$\nu = 0{,}0056$	„
„	„ 100°	$\nu = 0{,}0030$	„
Quecksilber	„ 0°	$\nu = 0\,00125$	„
„	„ 100°	$\nu = 0{,}00091$	„
Glycerin	„ 20°	$\nu = 6{,}8$	„
Luft	„ 0° und 760 mm	$\nu = 0{,}133$	„
„	„ 100° „ 760 „	$\nu = 0{,}245$	„
„	„ 0° „ 7,6 „	$\nu = 13{,}3$	„

§ 3. Bewegung von Körpern in zähen Flüssigkeiten. Stokessche Formel. Grenzschichten. Die mathematische Behandlung der Bewegung von Körpern in einer zähen Flüssigkeit hat sich als so schwierig erwiesen, daß bisher nur Grenzfälle sich der Behandlung zugänglich erwiesen haben, nämlich einmal der Grenzfall sehr großer Zähigkeit, also sehr kleiner Reynoldsscher Zahl, und der sehr kleiner Zähigkeit, also sehr großer Reynoldsscher Zahl. 1. Bei starkem Überwiegen der Zähigkeit, wie es einerseits in sehr zähen Flüssigkeiten (z. B. flüssigem Leim), andererseits bei sehr winzigen Abmessungen auch in gewöhnlichen Flüssigkeiten vorhanden ist, kann jede Trägheitswirkung als klein gegen die Zähigkeitswirkungen vernachlässigt werden, und man hat nun an jedem Flüssigkeitsteil Gleichgewicht zwischen dem Druckgefälle und der Reibungskraft anzusetzen. Die Reibungskräfte an der Volumeneinheit sind nach den Ausführungen von § 2 für geometrisch ähnliche Fälle proportional $\frac{\mu v}{l^2}$, die Druckkräfte folgen wegen des Gleichgewichts derselben Beziehung, so daß hier geometrische Ähnlichkeit auch immer mechanische Ähnlichkeit nach sich zieht; vergleichbare Volumina verhalten sich wie l^3, so daß die gesamten Widerstandskräfte sich wie das Produkt $\mu v l$ verhalten müssen. Man hat an einigen einfachen Körperformen die Strömung berechnen können und dabei auch den Bewegungswiderstand ermittelt. Am bekanntesten ist die Stokessche Lösung für die Bewegung einer Kugel, die einen Widerstand

$$W = 6\pi\mu v a \quad (1)$$

ergibt und die für die Fallbewegung kleiner Tröpfchen von Bedeutung ist (v = Geschwindigkeit, a = Radius). Es ist hier der Widerstand gleich

Gewicht minus Auftrieb zu setzen, also wird, mit ϱ_1 = Dichte des Tropfens und ϱ_2 = Dichte der umgebenden Flüssigkeit,

$$6\,\pi\,\mu\,v\,a = \frac{4\,\pi}{3}(\varrho_1 - \varrho_2)\,g\,a^3,$$

was eine Fallgeschwindigkeit

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mu}\,g\,a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ergibt. Die Formel gilt nur für Reynoldssche Zahlen, die klein gegen 1 sind. (Für Wassertröpfchen in Luft ergibt sich $v = 1{,}3 \,.\, 10^6\,a^2$, wobei a in Zentimetern einzusetzen ist; die Formel ist gültig für Tröpfchen, deren Radius kleiner als $^1/_{100}$ mm ist. Solche Tröpfchen kommen in feinem Nebel vor.)

Man kann diese ganze Gruppe von Flüssigkeitsbewegungen als „schleichende Bewegungen" bezeichnen.

Der Grenzfall der sehr großen Reynoldsschen Zahl oder der sehr kleinen Reibung würde durch ein völliges Zurücktreten des Reibungseinflusses gekennzeichnet sein, also einfach die in § 3 bis 11 des vorigen Kapitels behandelte Bewegung der reibungslosen Flüssigkeit ergeben, wenn nicht die Bedingung des Haftens an der Wand hinzukäme, die von der reibungsfreien Flüssigkeitsbewegung nicht erfüllt werden kann. Eine nähere Untersuchung zeigt nun, daß die wenig reibende Flüssigkeit sich zwar da, wo keine Wände sind, so gut wie eine reibungslose Flüssigkeit verhält, daß sich aber an den Wänden unter dem Einfluß der Reibung eine dünne „Grenzschicht" ausbildet, in der die Geschwindigkeit von dem Wert, der der reibungsfreien Bewegung entspricht, auf denjenigen übergeht, den das Haften an der Wand erfordert. Die Grenzschicht ist dabei um so dünner, je kleiner die Zähigkeit ist. Die Reibungskräfte pro Volumeneinheit sind dann zwar im Innern der Flüssigkeit sehr klein, in der Grenzschicht dagegen sind sie von der Größenordnung der Trägheitskräfte, da ja hier durch die Reibungskräfte die Geschwindigkeiten um endliche Beträge geändert werden. Fig. 908 stellt die Geschwindigkeitsverteilung in einer Grenzschicht dar. Ist die Dicke der Grenzschicht von der Größenordnung δ und die Körperabmessung in der Strömungsrichtung von der Größenordnung l, so ist die Reibungskraft $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (y senkrecht zur Oberfläche) von der Größenordnung $\frac{\mu v}{\delta^2}$, die Trägheitskraft wie früher von der Ordnung $\frac{\varrho v^2}{l}$; die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke liefert

Fig. 908

δ

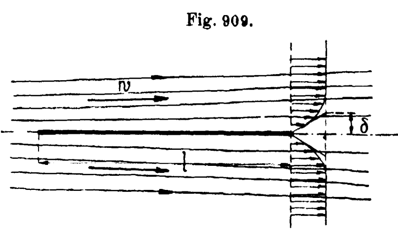
Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe.

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu\,l}{\varrho\,v}}\,.$$

Eine Abschätzung mit demselben Endergebnis gewinnt man auch durch die folgende Impulsbetrachtung für eine Strömung entlang einer ebenen Platte. Die Länge der Platte sei l, die Breite b, die Geschwindigkeit der Strömung w,

die ungefähre Dicke der Grenzschicht δ (Fig. 909), dann ist die sekundlich in die Grenzschicht geratene Masse $\sim \varrho b \delta w$ (das Zeichen $\sim$ bedeutet proportional); diese Masse, die mit der Geschwindigkeit w ankam, verliert in der Grenzschicht einen bestimmten Bruchteil davon; der Impuls, der dem entspricht, ist Masse $\times$ Geschwindigkeitsverlust und ist sonach proportional $\varrho b \delta . w^2$. Dem Impuls muß gleich sein die durch die Reibung an der Wand auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft. Nach Gl. (1) von § 1 kann diese gesetzt werden $\sim \mu l b \frac{w}{\delta}$. Aus der Proportionalität der beiden Ausdrücke folgt, daß wie oben

Fig. 909.



Strömung längs einer Platte.

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\varrho w}} = \sqrt{\frac{v l}{w}} \quad . \; . \quad (3)$$

Das Verhältnis $\frac{\delta}{l}$ ist demnach $\sim \sqrt{\frac{v}{w l}} = \frac{1}{\sqrt{\Re}}$, also eine reine Funktion der Reynoldsschen Zahl. Diese Beziehung gilt in gleicher Weise für alle stationären Grenzschichten. Man kann in vorstehende Formel auch die Zeit einführen, während der das einzelne Flüssigkeitsteilchen an dem Körper entlangströmt. Für Teilchen, die nicht allzu nahe an der Oberfläche liegen, ist diese Zeit von der Größenordnung $t \sim \frac{l}{w}$, so daß man auch

$$\delta \sim \sqrt{v t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

schreiben kann. Diese Formel kann auch für Bewegungen, die erst vor einer kürzeren Zeit t aus der Ruhe heraus begonnen haben, Verwendung finden und lehrt, daß die Grenzschicht am Beginn der Bewegung proportional der Wurzel aus der Zeit zunimmt.

Es ergibt sich also, daß jeder in schwach reibenden Flüssigkeiten bewegte Körper eine dünne Flüssigkeitsschicht mit sich schleppt. Für Flüssigkeitsströmungen durch kürzere Kanäle usw. gilt das gleiche. Bei längeren Kanälen wird nach Gl. (3) die Grenzschicht mit der Wurzel aus der Entfernung vom Kanaleinlauf wachsen und daher bei genügender Kanallänge das ganze Innere erfüllen, d. h. die Reibungswirkungen werden sich über den ganzen Kanalquerschnitt verbreiten [1]). Diese Verbreitung erfolgt übrigens in vielen Fällen viel schneller, als nach Formel (3) zu erwarten ist, durch einen Vermischungsvorgang, der als Turbulenz bezeichnet wird, vgl. § 4. Der Strömung gemäß Fig. 908 entsprechen Schubspannungen an der Wand, die sich zu einem Reibungswiderstand zusammensetzen. Bei der Platte von

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen S. 1132.

Fig. 909 ergibt sich hierbei folgendes: Die Schubspannung $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ wird hier abschätzend

$$\tau \sim \mu \frac{w}{\delta} \sim \sqrt{\frac{\mu \varrho w^3}{l}};$$

ist b die Breite der Platte, so ist die gesamte Oberfläche $O = 2bl$, der Widerstand ist daher

$$W \sim 2bl.\tau = \text{Zahl}.b\sqrt{\mu \varrho l w^3} \quad \quad (5)$$

Man vgl. hierzu auch die Ausführungen S. 1148.

§ 4. **Turbulenz.** Bei der Strömung einer zähen Flüssigkeit durch lange gerade Röhren macht man die Beobachtung, daß bei höheren Geschwindigkeiten das in § 1, Formel (4) angegebene Hagen-Poiseuillesche Gesetz (Druckabfall proportional mit der Durchflußmenge) von einem anderen Gesetz abgelöst wird, bei dem der Druckabfall nahezu der zweiten Potenz der Durchflußmenge proportional ist. Gleichzeitig wird festgestellt, daß die Strömung, die im Bereich des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes ganz glatt und geradlinig erfolgt, bei den höheren Geschwindigkeiten von unregelmäßig wirbelnden Mischbewegungen durchsetzt ist. Dies ist bei der Strömung durch Glasrohre sehr deutlich zu sehen, wenn man mittels eines dünnen Röhrchens etwas gefärbte Flüssigkeit in den Strom bringt. Diese bildet bei den kleinen Geschwindigkeiten einen sauberen geraden Faden, bei den größeren wird der Faden eine kürzere oder längere Strecke hinter dem Einlauf zerrissen, und die Farbe erfüllt die Flüssigkeit von da ab fast gleichförmig. Man nennt die glatte Bewegung „laminar", die wirbelnde „turbulent" [1]). Durch die in § 2 behandelte Ähnlichkeitsbetrachtung war O. Reynolds in den Stand gesetzt, vorauszusagen, daß, wenn man Rohre verschiedener Weite und verschiedene Flüssigkeiten untersucht, der Umschlag von dem laminaren zum turbulenten Zustand immer bei demselben Zahlwert von $\frac{wr}{\nu}$ erfolgen muß [w = mittlere Geschwindigkeit, r = Rohrhalbmesser] [2]). Dies trifft, wenn die Bedingungen für das Zuströmen zum Rohr auch genügend gut übereinstimmen, in der Tat zu. Zum Beispiel ergibt sich für ein Rohr, das mit scharfer Kante an ein Gefäß mit ebener Wand anschließt, die „kritische Reynoldssche Zahl" $\frac{wr}{\nu} = 1400$ [3]). Bei guter Abrundung des Einlaufs und

---

1) In dem Schrifttum der Ingenieure findet man dafür auch die Bezeichnung „gleitende" und „fließende" Strömung, und auch die andere: „Bandströmung" und „Flechtströmung". Der letztere Ausdruck ist nicht gerade glücklich gewählt, da ein Geflecht im allgemeinen ein sehr regelmäßiges Gebilde ist, die turbulenten Bewegungen aber gerade sehr unregelmäßig sind.

2) Die Ingenieure setzen gewöhnlich in ihre Formeln nicht den Halbmesser r, sondern den Durchmesser d des Rohres ein. Da $d = 2r$ ist, ist natürlich auch $\frac{wd}{\nu} = 2\frac{wr}{\nu}$. Um die beiden Arten von Reynoldsschen Zahlen zu unterscheiden, soll $\frac{wr}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ und $\frac{wd}{\nu} = \mathfrak{R}_2$ geschrieben werden; es ist also $\mathfrak{R}_2 = 2\mathfrak{R}_1$.

3) L. Schiller, vgl. Fußnote S. 1131.

guter Beruhigung des Flüssigkeitsinhalts des Gefäßes geht $\frac{w\,r}{\nu}$ bis 20 000 und höher, bei sehr unregelmäßigem Einlauf geht es bis etwa 1160[1]) herunter.

Der Aufklärung der Frage nach Entstehung der Turbulenz ist schon viel Scharfsinn, besonders von mathematischer Seite gewidmet worden, ohne daß bisher eine wirklich befriedigende Erklärung gefunden worden wäre. Daß aber durch die einmal vorhandene Turbulenz eine Vermehrung der Reibung eintritt, ist nach den Darlegungen von § 14 des vorigen Kapitels wohl verständlich. Dort war gezeigt, daß im Falle von Geschwindigkeitsschwankungen aus den durch die Schwankungen resultierenden Impulsbeträgen scheinbare Spannungen resultieren, so z. B. eine Schubspannung $\tau' = -\varrho\,\overline{u'\,v'}$, wo u' und v' die Abweichungen der Geschwindigkeitskomponenten u und v von ihrem zeitlichen Mittelwert $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bedeuten. Um zu einer praktisch verwendbaren Formel zu gelangen, muß versucht werden, die Größe der Geschwindigkeitsschwankungen u' und v' durch andere Größen auszudrücken. Es zeigt sich, daß hierfür eine Länge wesentlich ist, die man als Durchmesser der jeweils einheitlich bewegten Flüssigkeitsballen deuten kann, aber auch als den Weg, den diese Flüssigkeitsballen relativ zur übrigen Flüssigkeit zurücklegen, bevor sie durch Vermischung mit der umgebenden turbulenten Flüssigkeit ihre Individualität wieder einbüßen. Man kann nicht von vornherein sagen, daß diese beiden Längen einander genau gleich wären, es ist aber zu erwarten, daß sie einander im wesentlichen proportional sind. Es sei nun eine Strömung angenommen, in der die Geschwindigkeit quer zu den Stromlinien veränderlich ist. Wird nun — vgl. Fig. 910 — eine Flüssigkeitsmasse von einer Stelle y, wo die mittlere Geschwindigkeit $= \bar{u}(y)$ ist, in der Richtung quer zur Strömung um den Betrag l verschoben, so unterscheidet sich ihre Geschwindigkeit von der des neuen Ortes um $\bar{u}(y+l) - \bar{u}(y)$, wofür in erster Näherung $l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ geschrieben werden kann. Dieser Wert gibt — zum wenigsten der Größenordnung nach — den Betrag der Schwankung u' an. Der Betrag von v' ergibt sich aus der Annahme, daß zwei Flüssigkeitsballen, die von verschiedenen Seiten in die fragliche Schicht eingetreten sind und sich nun hintereinander her bewegen, sich mit der Relativgeschwindigkeit $2\,l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ nähern oder voneinander entfernen, was Anlaß zu Quergeschwindigkeiten gleicher Größenordnung gibt. Es muß also auch v' von der Größenordnung $l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ sein. Bei der Bildung des Mittelwerts $\overline{u'\,v'}$ kommt es noch auf die Vorzeichen der gleichzeitig zusammentreffenden u- und v-Komponenten an. Man sieht aber leicht, daß beim Durchschreiten der in Fig. 910 gestrichelt gezeichneten Kontrollfläche die aufwärts bewegten Teile zu langsam sind, die abwärts bewegten dagegen zu schnell, es gehören also zu positivem v' negative u', zu negativem v' positive u'. Das Produkt $u'\,v'$

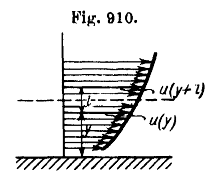
[1]) L. Schiller, vgl. Fußnote S. 1131.

ist daher beidemal negativ, die scheinbare Schubspannung daher positiv und jedenfalls von der Größenordnung $\varrho\left(l\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2$. Wenn man die auftretenden unbekannten Proportionalitätsfaktoren willkürlich $= 1$ setzt, so verschiebt sich nur die Bedeutung von l noch einmal etwas. Damit in der Formel richtig zum Ausdruck kommt, daß positivem $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ eine positive Schubspannung, und negativem $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ eine negative Schubspannung entspricht, muß die Formel nun geschrieben werden:

$$\tau' = \varrho\, l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus dieser Formel, die, wie erwähnt, nur einen Näherungsausdruck darstellt, ist zu entnehmen, daß die scheinbaren Spannungen, die durch turbulente Mischbewegungen hervorgebracht werden, sich bei Größenänderung der Geschwindigkeit proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ändern. In der Tat zeigen alle hydraulischen Widerstände im wesentlichen dieses Verhalten. Die Länge l, die wir nun „Mischungsweg" nennen wollen, hat eine gewisse Verwandtschaft zu der freien Weglänge der kinetischen Gastheorie (vgl. Band III, 2, Kap. I, § 11). Dort wird der durch die Molekularbewegung hervorgerufene Impulstransport in ganz entsprechender Weise betrachtet, wie das hier mit dem Impulstransport durch die grobe („molare") Bewegung ganzer Flüssigkeitsballen der Fall war. Die Abweichungen des Geschwindigkeitsmittels der von unten oder oben kommenden Teilchen ist wie hier $u' = l_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, die Geschwindigkeit des Quertransports v' ist dort aber nicht proportional u', sondern sie ist gleich der Geschwindigkeit der Molekularbewegung c. Damit werden die durch Molekularbewegung hervorgebrachten Schubspannungen, die wir schon als Zähigkeitsspannungen kennen, proportional der ersten Potenz von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ usw. Die freie Weglänge l_1 ist bei Gasen umgekehrt proportional der Dichte, so daß hier der die Zähigkeit darstellende Faktor, in dem das Produkt $\varrho\, l_1$ vorkommt, unabhängig von der Dichte ist.

Fig. 910.



§ 5. Einzelheiten turbulenter Strömungen.

Der Mischungsweg l der turbulenten Bewegung ist im allgemeinen von Ort zu Ort veränderlich.

a) Bei solchen Vorgängen, wie bei der Vermischung eines freien Strahles mit der ihn umgebenden ruhenden Flüssigkeit, empfiehlt es sich und ist auch ganz plausibel, den Mischungsweg in jedem Querschnitt proportional der dortigen Strahlbreite zu setzen: $l = \alpha b$.

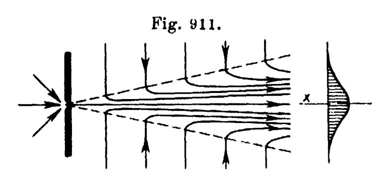
---

[1] $|a| =$ „Betrag von a" heißt, daß der Betrag von a positiv einzusetzen ist, gleichviel ob a positiv oder negativ ist.

Unter b kann man z. B. den Basishalbmesser einer parabolischen oder paraboloidischen Geschwindigkeitsverteilung verstehen, deren Höchstgeschwindigkeit und Strömungsmenge mit der der wirklichen Strömung übereinstimmen. Eine derartige Festsetzung ist erforderlich, da die wirkliche Strömung ohne greifbare Grenze diffus in die äußere Flüssigkeit übergeht. Mit solcher Festsetzung ergeben sich Werte für α, die um 0,12 herum liegen.

Die Beobachtung zeigt, daß die Ausbreitung solcher freien Strahlen in einem genügend großen von ruhender Flüssigkeit erfüllten Raum so vor sich geht, daß, abgesehen von der nächsten Umgebung der Ausflußstelle, die Strahlbreite sehr genau proportional der Entfernung von der Ausflußstelle ist. Die Geschwindigkeit nimmt dabei mit zunehmender Entfernung ab. In dem ganzen Strahl herrscht ziemlich genau der Druck der Umgebung [1]). Die Geschwindigkeitsabnahme mit zunehmender Entfernung wird daher lediglich durch die Reibungsspannungen hervorgerufen. Die Geschwindigkeitsabnahme bestimmt sich dabei nicht so, daß durch alle Querschnitte dieselbe Menge strömt; dies ist auch nicht der Fall, da beim Weiterströmen immer neue ruhende Flüssigkeit mitgerissen wird. Wegen des konstanten Druckes ist vielmehr der Impuls des Strahles, $J = \varrho \iint u^2 \, dF$, konstant (vgl. voriges Kapitel, § 12). Es wird $J =$ Zahl $. \varrho u_1^2 . \pi b^2$, wo u_1 die größte Geschwindigkeit in dem Querschnitt ist. Daraus, daß J konstant ist, folgt also u_1 proportional mit $1/b$, also auch mit $1/x$. Die Strömung verläuft etwa nach Fig. 911.

Fig. 911.



Mittlere Stromlinien eines sich ausbreitenden Luftstrahls.

Mit diesem Verhalten von b und u_1 ist die Formel (1) von § 4 im besten Einklang. Man kann, ausgehend von dieser Formel, nicht nur dieses Verhalten herleiten, sondern auch die Geschwindigkeitsverteilung im einzelnen berechnen, wobei nur die Konstante α oder eine ihr entsprechende willkürlich bleibt. Das oben geschilderte beobachtete Verhalten des sich ausbreitenden Strahles bildet also einen Beweis für die Zulässigkeit von Formel (1) des § 4. Wie man ohne eigentliche Durchführung der Rechnung eine Abschätzung erhalten kann, die bereits die wesentlichsten Beziehungen liefert, sei hier kurz dargelegt.

Es sei wie oben $l = \alpha b$ gesetzt. Der Impulssatz liefert $u_1 b = const = C$. Für die Schubspannung $\tau' = -\varrho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ (Vorzeichen gilt für positive y) erhält man einen Mittelwert über den Querschnitt, wenn $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch $-\frac{u_1}{b}$ angenähert wird. Damit wird

$$\tau'_m = -\varrho l^2 \left(\frac{u_1}{b}\right)^2 = -\alpha^2 \varrho u_1^2.$$

Die Kraft auf die Volumeneinheit ist gemäß Formel (6) von § 1 $= \frac{\partial \tau'}{\partial y}$; τ nimmt von der Mitte aus von Null bis zu einem Maximum zu und dann wieder bis auf

[1]) Bei der Behandlung des gewöhnlichen Flüssigkeitszerstäubers findet man gelegentlich die Behauptung, daß in dem Strahl nach dem Bernoullischen Satz bei der Geschwindigkeitsabnahme ein Druckanstieg stattfände und daher an der Ausflußstelle ein Unterdruck vorhanden sei, durch den die Flüssigkeit angesogen würde. Das ist unrichtig; der Bernoullische Satz gilt nur für Abwesenheit von Reibungsspannungen, hier aber sicher nicht. Das Ansaugen erfolgt vielmehr durch das Umströmen der senkrecht in den Strahl hineinragenden Rohrmündung.

Null ab, $\frac{\partial \tau'}{\partial y}$ ist also erst negativ, dann positiv; in dem ersteren Gebiet wird die Hauptströmung verzögert, in dem zweiten die mitgerissene Luft beschleunigt. Für die mittlere Strömung kann $\frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim \frac{\tau'}{b}$ gesetzt werden. Die Gleichung: Masse × Beschleunigung = Kraft liefert also für ein Volumenelement der mittleren Strömung

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim -\varrho \frac{\alpha^2 u_1^2}{b},$$

wobei auch links $u = u_1$ geschrieben werden kann, also

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \sim -\frac{\alpha^2 u_1}{b}.$$

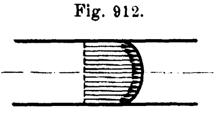
Mit $u_1 = C/b$ (Impulssatz) und $\frac{d u_1}{d x} = -\frac{C}{b^2}\frac{d b}{d x}$ wird

$$\frac{d b}{d x} \sim \alpha^2,$$

also $b \sim \alpha^2 x$, entsprechend der experimentellen Feststellung.

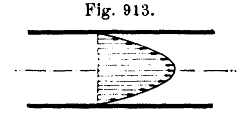
b) Bei Strömungen entlang von Wänden muß der Mischungsweg bei Annäherung an die Wände gegen Null gehen; dies geht aus seiner Bedeutung unmittelbar hervor. Hieraus ergibt sich, daß $\frac{\partial u}{\partial y}$ im Innern der Strömung sehr klein wird, in der Nähe der Wände aber große Werte annimmt. Fig. 912 zeigt eine turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Rohr im Gegensatz zur

Fig. 912.



Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung in einem Rohr.

Fig. 913.



Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Strömung in einem Rohr.

laminaren, Fig. 913. Derartige turbulente Geschwindigkeitsverteilungen lassen sich weitgehend durch Potenzgesetze darstellen, so weist die Strömung längs einer glatten Wand bei nicht allzu großen Reynoldsschen Zahlen Geschwindigkeiten proportional der siebenten Wurzel aus dem Wandabstand auf [1]). Bei größeren Reynoldsschen Zahlen ist die achte Wurzel beobachtet. Bei rauhen Wänden ergeben sich niedrigere Wurzeln, z. B. die fünfte. Diesen Geschwindigkeitsverteilungen entsprechen Mischungswege nach Formel (1), die proportional $y^{6/7}$ bzw. $y^{7/8}$ bzw. $y^{4/5}$ sind, wo y den Wandabstand bedeutet. Diese Gesetzmäßigkeiten, für die keine theoretische Begründung vorhanden ist, müssen einstweilen als Interpolationsformeln angesehen werden.

Aus den Versuchen über den Druckabfall in Rohren, vgl. § 9 Gl. (4), läßt sich für Reynoldssche Zahlen bis etwa 40000 die Näherungsformel für die Schubspannung an der Wand angeben:

$$\tau_{\mathrm{Wand}} = \zeta \frac{\varrho u_1^2}{2}\left(\frac{\nu}{r u_1}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei u_1 die Geschwindigkeit in der Mitte, r den Rohrradius und ζ eine Zahl ungefähr von der Größe 0,045 bedeutet. Ist u die Geschwindigkeit an irgend einer

1) Vgl. v. Kármán, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1, 233 ff; und Prandtl-Betz, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, III. Lieferung 1927, S. 1 ff.

Stelle und y der zugehörige Wandabstand, und wird nach früherem u proportional $y^{1/7}$ gesetzt, so läßt sich für Formel (1) auch schreiben

$$\tau_{\text{Wand}} = \zeta \frac{\varrho u^2}{2} \left(\frac{\nu}{y u}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

es ist dann nämlich $\frac{u^2}{(y u)^{1/4}} = \frac{u^{7/4}}{y^{1/4}}$ eine Konstante, die Wandreibung also, wie es sein muß, unabhängig von den willkürlich gewählten y [1]). Die Formel (2) hat den Vorteil, daß in ihr der Rohrradius und die Mittengeschwindigkeit nicht mehr vorkommt, sie ist daher wertvoll für die Übertragung der bei der Rohrreibung festgestellten Gesetzmäßigkeit auf andere Strömungen.

Die letzte Flüssigkeitsschicht an der Wand haftet auch bei turbulenter Strömung an der Wand fest, und es bildet sich zunächst der Wand eine dünne Schicht aus, in der die Strömung laminar verläuft, so zwar, daß dort, glatte Wand vorausgesetzt, in Abweichung von der vorstehenden Beziehung $\frac{d u}{d y} = \frac{\tau_{\text{Wand}}}{\mu}$ ist. Bei größeren Reynoldsschen Zahlen ist wegen der heftigen Vermischungsbewegung im Innern τ_{Wand} sehr beträchtlich, daher erfolgt der Anstieg $\frac{d u}{d y}$ ungemein rasch, die laminare Grenzschicht ist also sehr dünn; bei oberflächlicher Betrachtung machen daher die turbulenten Bewegungen den Eindruck. als ob bereits an der Wand selbst eine endliche Geschwindigkeit herrschte.

Bei rauhen Oberflächen hängt die Wandreibung sehr stark von der Art und Größe der Rauhigkeiten ab, so daß sich schwer allgemeine Angaben machen lassen. Die Wandreibung ist hier im großen und ganzen proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und ist im übrigen eine Funktion der „relativen Rauhigkeit“, d. h. des Verhältnisses Buckelgröße : Rohrradius [2]).

Bei Versuchen mit Platten, die nach Art von Fig. 909 angeströmt sind, hat sich gezeigt, daß auch hier bei genügend großer Reynoldsscher Zahl $w l/\nu$ turbulente Strömung in der die Platte begleitenden Reibungsschicht eintritt. Die kritische Reynoldssche Zahl ist hier etwa $w l/\nu = 500000$; diese hohe Zahl läßt sich so verständlich machen, daß hier die Grenzschichtdicke vor Eintritt der Turbulenz die entsprechende Rolle spielt, wie bei den Rohren der Rohrradius. Es ist mit der Formel für δ [Gl. (3) von § 3]

$$\frac{w \delta}{\nu} \sim \frac{w}{\nu} \sqrt{\frac{\nu l}{w}} = \sqrt{\frac{w l}{\nu}} = \text{rund } 700.$$

Unsere Abschätzung hatte die Zahlenfaktoren vernachlässigt. Bei richtiger Einfügung dieser Faktoren wird obige Zahl wesentlich vergrößert, so daß die Übereinstimmung mit dem Rohre sehr gut wird.

Die Impulsbetrachtungen im Anschluß an Fig. 909 lassen sich für das turbulente Reibungsgesetz nach Gl. (2) wiederholen. Man erhält dabei eine proportional mit $x^{4/5}$ wachsende turbulente Reibungsschicht (x = Abstand von der Vorderkante) und einen Widerstand proportional $\frac{\varrho w^2}{2} \left(\frac{w l}{\nu}\right)^{-1/5}$. Wenn am Anfang der Platte die Strömung laminar bleibt, wie das bei zugeschärften Platten der Fall ist, so verringert sich der Widerstand gegenüber der Formel um etwas [3]), um so mehr, je größer der Anteil des laminar beströmten Stückes ist. Über Versuchsergebnisse vgl. § 13.

[1]) Aus dieser Unabhängigkeit konnte die Proportionalität der Geschwindigkeit mit $\sqrt[7]{y}$ auf Grund der Gl. (1) vorausgesagt werden.

[2]) Vgl. etwa Hopf und Fromm, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, S. 329 u. 339 und Hopf, Handb. d. Phys. Bd. VII, S. 146 u. f.

[3]) Vgl. z. B. L. Prandtl, Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt, III. Lief., S. 4 und 87. München und Berlin 1927.

Auch bei anderen Körpern beobachtet man, daß bei genügend großen Reynoldsschen Zahlen in der Reibungsschicht, die den Körper umgibt, Turbulenz auftritt (vgl. § 7).

§ 6. Wirbelbildung. Die durch die Wirkung einer kleinen Zähigkeit an der Körperoberfläche sich bildenden verzögerten Reibungsschichten, sowohl die schlicht wie die turbulent strömenden, haben noch eine äußerst wichtige Eigenschaft, die nun besprochen werden soll. Sie geben unter gewissen Bedingungen den Anlaß zur Bildung von freien Trennungsschichten und von Wirbeln (vgl. voriges Kapitel, § 6 und 11). Wenn in der äußeren Flüssigkeit, die an die Reibungsschicht grenzt, irgendwelche beschleunigende oder verzögernde Druckunterschiede vorhanden sind, so wirken diese Druckunterschiede auch auf die Flüssigkeit der Reibungsschicht ein. Wird die äußere Strömung durch ein Druckgefälle in der Bewegungsrichtung beschleunigt, so erfahren auch die Flüssigkeitsteilchen in der Reibungsschicht, die langsamer strömen, einen Antrieb in der Bewegungsrichtung, die Strömung wird daher in allen ihren Teilen ihren Weg längs der Körperoberfläche fortsetzen. Besteht dagegen ein Druckgefälle entgegen der Strömungsrichtung, das die äußere Strömung verzögert, so werden dadurch die bereits langsameren Teilchen der Reibungsschicht noch stärker aufgehalten und werden daher nach völliger Aufzehrung ihrer kinetischen Energie zur Umkehr gebracht; während also die mit größerer Energie begabte äußere Strömung weiter vorwärts fließt, ergibt sich jetzt zunächst der Wand eine Rückströmung. Da nun immer neues Flüssigkeitsmaterial längs der Wand, das stromaufwärts eine Bremsung erfahren hat, dasselbe Schicksal erleidet, sammelt sich in kurzer Zeit immer mehr abgebremste Flüssigkeit zwischen der Wand und der äußeren Strömung an, so daß sich der rückläufige Strom rasch verbreitert und durch ihn die äußere Strömung mehr und mehr von der Wand abgehoben wird (sich von dieser „ablöst"). Die auf diese Weise entstandene Trennungsschicht rollt sich nun rasch in der in § 6 des vorigen Kapitels beschriebenen Weise zu einem Wirbel zusammen. Das gebremste Material, das durch die Reibung in Rotation versetzt ist, findet sich dabei zum Teil in dem endlich ausgedehnten Wirbelkern wieder. Die hier beschriebenen Vorgänge werden durch Fig. 914[1]) und 915 gut illustriert, die aufeinanderfolgende Stadien der Strömung um einen Kreiszylinder wiedergeben[2]). Beim Bewegungsbeginn stellt sich der Theorie entsprechend die Potentialströmung ein, die sich hinter dem Zylinder ebenso schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hatte. Während aber auf der Vorderseite, wo die Strömung beschleunigt verläuft, dieser Zustand andauert, stellen sich auf der Rückseite, wo die Flüssigkeit längs der Wand verzögert strömt, sehr bald Rückströmungen und in deren Gefolge ausgeprägte Wirbel ein. Die Trennungsschicht, die aus ursprünglich an der Zylinderwand befindlichen Wasserteilchen besteht, ist dabei durch eine (durch

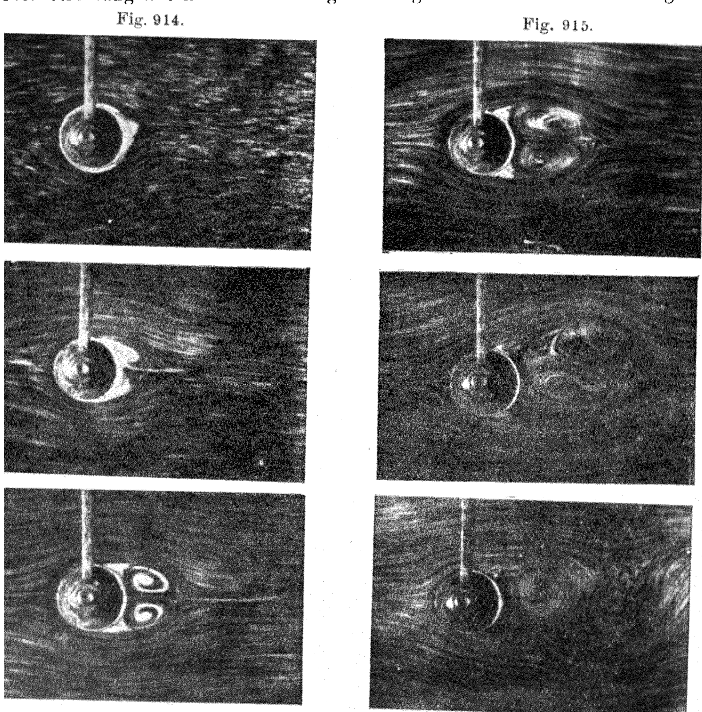
[1]) Die Figuren 914, 915 und 917, 918 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages R. Oldenbourg, München, dem Werke „Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen", III. Lieferung. von Prandtl und Betz, entnommen.

[1]) Entnommen aus kinematographischen Aufnahmen, vgl. Tietjens, Naturw. **13**, 1050, 1925.

Kapillarkräfte verursachte) Anhäufung der auf das Wasser gestreuten Aluminiumflitterchen auf mehreren Bildern deutlich zu erkennen. Die letzten Bilder der Reihe zeigen, wie die Wirbel, die immer neue Stücke der Trennungsschicht in sich aufnahmen, immer mehr anwachsen, bis sie schließlich, instabil werdend, zerfallen und einem mehr oder minder regelmäßigen Wechsel von rechts und links ausgebildeten Wirbeln Platz machen (vgl. auch S. 1143).

Die wesentliche Erkenntnis aus dem Vorangehenden ist also die, daß in einer Strömung mit in der Strömungsrichtung zunehmender Geschwindigkeit

Fig. 914. Fig. 915.



Entwicklung des Wirbelsystems hinter einem nicht rotierenden Zylinder.

die Flüssigkeit immer an der Wand anliegend vorwärts strömt, daß aber **in einer Strömung mit in der Strömungsrichtung abnehmender Geschwindigkeit** durch die Umkehr der inneren Teile der Reibungsschicht **eine Ablösung der äußeren Strömung von der Wand und eine Bildung beträchtlicher Wirbel** entstehen kann; sie wird sicher eintreten, wenn die Geschwindigkeitsabnahme stark genug ist; bei schwächerer Abnahme kann sie aber auch ausbleiben, vgl. § 7.

Die in § 6 des vorigen Kapitels beschriebene Ablösung der Strömung an einer umströmten scharfen Kante unter Bildung einer Trennungsschicht kann

von dem neuen Gesichtspunkt aus so verstanden werden, daß man zunächst eine abgerundete Kante betrachtet. Die Geschwindigkeit der Potentialströmung ist innerhalb der Rundung am größten und nimmt stromabwärts von ihr rasch ab. Die Bedingung für die Rückströmung und für die Ausbildung der Trennungsschicht ist also hier wieder auf Grund der Reibungsvorgänge gegeben, die Trennungsschicht wird von der Rundung ihren Ausgang nehmen. Läßt man nun in Gedanken die Rundung immer kleiner und kleiner werden, so ändert sich nur so viel, daß wegen der schroffer werdenden Geschwindigkeitsunterschiede die Ausbildung der Rückströmung und ihrer Folgeerscheinungen immer rascher vor sich gehen wird. So gelangt man zu dem Schluß, daß an scharfen Kanten sich äußerst schnell eine Trennungsschicht ausbildet, daß also die Annahme von § 6 des vorigen Kapitels sehr wohl begründet war.

Erfährt eine Flüssigkeit, die entlang einer Wand strömt, eine seitliche Ablenkung parallel zu der Wand, so werden unter dem zugehörigen Druckgefälle die wandnahen Schichten wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit stärker abgelenkt als die schneller strömenden, weiter von der Wand entfernten Flüssigkeitsteile; ihre Strömungsrichtung wird daher unter Umständen stark von der Richtung der Kernströmung verschieden sein. Kreist z. B. Flüssigkeit in einem zylindrischen

Fig. 916 a.

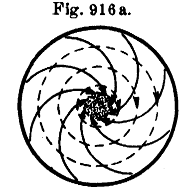
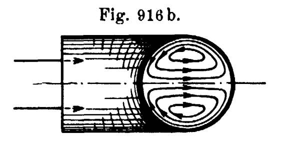


Fig. 916 b.



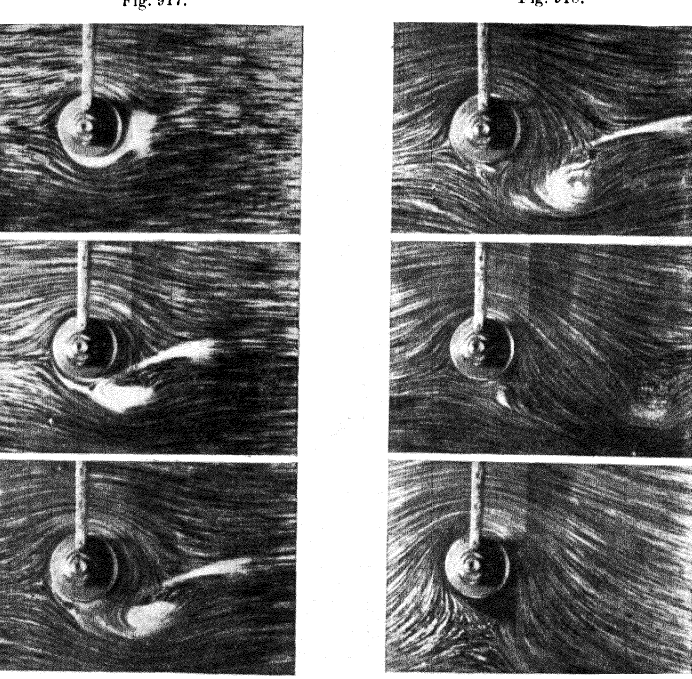
Sekundärströmungen.

Gefäß mit flachem Boden, so ist die Strömung in der bodennahen Schicht einwärts gerichtet (ihre „Zentrifugalkraft" ist kleiner als die der darüberliegenden Schichten, die den Druckverlauf bestimmen). Eine alltägliche Beobachtung lehrt, daß kleine, auf dem Boden eines solchen Gefäßes befindliche Körperchen nach der Gefäßmitte hingeschleppt und dort angehäuft werden. Die erwähnte Bodenströmung, die in Fig. 916 a veranschaulicht ist, liefert die Erklärung für diesen Vorgang. Strömt Flüssigkeit durch eine gekrümmte Rohrleitung, so sucht die Kernströmung mit der größten Geschwindigkeit möglichst geradeaus zu gehen, die Randschichten werden aber um so stärker abgelenkt, streben also der Innenseite des Bogens zu. Es überlagert sich deshalb in der gekrümmten Rohrstrecke der Strömung parallel der Rohrmittellinie eine „Sekundärströmung", die in der Rohrmitte nach außen, in der Nähe der Rohrwand aber nach innen verläuft (vgl. Fig. 916 b). Die Sekundärströmung hat zur Folge, daß die Stelle größter Geschwindigkeit nahe an den äußeren Rand verschoben wird. Bei den natürlichen Flußläufen hat die Sekundärströmung in den Flußkrümmungen die Wirkung, daß die Ablagerungen von Sand, Kies u. dergl., die mit der Bodenströmung wandern, von der äußeren Seite der Krümmung weggeholt und auf der inneren angehäuft werden, wodurch das Bett außen vertieft und innen verflacht wird. Dies führt dazu, daß die Flußkrümmung sich immer mehr verstärkt. Deshalb zeigen die natürlichen Flüsse überall, wo die Möglichkeit dazu vorhanden ist, stark gekrümmten Lauf („Mäanderbildung").

§ 7. Verhütung der Wirbelbildung. In den Betrachtungen von § 5 ist der Vereinfachung wegen ein Umstand unerwähnt geblieben, durch den die Wirbelbildung bei schwächeren Verzögerungen der Strömung unterbleiben kann. Es handelt sich um folgendes: Die Reibungsschicht wird nicht nur durch ihre Berührung mit der Wand gebremst, sondern sie wird auch durch

ihre Berührung mit der äußeren Strömung wieder angetrieben. Wenn daher die Verzögerung nur sehr allmählich eingeleitet wird, dann kann dieser Antrieb genügen, um Rückströmung zu vermeiden, und dann wird auch die Ablösung ausbleiben. Bei den schlicht strömenden Grenzschichten ist der Antrieb der äußeren Strömung auf das Grenzschichtmaterial allerdings ziemlich gering; viel stärker ist er bei den turbulenten Reibungsschichten infolge des lebhaften Impulsaustausches durch die Mischbewegung. Durch diesen Umstand wird auch bewirkt, daß bei hinten stumpf abgerundeten Körpern (z. B. Kugeln) die

Fig. 917. Fig. 918.



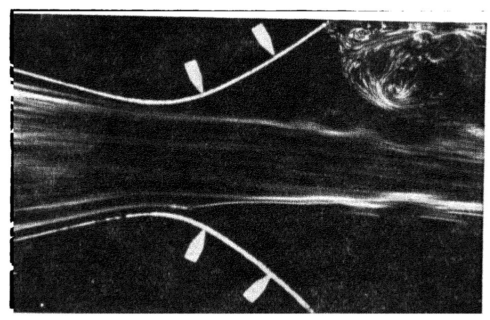
Entwicklung der Strömung um einen rotierenden Zylinder.

Ablösungsstelle wesentlich weiter hinten liegt, das Wirbelgebiet also kleiner wird, wenn die Reibungsschicht turbulent ist (vgl. § 13, Widerstand einer Kugel).

In der Technik ergibt sich die Aufgabe, trotz Druckanstiegs eine Ablösung der Strömung zu vermeiden, weil nur so die Strömungsverluste klein gehalten werden können. Die Aufgabe wird in der Weise gelöst, daß die Form der Körper genügend schlank gehalten wird, um dem Antrieb der äußeren Strömung das Übergewicht über den Druckanstieg zu ermöglichen. Die Lösung gelingt aber im allgemeinen nur in dem Falle befriedigend, daß die Reibungsschicht in dem verzögerten Teile turbulent strömt.

Man kann im übrigen die Reibungsschichten auch künstlich so beeinflussen, daß die Ablösung verhindert wird. Läßt man z. B. einen quer angeströmten Zylinder so rotieren, daß die Umfangsgeschwindigkeit gleich oder größer als die größte Strömungsgeschwindigkeit ist, die am Zylinderumfang auftritt, so wird auf derjenigen Seite, wo die Flüssigkeit und die Wand sich gleichsinnig bewegen, überhaupt keine Bremsung der Reibungsschicht entstehen, diese wird vielmehr durch die voreilende Wand beschleunigt; dadurch

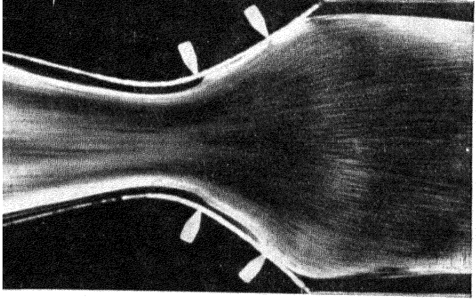
Fig. 919.



Gewöhnliche Strömung in einem stark erweiterten Kanal.



Fig. 920.



Strömung in einem stark erweiterten Kanal mit Absaugung an den Wänden.

wird sie mehr als die äußere Strömung befähigt, verzögernde Druckanstiege zu überwinden, und es kommt daher auf dieser Seite nicht zur Rückströmung und daher auch nicht zur Ablösung der Strömung. Auf der anderen Seite bewegt sich die Wand der Flüssigkeit entgegen und bremst die dortige Reibungsschicht, so daß hier erst Rückströmung und dann Ablösung eines kräftigen Wirbels entsteht. Gleichzeitig mit dem Wirbel entsteht, wie in § 10 des vorigen Kapitels dargelegt wurde, eine dem Wirbel gegenläufige Zirkulation um den Zylinder, und es entsteht der Quertrieb des „Magnuseffekts“, wie er in § 10 beschrieben wurde. Die größte Geschwindigkeit am

Zylinderumfang ist bei der gewöhnlichen Potentialbewegung $= 2v$; kommt noch eine Zirkulationsbewegung von $2v$ hinzu, dann wird auf der einen Seite die Geschwindigkeit $= 0$, auf der anderen $= 4v$. Die Versuche mit rotierenden Zylindern zeigen, daß dieser Zustand ungefähr das Maximum des Magnuseffekts ergibt und dann eintritt, wenn die Umfangsgeschwindigkeit u rund $= 4v$ gewählt wird. Die Wirbelbildungsvorgänge bei $u = 4v$ sind in Strömungsaufnahmen von Fig. 917[1]) und 918 dargestellt.

Ein anderes Mittel der Beeinflussung der Reibungsschicht besteht darin, daß man an den Stellen, wo sich sonst rückwärts strömende Flüssigkeit ansammeln würde, durch Schlitze oder durch Poren der Wand Flüssigkeit nach dem Körperinnern zu absaugt. Wenn dadurch die Ansammlung gebremster Flüssigkeit verhindert wird, so unterbleibt auch die Ablösung der Strömung. Unterstützend kommt hinzu, daß durch das Absaugen der Druck in der Strecke unmittelbar vor dem Schlitz erniedrigt und so hier eine Ablösung verhindert wird. Man kann auf diese Weise nicht Widerstand sparen, aber man kann noch bei wesentlich kürzeren oder plumperen Körperformen eine Strömung ohne nennenswerte Wirbelbildung erhalten, als es sonst möglich wäre.

Fig. 919 und 920[1]) zeigen eine Strömung in einem erweiterten Kanal, in dem sich bei anliegender Strömung die Flüssigkeit des zunehmenden Querschnitts wegen stark verzögern muß, einmal ohne, einmal mit Absaugen an den Seitenwänden. Nur im letzten Falle liegt die Strömung an, im ersteren Falle bildet sich ein Strahl.

Eine dritte Art der Beeinflussung der Reibungsschicht besteht darin, daß man den Antrieb durch die äußere Strömung vermehrt. Dieses Mittel ist im allgemeinen weniger wirksam als die beiden anderen; es wird aber z. B. bei dem Düsenflügel nach Handley Page und Lachmann erfolgreich angewandt. Die Reibungsschicht des ersten Flügelteils in Fig. 921 wird in die äußere Strömung hinausgetragen und die am zweiten Teil ausgebildete durch den Strom, der durch den Schlitz fließt, angetrieben. Man erreicht mit diesem Flügel ein Anliegen der Strömung bis zu wesentlich größeren Anstellwinkeln, als dies sonst möglich ist, und damit einen erheblich größeren Auftrieb, allerdings auf Kosten eines stark vergrößerten Widerstandes.

Fig. 921.

Spaltflügel.

§ 8. Strömungen mit überwiegender Zähigkeit. Wie bereits in § 3 auseinandergesetzt wurde, kann bei stark überwiegender Zähigkeit die Trägheit gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt werden. Diese „schleichenden Strömungen" weisen das gemeinsame Merkmal auf, daß die Bewegungswiderstände proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit sind. Das Kennzeichen, daß die Zähigkeit überwiegt, ist bei den stationären Bewegungen eine sehr kleine Reynoldssche Zahl, die entweder durch sehr große Zähigkeit oder sehr kleine Geschwindigkeit oder sehr kleine Raumabmessungen erhalten

[1]) Nach Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt 1927 mit freundl. Erlaubnis des Verlages R. Oldenbourg, München.

werden kann (auch der Fall der sehr geringen Dichte ist zu erwähnen, der bei der Strömung eines Gases in stark evakuierten Rohrleitungen Anwendung findet). Drei Beispiele solcher Bewegungen mögen hier näher besprochen werden.

a) Ein praktisch wichtiges Beispiel solcher Strömungen bildet die Strömung von Wasser und Luft durch Sand, Gerölle u. dgl.; die hierfür ermittelten Gesetze werden z. B. bei der rechnerischen Ermittlung von Grundwasserströmungen im Erdboden angewandt. Die Strömung, die hier in Wirklichkeit in den Zwischenräumen zwischen den einzelnen Sandkörnern erfolgt, läßt sich im großen so verfolgen, daß man die Menge angibt, die jeweils sekundlich durch die Flächeneinheit eines durch die Sandmasse gezogen gedachten Schnittes fließt. Diese Größe ist eine Geschwindigkeit und kann durch die Komponenten u, v, w (Ergiebigkeiten für Flächen senkrecht zur X-, Y- und Z-Achse) angegeben werden. Diese Geschwindigkeit kann bei der schleichenden Bewegung gemäß dem oben Gesagten oder in Analogie zu dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz für Rohre proportional dem Druckgefälle gesetzt werden, also in Komponenten

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -k\frac{\partial p}{\partial y}; \quad w = -k\frac{\partial p}{\partial z} \; \ldots \ldots \quad (1)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (Kap. XI, § 2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

die hier unverändert angewandt werden kann, ergibt sich gemäß (1):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \; \ldots \ldots \quad (2)$$

Der Druck p folgt also denselben Beziehungen wie das Flüssigkeitspotential Φ in § 8 und 9 des vorigen Kapitels, und u, v, w werden hier (bis auf das hierfür unwesentliche Minuszeichen) aus p ebenso abgeleitet wie bei den reibungslosen Potentialbewegungen aus Φ. Ein wesentlicher Unterschied ist aber, daß p seiner physikalischen Natur nach überall eindeutig sein und stetig verlaufen muß, während Φ an Trennungsflächen unstetig sein darf, bei den Strömungen mit Zirkulation sogar mehrdeutig ist.

Man kann mit den vorstehenden Gleichungen das Strömen des Grundwassers in verschiedenen typischen Fällen verfolgen, so z. B. die Verhältnisse untersuchen, die sich in der Umgebung eines Brunnens einstellen, aus dem Wasser weggepumpt wird. Doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

b) Mit den Grundwasserströmungen in gewisser Weise verwandt sind die Strömungen zwischen zwei parallelen Platten. Im einzelnen hat man hier eine der Hagen-Poiseuilleschen Strömung ähnliche Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung, vgl. Fig. 913 in § 5. Der Mittelwert der Geschwindigkeit über die Spaltweite kann aber bei genügend kleinen

Geschwindigkeiten wieder dem Druckgefälle proportional gesetzt werden, also in Komponenten

$$u = -k \frac{\partial p}{\partial x}; \qquad v = -k \frac{\partial p}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (1a)$$

Die Kontinuitätsgleichung

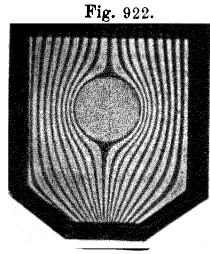
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

liefert hier also

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2a)$$

wieder in Analogie zu dem Potential der ebenen reibungslosen Strömung. Man kann daher die Stromlinien der reibungslosen Potentialströmung im Falle des eindeutigen und stetigen Potentials durch einen Versuch mit stark überwiegender Reibung nachahmen. Dies ist zuerst von Hele Shaw[1]) gemacht worden. Er führte in die zwischen Glasplatten strömende Flüssigkeit (Wasser, Glycerin) Streifen von gefärbter Flüssigkeit ein; diese gaben die Stromlinien der verschiedensten Potentialströmungen sehr schön wieder. Ein neuerer Apparat dieser Art, der mit Wasser und Tinte arbeitet, ist von R. Pohl angegeben worden; Fig. 922 ist mit diesem Apparat gewonnen worden.

Fig. 922.



Umströmung eines Zylinders nach Pohl.

F. Prasil hat ähnliche Strömungen in einem großen flachen Becken erhalten, das wenige Millimeter hoch mit Wasser gefüllt war und in das kleine Kristalle von Kaliumpermanganat gestreut waren; vgl. Fig. 923[2]) die eine Quellsenkenströmung

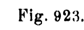
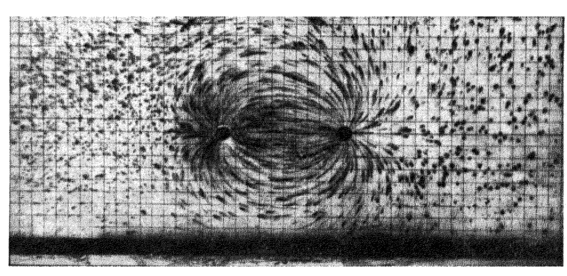


Fig. 923.



Quell-Senkenströmung nach Prasil.

darstellt (Eintritt durch das linke, Austritt durch das rechte Loch). Da die Druckverteilung gänzlich anderer Art ist wie bei schwacher Reibung,

[1]) Nach Prasil, Nature **58**, 34, 1898; Proc. Roy. Soc. **16**, 49, 1899.
[2]) Technische Hydrodynamik, 2. Aufl. Mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin 1926.

nämlich immer Druckgefälle in der Strömungsrichtung[1]), sind hier nirgends Rückströmungen zu beobachten. Es mag daher ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die in der beschriebenen Weise erhaltenen Strömungen auf derselben Linie stehen wie die aus den Formeln gerechneten Potentialströmungen. Über die wirklichen Strömungen bei großen Reynoldsschen Zahlen geben sie keinen Aufschluß. Strömungen mit Trennungsflächen können allenfalls mit einem solchen Apparat erhalten werden, wenn man die Trennungsfläche durch eine Scheidewand verwirklicht und die strömenden Flüssigkeitsmengen beiderseits geeignet reguliert.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß bei den hier beschriebenen Strömungen Abweichungen der Bahnen der inneren und äußeren Flüssigkeitsschichten eintreten, wenn die Flüssigkeitsschicht zu dick oder die Geschwindigkeit zu groß ist. Die Bahnen der wandnahen Schichten sind dann stärker gekrümmt, die der inneren Schichten gestreckt (Sekundärbewegungen, vgl. das Kleingedruckte am Schluß von § 6). Bei den Versuchen ist darauf zu achten, daß dieser Vorgang vermieden wird.

c) Ein weiteres Beispiel von Strömungen mit überwiegender Zähigkeit bilden die technisch sehr wichtigen Vorgänge in den geschmierten Lagern und Führungen von Maschinen. Es hat sich gezeigt, daß — besonders bei rascher Bewegung — zwischen den beiden gegeneinander bewegten Maschinenteilen (Zapfen und Lager bzw. Gleitschuh und Führung) eine selbst in strömender Bewegung befindliche dünne Ölschicht vorhanden ist, die die beiden festen Körper völlig vor gegenseitiger Berührung schützt. Die Fähigkeit eines Zapfenlagers und einer Gleitschuhführung, große belastende Kräfte bei kleiner Reibung aufzunehmen, muß also als Ergebnis eines Strömungsvorganges der Ölschicht verstanden werden. Hier mag als besonders einfaches Beispiel der Gleitschuh auf ebener Führung behandelt werden, wobei zur weiteren Vereinfachung noch angenommen werden soll, daß die gleitenden Flächen in der Richtung senkrecht zur Bewegung sehr ausgedehnt sein sollen, so daß man, zum mindesten in der mittleren Zone, eine ebene Bewegung annehmen darf[2]). Damit wir eine stationäre Bewegung erhalten, wollen wir ein Bezugssystem wählen, in dem der Gleitschuh ruht und die (wesentlich längere) Führung mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt wird. Als Vorarbeit sei die Strömung durch einen Spalt von der Höhe h unter der Annahme untersucht, daß die obere Wand des Spaltes (der Gleitschuh) ruht, und die untere Wand (die Führung) parallel zur oberen mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, und daß gleichzeitig in dieser Richtung ein Druckanstieg oder -gefälle herrscht. Die X-Achse sei in die Bewegungsrichtung gelegt, die Y-Achse sei senkrecht zu den Wänden. Der Druckanstieg

---

[1]) Bei der reibungslosen Potentialströmung dagegen Druckgefälle in der Richtung des Gradienten von $\frac{w^2}{2}$!

[2]) Diese zweidimensionale Theorie ist erstmalig von O. Reynolds entwickelt worden (nicht nur für den Gleitschuh, sondern auch für den Zapfen im Lager), vgl. Phil. Trans. Roy. Soc. 1886, Part I = Papers II, S. 228 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 39.

ist dann $=\frac{\partial p}{\partial x}$, wofür zur Abkürzung p' geschrieben werden soll. p' darf dabei wegen der geringen Schichtdicke h als unabhängig von y angesehen werden. Die Strömungsgeschwindigkeit, die hier in die X-Achse fällt, sei u (auch im allgemeineren Falle nicht völlig paralleler Wände ist die Geschwindigkeit durch die X-Komponente u hinreichend charakterisiert. Die Y-Komponente hat nur für die Kontinuität Bedeutung). Gemäß den Bemerkungen am Schluß von § 1 ist hier bei Vernachlässigung der Trägheit und unter der Annahme, daß in der X-Richtung der Zustand sich nur langsam ändert (langsam gegenüber den starken Änderungen nach y, was zur Vernachlässigung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gegen $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ führt):

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p'.$$

Durch Integration folgt daraus

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = p' y + C_1$$

und weiter

$$\mu u = p' \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2.$$

Die Forderung, daß für $y = 0$ $u = v$ sein soll, wird erfüllt durch $C_2 = \mu v$; für $y = h$ soll $u = 0$ werden; dies ist erfüllt, wenn

$$C_1 = -\left(\frac{\mu v}{h} + \frac{p' h}{2}\right)$$

gesetzt wird. Damit wird

$$u = \frac{p'}{2\mu}(y^2 - h y) + \frac{v}{h}(h - y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Die Reibungskraft pro Flächeninhalt an der oberen Wand wird

$$\tau_1 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_h = -\mu \frac{v}{h} + p' \frac{h}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

(Die Reibungskraft an der unteren Wand ist entsprechend $\tau_0 = C_1 = -\mu \frac{v}{h} - p' \frac{h}{2}$). Bei der Diskussion dieser Ergebnisse ist zu beachten, daß einem Druckanstieg in der Richtung der positiven X-Achse ein positives p' entspricht; ein negatives p' bedeutet ein Druckgefälle. Weiter interessiert noch die strömende Flüssigkeitsmenge, die wir im folgenden zur Formulierung der Kontinuität brauchen. Die Menge in der Höhe h wird für die Längeneinheit in der Breitenrichtung

$$Q = \int_0^h u\, d y.$$

Die sehr einfache Ausrechnung gibt

$$Q = \frac{v h}{2} - \frac{p' h^3}{12\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns der eigentlichen Aufgabe zuwenden. Es soll eine solche Lösung gefunden werden, bei der der Druck p,

von dem Luftdruck p_0 beginnend, mit x stark anwächst und hinterher wieder auf p_0 abnimmt, denn der „Gleitschuh“ soll ja Lasten tragen können, was nur bei einem derartigen Druckverlauf möglich ist. Mit einem konstanten Wert der Spalthöhe h gelingt dies nicht, denn wegen der Kontinuität muß $Q = const$ gesetzt werden. v ist die Geschwindigkeit des Gleitschuhes, also konstant; damit wird auch der Druckanstieg p' konstant. Wir müssen also h mit x veränderlich annehmen; dann liefert Gl. (3)

$$p' = \frac{dp}{dx} = 12\mu\left(\frac{v}{2h^2} - \frac{Q}{h^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

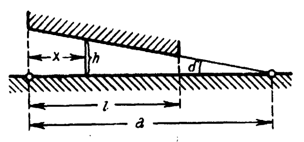
woraus durch Integration $p(x)$ erhalten wird. Die Bedingung, daß für Anfang und Ende des Gleitschuhes $p = p_0$ sein muß, liefert dann den bis dahin noch unbekannten Wert von Q. Damit ist aber der Verlauf von p bekannt, und es kann nun durch weitere Integrationen die resultierende Druckkraft des Gleitschuhes, für die Einheit in der Breitenrichtung $= \int_0^l p\,dx$, sowie das Moment $\int_0^l p\,x\,dx$ berechnet werden. Die Reibungskraft wird unter Benutzung von Gl. (2) $= \int_0^l \tau_1\,dx$, so daß damit die resultierende Kraft auf den Gleitschuh nach Größe und Richtung für jeden gegebenen Verlauf der Spalthöhe h ermittelt werden kann. Meist ist die resultierende Druckkraft gegeben, woraus dann eine Angabe über die Spalthöhe folgt.

Der einfachste Fall einer veränderlichen Spalthöhe wird erhalten, wenn man Gleitschuh und Führungsfläche eben, aber gegeneinander um einen kleinen Winkel δ geneigt annimmt. Der Gleitschuh reiche von $x = 0$ bis $x = l$; die Höhe sei

$$h = (a - x)\,.\,\delta \quad \ldots\ldots (5)$$

was bedeutet, daß die Schnittkante der beiden Ebenen in der Entfernung a von der Vorderkante des Gleitschuhes ($x = 0$) liegt (vgl. Fig. 924). Damit wird

Fig. 924.



$$\int_0^x \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{2\delta^3}\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2ax - x^2}{2\delta^3 a^2 (a-x)^2}$$

und

$$\int_0^x \frac{dx}{h^2} = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{x}{\delta^2 a (a-x)};$$

also wird

$$p = p_0 + \frac{6\mu x}{\delta^2 a (a-x)}\left(v - \frac{Q(2a-x)}{\delta a (a-x)}\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

Nach Gl. (6) ist für $x = 0$ $p = p_0$; damit auch für $x = l$ $p = p_0$ wird, muß die Klammer in (5) verschwinden, also

$$Q = \frac{v\,.\,\delta\,a\,(a-l)}{2a - l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

sein. Nach leichter Vereinfachung ergibt sich hiermit, wenn noch für $\delta(a-x)$ wieder h gesetzt wird:

$$p = p_0 + \frac{6\mu v x(l-x)}{h^2(2a-l)} \qquad (8)$$

Zur Abschätzung des mittleren Druckes mag zunächst der Druck p_1 in der Mitte des Gleitschuhes $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ angeschrieben werden. Dieser ist zwar nicht das Druckmaximum, da h gemäß Gl. (5) mit x veränderlich ist, aber er wird, wenn diese Veränderlichkeit nicht allzu stark ist, die Größenordnung dieses Maximums noch richtig angeben. Es ist gemäß Gl. (8)

$$p_1 - p_0 = \frac{3}{2}\,\frac{\mu v l^2}{h_m^2(2a-l)}.$$

Nimmt man eine angenähert parabelförmige Verteilung des Druckes an' so ist der mittlere Überdruck p_m genähert $= {}^2/_3\,(p_1 - p_0)$, also

$$p_m = \frac{\mu v l^2}{h_m^2(2a-l)} \qquad (9)$$

Diese Formel zeigt deutlich, daß auch bei verhältnismäßig kleinem μ durch sehr kleine mittlere Schichtdicke h_m sehr große Drucke erzielt werden können.

Fig. 925.

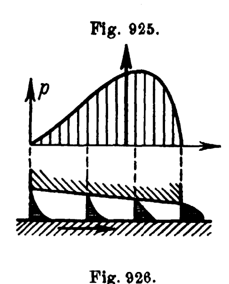
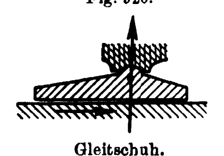


Fig. 926.



Gleitschuh.

Das Druckmaximum liegt gemäß Gl. (8) wegen der Abnahme von h in der Strömungsrichtung hinter der Mitte, daher liegt auch die resultierende Kraft hinter der Mitte. Fig. 925 zeigt eine solche Verteilung gemäß Formel (8). Darunter ist die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung angedeutet, aus deren verschiedener Krümmung die Druckunterschiede deutlich sichtbar werden. Die besondere Art der Druckverteilung hängt dabei noch von dem Verhältnis l/a ab; die Lage der resultierenden Druckkraft ist nur von l/a abhängig. Mitchell gab den Gleitschuhen des nach ihm benannten Lagers eine gelenkige Befestigung etwas hinter der Mitte der Gleitfläche (vgl. Fig. 926) und erzielte dadurch ein unter allen Belastungen gleichmäßig gutes Arbeiten. Es stellt sich automatisch eine bestimmte Schräglage (genauer ein bestimmtes a) ein, denn bei stärkerer Neigung liegt der Druckmittelpunkt weiter hinten, bei schwächerer weiter vorn; die richtige Lage weist daher eine starke Stabilität auf.

In Wirklichkeit strömt bei solchen Gleitschuhen von der an der Eintrittskante erfaßten Ölmenge ein gewisser Teil an den Seitenkanten aus; dadurch erfährt der Druck im Innern eine wesentliche Abschwächung[1]); qualitativ bleibt der Vorgang jedoch von der beschriebenen Art.

[1]) Vgl. A. G. H. Mitchell, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52, 123, 1905 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 202.

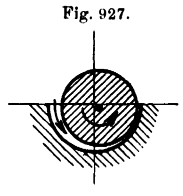
Die Schubspannungen am Gleitschuh sind wegen des Druckfeldes am Eintritt kleiner, am Austritt aber größer als die einfache Spaltreibung, aber sie bleiben doch im allgemeinen von derselben Größenordnung. In unserem Beispiel wird, wie sich leicht aus Gl. (4) und (7) ergibt:

$$\tau_1 = -\frac{\mu v}{h}\left(12\frac{a\delta(a-l)}{h(2a-l)} - 5\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wobei die Veränderlichkeit von h gemäß Gl. (5) noch zu berücksichtigen ist.

Beim Zapfen im Lager sind die Verhältnisse weniger einfach, da hier in der Spaltweite s bei zentrischer Lage des Zapfens (Differenz des Lagerhalbmessers $r+s$ und des Zapfenhalbmessers r), auch „Lagerspiel" genannt, eine neue, fest gegebene Größe auftritt, zu der durch Verschiebung des Lagermittelpunktes in wagerechter und senkrechter Richtung noch zwei Unbekannte hinzutreten. Im wesentlichen kommt es auch hier darauf hinaus, daß ein keilförmiges Ölpolster gebildet ist, durch das das Öl von dem rotierenden Zapfen von der weiten Seite zur engen durchgeschleppt wird (vgl. Fig. 927). Die Rechnungen sind hier sehr umständlich, sie werden aber einfacher, wenn man annehmen darf, daß die Zapfenexzentrizität e klein ist gegen das Lagerspiel s. Dies trifft bei in Öl badenden, schnell laufenden und mäßig belasteten Zapfen zu. Man kann in diesem Falle $h = s + e \cos(\varphi + \alpha)$ setzen (φ = Zentriwinkel) und in den Formeln die Nenner binomisch entwickeln. Bei dieser Rechnung, deren Durchführung ganz analog derjenigen für den Gleitschuh ist, wird $\frac{e}{s}$ proportional der dimensionslosen Größe $L = \frac{p_m s^2}{\mu v r}$, worin p_m den mittleren Lagerdruck, r den Zapfenradius und v die Umfangsgeschwindigkeit bedeutet. Der Bau dieser „Lagerbelastungszahl" oder kürzer „Lagerzahl" läßt sich im übrigen auch an Hand unserer Formel (9) für den Gleitschuh einsehen, die auch so geschrieben werden kann:

Fig. 927.



Lager.

$$\frac{l}{2a-l} = \frac{p_m h_m^2}{\mu v l}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist rein geometrischer Natur und hat eine ganz verwandte Bedeutung wie e/s; rechts tritt h_m statt s auf und l statt r.

Im allgemeineren Fall[1]) eines nicht kleinen e/s erweist sich diese Größe als eine Funktion der Lagerzahl L, ebenso der Winkel α zwischen der Kraftrichtung und der Richtung der Verbindungslinie Zapfenmittel—Lagermittel. Dieser Winkel ist meist in der Nähe von 90°; der Punkt des kleinsten Abstandes zwischen Zapfen und Lager liegt dabei gegen die Richtung des Zapfendrucks in der Drehrichtung voraus.

Der Einfluß verschiedener Lagerbelastung, verschiedenen Lagerspiels, verschiedener Ölzähigkeit und Umfangsgeschwindigkeit kommt in der Lager-

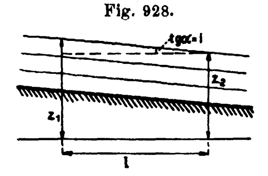
[1]) Vgl. O. Reynolds, l. c.; A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 50, 97, 1904 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 108.

zahl richtig zum Ausdruck, es erweist sich deshalb auch richtig, Versuchsergebnisse unter Zuhilfenahme dieser Größe zu ordnen [1]).

Bei den vorstehenden Ausführungen war natürlich stillschweigende Voraussetzung, daß durch reichliche Ölzufuhr und nicht zu kleine Geschwindigkeit bzw. nicht zu große Lagerbelastung ein die ganze Lagerfläche bedeckender „Ölfilm" vorhanden ist, der jede metallische Berührung verhindert. Mit Rücksicht darauf, daß der Genauigkeit, mit der sich Lager und Zapfen bzw. Gleitschuh und Führung herstellen lassen, Grenzen gezogen sind, ist bei zu kleiner Spaltweite h eine metallische Berührung nicht mehr zu vermeiden, und es treten dann Zustände ein, die durch die gewöhnliche Reibung der festen Körper besser erklärt werden können. Auch der Fall, daß im Ölfilm größere negative Drucke eintreten, muß bei Benutzung der Formeln ausgeschlossen werden. In diesem Falle ist statt dessen Zerreißen des Ölfilms zu erwarten; dies ändert zum mindesten die Berechnungsgrundlagen.

§ 9. Strömung durch gerade Röhren und Kanäle von gleichbleibendem Querschnitt. Das in § 1 angegebene Hagen-Poiseuillesche Gesetz, wonach der Druckabfall proportional der Geschwindigkeit wächst, gilt nur unterhalb der kritischen Geschwindigkeit (vgl. § 4). Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit, also bei turbulenter Strömung, ist der Druckabfall, wie in § 4 schon erwähnt, mehr oder minder genau proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit. Die Schubspannung an der Wand kann dann $= \lambda' \varrho \frac{w^2}{2}$ geschrieben werden, wo λ' eine von den näheren Umständen, besonders von der Wandrauhigkeit abhängige Zahl und w die mittlere Geschwindigkeit ist. Der Druckabfall in einem Rohr- oder Kanalstück von der Länge l muß den Schubspannungen an der Wandfläche das Gleichgewicht halten, vgl. die an Fig. 907 anknüpfende Betrachtung in § 1. Es ist daher mit $F =$ Querschnittsfläche und $U =$ „benetzter Querschnittsumfang" [2])

Fig. 928.



$$(p_1 - p_2)\, F = \tau l U = \lambda' \varrho \frac{w^2}{2} l U,$$

also

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda' \frac{U}{F} \frac{\varrho w^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Man nennt $F/U = r_h$ den hydraulischen Radius. Bei einem unter der Wirkung der Schwere fließenden Gewässer, z. B. einem Fluß, wird gewöhnlich das Spiegelgefälle $i = \frac{z_1 - z_2}{l}$ angegeben, vgl. Fig. 928, das mit dem Druck-

[1]) Über Einzelheiten vgl. etwa Gümbel-Everling, Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1925.

[2]) Bei einem offenen Gerinne (Fluß oder Kanal) gehört der freie Spiegel nicht zu dem „benetzten Umfang".

gefälle längs einer wagerechten Linie durch die Beziehung $p_1 - p_2 = g\varrho\,(z_1 - z_2)$ zusammenhängt (Kapitel X, § 9); damit wird $i = \frac{1}{g\varrho}\,\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda'}{r_h}\,\frac{w^2}{2g}$. Durch Umkehrung ergibt sich hieraus

$$w = \sqrt{\frac{2g}{\lambda'}}\; r_h\, i.$$

In der Anwendung auf Flüsse und Kanäle wird diese Formel meist

$$w = C\sqrt{r_h\, i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geschrieben und als Chézysche Formel bezeichnet. Der Wert von C, der noch als eine Funktion des hydraulischen Radius und der Wandrauhigkeit angesehen werden muß, schwankt für Wassertiefen von 0,5 bis 3 m von $80\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ bei Kanälen aus glattem Holz oder glatt geputztem Mauerwerk bis 30 bis 50 bei Erdwänden und 24 bis 40 bei Gerölle. Es sind vielfach Formeln vorgeschlagen worden, die die Beobachtungen genauer wiedergeben sollen, z. B. kann C bei gleicher Wandbeschaffenheit etwa der 6. bis 8. Wurzel aus dem hydraulischen Radius proportional gesetzt werden, jedoch besteht immer die Schwierigkeit, die gerade vorliegende Wandrauhigkeit richtig einzuschätzen. Der Einfluß verschiedener Querschnittformen wird durch den hydraulischen Radius in befriedigender Weise wiedergegeben, was darauf hindeutet, daß wirklich, wie in obiger Ableitung stillschweigend angenommen, die Schubspannung an allen Wandstellen ungefähr gleich groß ist.

In § 17 des vorigen Kapitels wurde erwähnt, daß die Geschwindigkeit $\sqrt{g h}$, mit der ein niedriger Schwall fortschreitet, die Grenze zwischen „Strömen" und „Schießen" bilde. Setzt man $h = r_h$, was bei breiten Flußläufen zutrifft, so ist im Grenzfall

$$w = C\sqrt{r_h\, i_1} = \sqrt{g\, r_h},$$

also

$$i_1 = g/C^2;$$

für $C = 50\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ ist also z. B. $i_1 = 1/250$. Für $i < i_1$ findet Strömen, für $i > i_1$ Schießen statt.

Für Röhren von Kreisquerschnitt (Radius r) ist

$$\frac{F}{U} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}.$$

Schreibt man λ_1 für $2\lambda'$, so wird aus Gl. (1)

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda_1}{r}\,\frac{\varrho\, w^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

λ_1 heißt Widerstandsziffer. Es muß dabei bemerkt werden, daß die Ingenieure meist statt des Radius r den Durchmesser $d = 2r$ in die Formel einsetzen, wodurch die Widerstandsziffer λ_2, um dasselbe Zahlenergebnis zu erhalten, doppelt so groß wie hier, also $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 4\lambda'$ gesetzt werden muß.

Eine Ähnlichkeitsbetrachtung ergibt für rauhe Rohre, daß man dieselben Zahlenwerte für λ bei zwei Röhren verschiedenen Durchmessers erwarten kann, wenn die Abmessungen der Rauhigkeiten sich wie die Rohrweiten verhalten. Hopf und Fromm[1]) fanden, daß, wenn k eine Längenabmessung

[1]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 3, 329 u. 339, 1923.

der Rauhigkeit (z. B. ihre Höhe) ist, λ für geometrisch ähnliche Rauhigkeiten proportional $\left(\frac{k}{r_h}\right)^{0,314}$ ist. — Durch Vergleich mit Gl. (2) ergibt sich $\lambda_1 = 4g/C^2$; dies gibt für die obigen Werte von C λ_1-Werte von 0,006 bis 0,068.

Über das Verhalten der turbulenten Strömung in glatten Rohren liegen ausgedehnte und zum Teil sehr genaue Versuchsreihen vor. Vom theoretischen Standpunkt läßt sich nur sagen, daß die Widerstandsziffer λ in solchen Fällen denselben Zahlwert haben muß, wo die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ der Strömung (vgl. § 2) denselben Wert hat. λ kann daher noch eine Funktion von $\mathfrak{R}$ sein. In der Tat zeigt sich eine Abnahme von λ mit wachsender Reynoldsscher Zahl. Bis etwa $\mathfrak{R}_1 = \frac{w r}{\nu} = 40000$ [1]) kann

$$\lambda_1 = 0{,}1333\,\mathfrak{R}_1^{-1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

geschrieben werden [Blasius[2]), nach Versuchen von Saph und Schoder]. Versuche, die bis über $\mathfrak{R}_1 = 200\,000$ ausgedehnt wurden, zeigten neuerdings, daß die Formel

$$\lambda_1 = 0{,}0036 + 0{,}24\,\mathfrak{R}_1^{-0,35} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

den ganzen Bereich besser darstellt [Lees, nach Versuch von Stanton und Pannel[3]), ferner Jakob und Erk nach eigenen Versuchen][4]). Ein Überblick über den Verlauf von λ_1 für glatte Rohre ergibt sich aus folgenden in runden Werten angegebenen Zahlen. Es wird

$\lambda_1 =$	0,020	0,015	0,010	0,008	0,006
für $\mathfrak{R}_1 = \frac{w r}{\nu} =$	2000	6000	32000	88000	500000

Aus der Blasiusschen Formel (4) ist durch Berechnung der Schubspannung an der Wand die Formel (1) in § 5, b erhalten worden, in der nur durch Anbringung eines Zahlenkoeffizienten von der mittleren Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der Rohrmitte übergegangen ist. Aus der Annahme, daß die Schubspannung an der Wand von der Strömung an der Wand, nicht aber von der Entfernung der Rohrmitte von der Wand abhängen muß, ist die Form (2) der Gleichung für die Schubspannung in § 5 gewonnen worden. Aus der Unabhängigkeit des τ_{Wand} von y kann, wie dort erwähnt, auf $u^{7/4}/y^{1/4} = const$ für ein und dieselbe Strömung oder u proportional $y^{1/7}$ geschlossen werden.

Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz, das mit $w = Q/\pi r^2$ auch in der Form

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\mu w}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

---

1) In der Literatur findet man als die Länge, die in die Reynoldssche Zahl von Röhrenströmungen eingeführt wird, sowohl den Halbmesser r wie den Durchmesser d, seltener den hydraulischen Radius r_h Hier wird, entsprechend dem physikalischen Brauche, r bevorzugt. Zur Unterscheidung wird $\frac{w r}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ und $\frac{w d}{\nu} = \mathfrak{R}_2$ geschrieben ($\mathfrak{R}_2 = 2\,\mathfrak{R}_1$).

2) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1913, Heft 131.

3) Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **214**, 199, 1914; Proc. Roy. Soc. London (A) **91**, 46, 1915.

4) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1924, Heft 267.

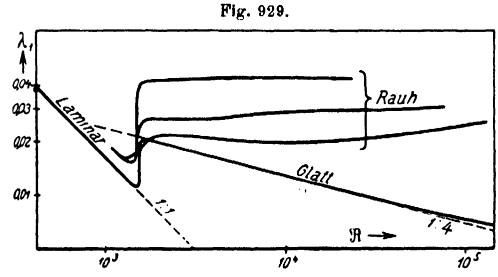
geschrieben werden kann, läßt sich ebenfalls unter die Form von Gl. (3) bringen, wenn man

$$\lambda_1 = \frac{16}{\mathfrak{R}_1} = \frac{16\mu}{\varrho w r} \quad \text{(6 a)}$$

setzt. Das Diagramm Fig. 929 stellt λ_1 als Funktion von $\mathfrak{R}_1$ dar, wie es sich aus den Beobachtungen ergibt.

Die kleinste Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}_1 = \frac{w r}{\nu}$, bei der eine turbulente Bewegung in einem genügend langen geraden Rohr noch bestehen kann, ist nach L. Schiller[1]) $\mathfrak{R}_1 = 1160$. Die größte Reynoldssche Zahl, bei der die

Fig. 929.



Verlauf der Widerstandszahl λ_1 abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

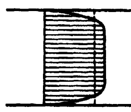
Laminarströmung noch bestehen kann, ist abhängig von der Größe der Störungen, mit denen der Zufluß der Flüssigkeit zum Rohr behaftet ist oder die an der Rohreintrittsstelle (durch scharfe Kanten oder dergleichen) erzeugt werden. Bei gut abgerundetem Einlauf und gut beruhigtem Wasser im Behälter läßt sich leicht $\frac{w r}{\nu} = 10000$ und mehr erhalten. Die Ursachen für die Entstehung der ersten Turbulenz in einem solchen Falle sind noch nicht hinreichend geklärt. Wahrscheinlich geben schwache Wirbel mit Achse parallel der Rohrachse, die durch geringe noch vorhandene Strömungen im Behälter verursacht werden, zunächst Anlaß zu labilen Geschwindigkeitsverteilungen im Rohr; diese führen dann einen raschen Zerfall der Strömung unter Bildung heftiger Querwirbel hervor, die dann nicht mehr verschwinden, da sie immer wieder Anlaß zu neuen instabilen Geschwindigkeitsverteilungen geben. Bei scharfkantigem Einlauf bildet sich dort eine Trennungsschicht, die leicht in Wirbel zerfällt und dann Turbulenz hervorruft. Ist das Rohr in eine ebene Wand so eingesetzt, daß es mit scharfer Kante an diese anschließt, so erhält man den Übergang zur turbulenten Strömung etwa bei $\mathfrak{R}_1 = 1400$.

Der Verlauf des Druckabfalls in einem Rohr, wie er durch die Gl. (6a) und (4) bzw. (5) und durch die Fig. 929 dargestellt ist, wird nur erhalten, wenn die „Meßstrecke", an deren Anfang und Ende die Drucke (durch Anbohrungen, vgl. voriges Kapitel, § 7) gemessen werden, genügend weit, z. B.

[1]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1922, Heft 248, S. 16.

100 Durchmesser, vom Einlauf entfernt sind, und selbst dann können sich im laminaren Zustand noch gewisse Abweichungen zeigen. Mißt man näher am Einlauf, oder mißt man etwa den Druckabfall vom Behälter bis zum Rohrende, so kommen die Anlaufvorgänge noch wesentlich mit in Betracht. Zunächst hat man, abgerundeten Einlauf vorausgesetzt, einen Druckabfall $= \frac{\varrho w^2}{2}$ zur Erzeugung der Geschwindigkeit w im Eintrittsquerschnitt des Rohres. Die Geschwindigkeit ist zunächst im Querschnitt praktisch gleichförmig verteilt, da jedes Teilchen dasselbe Druckgefälle durchlaufen hat. Die Bremsung durch Reibung setzt von der Wand her ein, und es bildet sich eine wachsende Schicht verzögerter Flüssigkeit, vgl. Fig. 930. Die Geschwindigkeit der Kernströmung in der Rohrmitte muß dabei in dem Maße zunehmen, daß durch jeden Querschnitt dieselbe Menge fließt; dieser Beschleunigung der Kernströmung entspricht ein Druckgefälle längs der Rohrachse gemäß der auf die Kernströmung angewandten Bernoullischen Gleichung. Dieses Druckgefälle, durch das auch die Randzone einen Antrieb erfährt, ist größer als das der Hagen-Poiseuilleschen Strömung. Beim Weiterströmen stellt sich durch Ausbreiten der Reibungszone allmählich der normale Strömungszustand der Hagen-Poiseuilleschen Strömung her. Der Übergang vollzieht sich nach Rechnungen und Beobachtungen von L. Schiller[1]) etwa nach einer Strecke $l_1 = 0{,}12 \frac{r^2 w}{\nu} = 0{,}12 r . \Re_1$. Bei $\Re_1 = 1000$ bzw. 10000 wird demnach $l_1 = 120$ bzw. $1200 r$, also 60 bzw. 600 Rohrdurchmesser! Bei kurzen, an der Eintrittsstelle abgerundeten Rohrstücken ist daher, wenn die Reynoldssche Zahl nicht ganz klein ist, keine Rede davon, daß die Geschwindigkeit nach Gl. (3) von § 1, also nach einem Paraboloid verteilt wäre. Die Geschwindigkeit ist, wenn die Flüssigkeit aus einem größeren Raume kommt, hier vielmehr in der Hauptsache gleichförmig verteilt, und nur eine Randschicht ist durch Reibung verzögert.

Fig. 930.



Geschwindigkeitsprofil der Anlaufströmung.

Die turbulente Strömung bildet sich in verhältnismäßig kürzeren Strecken aus, wenn durch scharfe Kanten, durch Umlenken um eine Ecke oder dergleichen beim Eintritt in das Rohr für die nötigen Wirbel gesorgt ist. Bei glattem Einlauf bildet sich zunächst ein laminares Stück aus, am Ende dessen die Turbulenz einsetzt. Für große Reynoldssche Zahlen und störungslosen Zustrom kann diese Länge etwa $l_2 = 500000 \nu / w = 500000 r / \Re_1$ gesetzt werden (vgl. Plattenwiderstand, § 13).

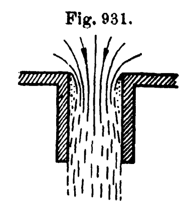
§ 10. Strömung durch Kanäle mit Querschnittsänderungen. a) Der einfachste hierher gehörige Fall ist der Ausfluß aus Mündungen. Soweit keine hydraulischen Verluste dabei auftreten, ist die Aufgabe schon in § 4 des vorigen Kapitels behandelt, insbesondere ist dort betont, daß vermöge der

[1]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing., Heft 248; Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 2, 96, 1922.

Strahlkontraktion der Strahlquerschnitt meist nicht mit dem Lochquerschnitt (F) übereinstimmt: Strahlquerschnitt $= \alpha F$, wo α die Kontraktionsziffer heißt (bei scharfrandigen Öffnungen in ebener Wand etwa $\alpha = 0{,}61$). Die Geschwindigkeit in der Strahlmitte ist beim Ausfluß aus einem Gefäß, dessen Querschnitt groß gegen den Lochquerschnitt ist, meist sehr genau $= \sqrt{2gh}$; aber in der Randzone wird durch die Reibung der auf das Loch zufliessenden Flüssigkeit an der Wand eine Geschwindigkeitsverminderung gefunden, die bei den Mündungen nach Fig. 847 größer ausfällt als bei solchen nach Fig. 846. Die mittlere Geschwindigkeit wird somit etwas kleiner als die theoretische und kann $w = \varphi \sqrt{2gh}$ geschrieben werden, mit $\varphi =$ Geschwindigkeitsziffer. Die Geschwindigkeitsziffer ist hauptsächlich bei kleinen Öffnungen und kleinen Geschwindigkeiten (bei kleiner Reynoldsscher Zahl!) merklich von 1 verschieden; bei großen Öffnungen und Geschwindigkeiten ist sie fast immer ganz nahe an 1 (vorausgesetzt, daß der Gefäßquerschnitt auch hier groß gegen den Lochquerschnitt ist). Der Ausflußvorgang eignet sich zur Mengenmessung. Man braucht nur den Lochquerschnitt F und die Flüssigkeitshöhe h zu messen, dann ist $Q = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$ die sekundliche Menge. Das Produkt $\alpha\varphi$ pflegt zu der „Ausflußziffer" μ zusammengefaßt zu werden: $\alpha\varphi = \mu$. Zur Ermittlung von μ kann man die in festgestellter Zeit ausgeflossenen Flüssigkeitsmengen wägen.

b) Bei scharfkantig an die Wand anschließenden Ansatzröhren, wie z. B. Fig. 931, werden dagegen erhebliche Verluste festgestellt. Man hat zunächst eine Kontraktion ähnlich wie bei einer Öffnung in dünner Wand, dann aber Wiederausbreitung unter Vermischung mit dem Totwasser, das den Strahl umgibt (in Fig. 931 punktiert). Für diese Vorgänge ergeben sich gemäß der Theorie im vorigen Kapitel § 12, c, folgende Beziehungen: Ist w die mittlere Ausflußgeschwindigkeit am Ende des Ansatzrohres, so ist die Geschwindigkeit an der engsten Stelle $= \frac{w}{\alpha}$; es kommt also zu der Druckhöhe $w^2/2g$ noch die Verlusthöhe $\frac{w^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ hinzu. Die Summe beider Höhen ist gleich der Wasserhöhe im Gefäß zu setzen. Löst man nach der Geschwindigkeit auf, so ergibt sich eine Geschwindigkeitsziffer

Fig. 931.

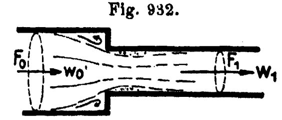


Scharfkantiges Ansatzrohr.

$$\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}}.$$

Für $\alpha = 0{,}61$ ergibt sich $\varphi = 0{,}84$.

Fig. 932.



Scharfkantige Verengung.

c) Plötzliche Verengungen in einem Rohr, vgl. Fig. 932, bringen neben dem Bernoullischen Druckabfall einen Druckverlust analog dem hier behandelten, da auch hier eine Kontraktion eintritt. Die Kontraktionsziffer kann nach Weisbach zu $\alpha = 0{,}63 + 0{,}37 \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^3$ angenommen werden.

Folgt auf die Verengung wieder eine plötzliche Erweiterung (vgl. Fig. 933), so ist entsprechend der Druckverlust

$$p_0 - p_2 = \frac{\varrho\, w_0^2}{2}\left(\frac{F_0}{\alpha F_1} - 1\right)^2.$$

Fig 933.

Drosselscheibe.

Der Druckunterschied $p_0 - p_1$, der größer ist, wird vielfach zur Mengenmessung verwendet; er ist nach Bernoulli (wenn von kleinen Verlusten abgesehen wird, siehe unten bei Fig. 934)

$$p_0 - p_1 = \frac{\varrho\, w_0^2}{2}\left[\left(\frac{F_0}{\alpha F_1}\right)^2 - 1\right].$$

Ist $p_0 - p_1$ durch Druckmessung vermittelst je einer Anbohrung vor und hinter der Verengung („Drosselscheibe", „Staurand") gemessen und α durch anderweitige Versuche bekannt, so folgt aus der Gleichung w_0 und damit die sekundliche Menge $= F_0 w_0$.

Knierohre und kurze Krümmer können auf ganz ähnlicher Grundlage beurteilt werden wie die Röhre Fig. 933; auch hier ergeben sich bei den raschen Umlenkungen Kontraktionserscheinungen mit darauf folgendem Wiederausgleich der Geschwindigkeiten. Der Druckhöhenverlust wird $= \zeta \frac{w^2}{2g}$ geschrieben, wo ζ eine empirisch für jeden Einzelfall zu ermittelnde Widerstandsziffer ist. Über die Zahlwerte für typische Fälle geben die Ingenieurhandbücher Auskunft, vgl. z. B. Hütte, Bd. I, 25. Aufl., S. 359 u. f., ferner Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 2, 1927.

d) Allmähliche Verengungen bringen sehr kleine Strömungsverluste mit sich, wesentlich größere dagegen die allmählichen Erweiterungen, da hier Neigung der Strömung zur Ablösung von der Wand besteht. Immerhin sind die Druckwiedergewinne wesentlich höher als bei plötzlicher Erweiterung. Der Druckhöhenverlust $p_0 - p_2$ in Fig. 934 kann $= \zeta \frac{\varrho}{2}(w_1^2 - w_2^2)$ geschrieben werden, mit $\zeta = 0{,}15$ bis $0{,}2$. Ein Rohr nach Art von Fig. 934 wird Venturirohr genannt und wird ebenfalls zur Mengenmessung verwandt. Beobachtet werden p_0 und p_1, die Rechnung ist ganz entsprechend der früheren, nur daß hier α bei guter Formgebung $= 1$ gesetzt werden kann. Die Geschwindigkeitsziffer ist dagegen nicht genau $= 1$, und auch die Ungleichförmigkeit in der Zuströmung ist von Einfluß, so daß sich eine empirische Eichung empfiehlt, wenn höhere Genauigkeitsansprüche gestellt werden. Für die Drosselscheiben nach Fig. 933 gilt das gleiche.

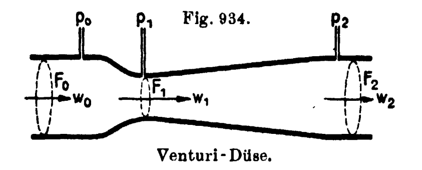


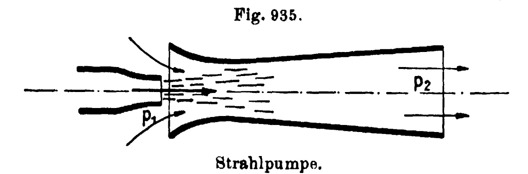
Fig. 934.

Venturi-Düse.

Die Drucksteigerung $p_2 - p_1$ in einem plötzlich oder allmählich erweiterten Rohr wird in den Strahlapparaten nach Fig. 935 dazu verwendet, andere

Flüssigkeiten anzusaugen und fortzuschaffen. Unter den Anwendungen sind zu nennen die Wasserstrahlluftpumpe, mit der man beträchtliche Luftleere herstellen kann (damit $p_2 - p_1$ gleich einer Atmosphäre wird, muß w_1 etwa 20 m/sec sein), ferner der Bunsenbrenner, bei dem der aus einer Düse austretende Gasstrahl Luft ansaugt und sich mit ihr mischt. Eine andere Anwendung ist das Lokomotivblasrohr, bei dem der aus dem Zylinder strömende

Fig. 935.

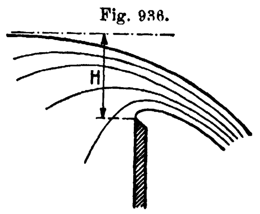


Strahlpumpe.

Dampf die Verbrennungsgase aus der Rauchkammer absaugt und so die Verbrennung unterhält. Eine sehr merkwürdige Anwendungsform ist der Injektor, der mittels Dampf aus einem Dampfkessel kaltes Wasser ansaugt und es in denselben Kessel pumpt (die Wirkung ist durch die Dichtevermehrung zu erklären, die der Dampf bei seiner Kondensation auf dem Wasser erfährt; ein großes Volumen wird dem Kessel entnommen, ein viel kleineres zurückbefördert). Auf die Theorie des Strahlapparats, die sich auf dieselben Beziehungen aufbaut wie die der vorgenannten Apparate, kann hier nicht näher eingegangen werden.

e) Für offene Wasserläufe ist der „Überfall über ein Wehr" (vgl. Fig. 936) ein sehr brauchbares Mittel zur Mengenmessung. Eine Abschätzung der überfallenden Wassermenge, soweit es sich um den Bau der Formel handelt, ist bereits durch die Betrachtungen am Ende des § 17 des vorigen Kapitels gewonnen worden. Man kann diese Formel aber auch aus einer ganz anderen, scheinbar nur entfernt verwandten Aufgabe gewinnen: Ausfluß aus einem schmalen senkrechten Schlitz in der Wand eines offenen Gewässers (vgl. Fig. 937). Hier kann ohne Bedenken der Ausflußquerschnitt in Elemente $b\,dh$ zerlegt werden; durch ein solches Element fließt eine Menge $\alpha\, b\, dh \sqrt{2gh}$. Die Integration von 0 bis h_1 liefert dann die Gesamtmenge

Fig. 936.



Überfall über ein scharfkantiges Wehr.

$$Q = \frac{2}{3}\,\alpha\, b\, h_1^{3/2} \sqrt{2g},$$

Fig. 937.

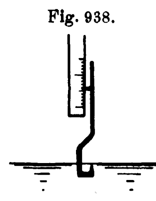
was mit der Formel in § 17 übereinstimmt, wenn $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gesetzt wird (für h_1 steht dort z). Die formale Übereinstimmung hängt damit zusammen, daß die Abmessungen des Überfalls in die Formel aus Dimensionsgründen gar nicht anders eingehen können. Der Versuch zeigt nun aber, daß

selbst die Zahlwerte für den senkrechten Überfall nach Fig. 936 und den Spalt nach Fig. 937 fast genau übereinstimmen. Für Überfälle zwischen parallelen Wänden (Überfälle ohne Seitenkontraktion) mit scharfkantiger senkrechter Überfallwand und mit Luftzufuhr unter dem Strahl liegen besonders sorgfältige Messungen vor. Nach Rehbock[1]) ist hierfür

$$\alpha = 0{,}605 + \frac{h'}{3\,(h_1 - h')} + \frac{0{,}08\,h_1}{a},$$

wobei h' eine vermutlich mit Kapillarwirkungen zusammenhängende kleine Höhe von 2,85 mm und a den Abstand der Überfallkante von dem Boden des Zulaufgerinnes bedeutet. h_1 ist die Überfallhöhe, d. h. die Höhe des Oberwasserspiegels über der Wehrkante, gemessen in einiger Entfernung vom Wehr; die Messung gelingt z. B. mit einem Gerät nach Fig. 938 mit guter Genauigkeit, da man das Austauchen der Metallspitze aus dem Wasser sehr scharf feststellen kann (besser als das Eintauchen einer nach unten gerichteten Spitze).

Fig. 938.



Vorrichtung zur Wasserspiegelmessung.

Bei Wehren mit flacher Wehrkrone wird durch die Versuche der theoretische Wert von $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$ (siehe oben) gut bestätigt.

§ 11. Widerstand von Körpern in Flüssigkeit.

a) Allgemeine Vorbemerkungen über die Widerstandsformel. Für den Widerstand, den eine Flüssigkeit der Bewegung eines in ihr befindlichen Körpers vermöge ihrer Trägheit entgegensetzt, hat schon Newton den Schluß gezogen, daß dieser Widerstand proportional der Flächenausdehnung des Körpers quer zur Bewegungsrichtung (F), ferner proportional der Dichte der Flüssigkeit (ϱ) und dem Quadrat der Geschwindigkeit (v) sein muß. Dieses Ergebnis läßt sich durch eine sehr einfache Betrachtung nachprüfen: Der Körper muß sekundlich eine Flüssigkeitsmasse $M = \varrho F . v$ aus seiner Bahn räumen und erteilt dabei jedem Massenelement eine Geschwindigkeit, die seiner Geschwindigkeit proportional gesetzt werden kann. Der Widerstand ist gleich der sekundlich erteilten Bewegungsgröße, also proportional mit

$$M v = \varrho F v^2.$$

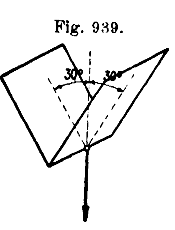
Die näheren Einzelheiten der Newtonschen Theorie, die den Flüssigkeitswiderstand nach den Gesetzen des elastischen Stoßes behandelt (Newton dachte sich das Medium als aus frei schwebenden ruhenden Massenteilchen bestehend, die von dem bewegten Körper in regelmäßiger Weise reflektiert werden), haben sich allerdings nicht halten lassen; an Stelle der Newtonschen Auffassung ist die hydrodynamische Auffassung getreten, nach der der Widerstand aus den bei der Umströmung des Körpers entstehenden Druckdifferenzen und Reibungsspannungen besteht. Ein prinzipieller Unter-

---

1) Vgl. etwa die Rehbocksche Abhandlung in De Thierry und Matschoss, Die Wasserkraftlaboratorien Europas, S. 104. Berlin 1926.

schied zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Auffassung ist der, daß bei der alten nur die Gestaltung der nach vorn gekehrten Flächen des Körpers in Betracht gezogen wird, während man jetzt weiß, daß die eigentlichen Widerstandsvorgänge hinter dem Körper zu suchen sind, und daß daher die Ausbildung der hinteren Teile von größter Bedeutung sein kann. Auch ist hervorzuheben, daß die alte Theorie den Widerstand irgend eines Körpers durch einfache Summierung über alle Flächenelemente (unter Verwendung eines für ebene Platten gewonnenen Gesetzes) erhalten wollte, während nach der hydrodynamischen Anschauung sofort einzusehen ist, daß dies unzulässig ist. Das folgende Beispiel mag dies erläutern: die Strömung um ein Dieder, vgl. Fig. 939, muß einen ganz anderen Verlauf nehmen, als die um zwei entfernt stehende, gleich geneigte Platten, da im letzteren Falle die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten durchströmen kann, im ersteren aber nicht. Nach Versuchen von Eiffel[1]) ist denn auch der Widerstand eines aus zwei quadratischen Platten mit Winkeln von 30° gegen die Bewegungsrichtung bestehenden Dieders etwa 60 Proz. des der einzeln stehenden Platten, während nach der alten Theorie beide Objekte den gleichen Widerstand haben müßten. Ein anderes sehr auffälliges Beispiel ist das folgende: Eine Kreisscheibe, ein Kreiszylinder von einer Länge gleich dem Durchmesser und einer von einer Länge gleich dem Anderthalbfachen des Durchmessers (alle senkrecht zur Kreisfläche bewegt) haben nach Eiffel[2]) (Fallversuche am Eiffelturm) eine Widerstandsziffer 1,12, 1,10, 0,80. Die Zahlen sind in der Göttinger Modellversuchsanstalt (künstlicher Luftstrom) nachgeprüft und bestätigt worden. Daß der längere Zylinder weniger Widerstand hat als der kürzere, kann nur so erklärt werden, daß in diesem Falle das Wirbelsystem durch Anlegen der Strömung an die Mantelfläche des Zylinders kleiner ausfällt und dadurch die Saugwirkung auf die Hinterfläche geringer wird als in den beiden anderen Fällen.

Fig. 939.



Dieder.

Über die allgemeine Form des nach der Hydrodynamik zu erwartenden Widerstandsgesetzes für eine bestimmte Art von Körpern läßt sich zunächst aussagen, daß dieser Widerstand durch Druckdifferenzen und Reibungsspannungen zustande kommt. Die ersteren überwiegen im allgemeinen; sie können proportional gesetzt werden dem zur Geschwindigkeit v gehörigen Staudruck $\frac{\varrho v^2}{2}$ (vgl. § 4, c des vorigen Kapitels), also ergibt sich der Widerstand als Produkt einer solchen Druckdifferenz mit der dargebotenen Fläche, ist also proportional mit $F \cdot \frac{\varrho v^2}{2}$. Der Staudruck, der durch das Staugerät (§ 7 des vorigen Kapitels) gemessen werden kann, wird in der Aerodynamik vielfach

[1]) Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la tour Eiffel, S. 78 u. f. Paris 1907.

[2]) l. c. S. 54.

mit q bezeichnet; neuerdings scheint sich durch Beschluß einer Kommission des Vereins Deutscher Ingenieure eine bei den Maschineningenieuren schon länger übliche Bezeichnung, p_d („dynamischer Druck"), durchzusetzen, weshalb sie auch hier verwendet werden soll. Da die Geschwindigkeit v meist durch Messung des Staudrucks ermittelt wird, ist dieser und nicht die Geschwindigkeit bei den Versuchen die ursprüngliche Größe; da es im übrigen sehr anschaulich ist, einen Widerstand als Wirkung eines Druckes auf eine Fläche darzustellen:

$$W = \text{Zahl}\,.\,F\,.\,p_d,$$

hat es sich nicht nur in Deutschland und Österreich, sondern neuerdings auch in Amerika und Italien eingebürgert, statt

$$W = \text{Zahl}\,.\,F\,\varrho\,v^2$$

zu schreiben

$$W = \text{Zahl}\,.\,F\frac{\varrho\,v^2}{2}\,.$$

Die neuen Zahlen sind offenbar das Doppelte der alten; sie sollen, dem Brauch der Aerodynamiker in den genannten Ländern entsprechend mit c, gegebenenfalls mit einem Index für Komponenten bezeichnet werden.

Über das Verhalten dieser „Widerstandszahl" läßt sich in Anwendung der Betrachtungen über mechanische Ähnlichkeit folgendes aussagen. Solange nur geometrisch und mechanisch ähnliche Fälle verglichen werden, bei denen also die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \frac{v\,l}{\nu}$ (l ist irgend eine Vergleichslänge) denselben Wert hat, werden die Druckdifferenzen und Reibungsspannungen in demselben Verhältnis zusammenwirken, die Reibungsspannungen ändern sich in den zu vergleichenden Fällen proportional zu den Druckdifferenzen, die ihrerseits wieder dem Staudruck proportional gesetzt werden dürfen, so daß die obige Form des Widerstandsgesetzes, also

$$W = c\,F\,p_d = c\,F\frac{\varrho\,v^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hier ein genaues Gesetz darstellt. Die Widerstandszahl c ist dabei natürlich nur so lange unveränderlich, wie die Reynoldssche Zahl unveränderlich ist; sie ändert sich im allgemeinen mit dieser, kann also als Funktion von $\mathfrak{R}$ geschrieben werden:

$$c = f(\mathfrak{R}).$$

Ist in einem bestimmten Falle eine merkliche Wirkung der Reibung nicht zu erwarten, so ergibt sich dem Vorstehenden gemäß eine merklich genaue Proportionalität des Widerstandes mit $\frac{F\varrho\,v^2}{2}$ für alle in Betracht kommenden Verhältnisse, d. h. die Funktion von $\mathfrak{R}$ wird eine Konstante. Dies ist bei Platten, die senkrecht zu ihrer Ebene bewegt werden, und bei ähnlichen scharfkantigen Objekten ziemlich genau der Fall. Für kreisförmige Platten ist der Faktor c etwa gleich 1,12.

Spielt dagegen die Reibungswirkung die Hauptrolle, wie z. B. bei Platten, die in ihrer Ebene bewegt werden, so sind starke Abweichungen

von der Newtonschen Proportionalität zu erwarten, vgl. § 12. Für die allerkleinsten Geschwindigkeiten ($\mathfrak{R}$ klein gegen 1) hat man alleinige Wirkung der Zähigkeit; hier findet das schon in § 3 erwähnte Stokessche Gesetz (Widerstand proportional v) Anwendung. Man kann auch dieses in die Form der Gl. (1) bringen, indem man ein zu $1/\mathfrak{R}$ proportionales c einführt.

b) Zerlegung des Widerstandes. Der Widerstand eines in der Flüssigkeit bewegten Körpers läßt sich immer in zwei Teile zerlegen, den Druckwiderstand und den Reibungswiderstand.

Man kann nämlich auf jedem Flächenelement die von der Flüssigkeit auf den Körper übertragene Kraftwirkung in eine Normalkomponente und eine Tangentialkomponente, das ist in eine Druckkraft und eine Reibungskraft, zerlegen. Die Resultante aller Druckkräfte ist der Druckwiderstand, die Resultante aller Reibungskräfte der Reibungswiderstand. (Bei rauhen Oberflächen wird man dabei aus praktischen Rücksichten die Zerlegung nach einer dem mittleren Verlauf der Fläche angepaßten glatten Idealfläche vornehmen. Der nach der strengen Definition auf die einzelnen Rauhigkeiten entfallende Druckwiderstand wird somit zum Reibungswiderstand geschlagen.) Die Trennung des Gesamtwiderstandes in diese beiden Teile läßt sich im Versuch so durchführen, daß man die Druckverteilung über die Körperoberfläche durch Anbohrungen beobachtet und daraus durch Rechnung den Druckwiderstand als die Resultierende aus den Druckkräften auf die einzelnen Teile der Oberfläche ermittelt. Ist der Gesamtwiderstand durch eine Kraftmessung beobachtet, so ergibt die Differenz den Reibungswiderstand. Von der Vorstellung ausgehend, daß zwar der Druckwiderstand stark von der Form des Körpers abhänge, daß aber der Reibungswiderstand im wesentlichen nur von der Größe der Oberfläche und nicht von der Form des Körpers abhängig sei, hat man die Trennung des Widerstandes in einen Formwiderstand und einen Oberflächenwiderstand vorgeschlagen. Neuere Versuche weisen indes darauf hin, daß auch der Reibungswiderstand recht merklich von der Formgebung abhängt, so daß sich diese Art der Trennung nicht streng aufrechterhalten läßt.

Bei Körpern, die sich an der freien Oberfläche der Flüssigkeit bewegen, kommt noch ein weiterer Widerstand, der Wellenwiderstand hinzu, der durch das von dem Körper bei der Bewegung erzeugte Wellensystem verursacht wird. Da die Wellenbewegung unter dem Einfluß der Erdschwere vor sich geht (von den Kapillarkräften sei abgesehen), so ist hier ein anderes mechanisches Ähnlichkeitsgesetz maßgebend wie bei den Reibungsvorgängen. Aus Geschwindigkeit (v), Länge (l) und Erdschwere (g) läßt sich eine dimensionslose Zahl $\frac{v^2}{gl}$ bilden. Das zu erwartende Wellensystem wird bei zwei verschieden großen Ausführungen einer Schiffsform (z. B. Modell und Schiff) geometrisch ähnlich ausfallen, wenn diese Zahl denselben Wert annimmt, wenn sich also die Geschwindigkeiten verhalten wie die Wurzeln aus den Längen (Froudesches Gesetz).

Der Wellenwiderstand ist mit kleinen Änderungen der Schiffsform und der Geschwindigkeit sehr stark veränderlich; bei einer Verlängerung des

Schiffskörpers kann er sowohl wachsen wie abnehmen, je nachdem die Heckwelle, die mit dem vom Bug kommenden Wellensystem interferiert, dieses verstärkt oder abschwächt. — In seichtem Wasser kann sich das Wellensystem ganz erheblich modifizieren. Der Widerstand wächst ganz erheblich an, wenn das Schiff gerade mit der Geschwindigkeit der Grundwelle (§ 17 des vorigen Kapitels) fährt.

Der Wellenwiderstand macht sich am Schiff selbst als ein Teil des Druckwiderstandes geltend. Die vom Schiff gegen den Wellenwiderstand geleistete Arbeit wird bei der Ausbreitung des Wellensystems hinter dem Schiff als kinetische Energie der Wellenbewegung fortgetragen. Der andere Teil des Druckwiderstandes, der dem gewöhnlichen Druckwiderstand eines allseitig von Flüssigkeit umgebenen Körpers entspricht, findet sich in dem Impuls der Kielwasserwirbel wieder und heißt deshalb auch Kielwasserwiderstand. Die ihm entsprechende Widerstandsarbeit findet sich in der kinetischen Energie der Wirbel wieder, die später allmählich in Wärme verwandelt wird. Gleiches gilt vom Reibungswiderstand.

Da der Reibungswiderstand und der Kielwasserwiderstand, abgesehen von den Störungen durch die Wellenbildung, die Reynoldssche Ähnlichkeit befolgt, der Wellenwiderstand aber die Froudesche Ähnlichkeit, sind streng übertragbare Modellversuche unmöglich. Da bei den Schiffen der Wellenwiderstand das Hauptinteresse besitzt, hält man sich bei den Versuchen in den Schiffsmodell-Schleppanstalten an die Froudesche Ähnlichkeit und berücksichtigt die Veränderlichkeit der anderen Widerstandsanteile mit dem Größenmaßstab des Objektes nach Erfahrungsregeln.

c) Bewegter Körper und bewegte Flüssigkeit. Eine wichtige Frage ist noch die, wie sich der Widerstand eines Körpers in ruhender Flüssigkeit zu der Kraft verhält, die eine strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt. Wenn die strömende Flüssigkeit sich in allen Teilen vollkommen gleichförmig bewegt, so kann nach den Gesetzen der allgemeinen Mechanik zwischen beiden Fällen kein Unterschied bestehen, da die Hinzunahme einer gemeinsamen gleichförmigen Bewegung (entgegengesetzt gleich der Geschwindigkeit des Körpers, so daß dieser in Ruhe versetzt wird) an dem Ablauf von mechanischen Vorgängen nichts ändert. Einen Unterschied aber macht es, ob die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung gegen den Körper vollkommen gleichförmig, oder ob sie turbulent strömt. Die Widerstände sind in der Regel im zweiten Falle größer, doch kommen Ausnahmen vor (Kugel im kritischen Gebiet, vgl. § 13). Da natürliche Flüssigkeitsströmungen (Wind, Strömung in Kanälen usw.) bei großen Abmessungen regelmäßig turbulent sind, wird man solche Unterschiede immer beobachten. Wenn man zum Zwecke von Widerstandsversuchen die Verhältnisse eines in ruhender Flüssigkeit bewegten Körpers mit einem in strömender Flüssigkeit ruhenden Modell nachahmen will, so wird man durch geeignete Einrichtungen für einen möglichst gleichförmigen Flüssigkeitsstrom zu sorgen haben. vgl. § 21.

§ 12. Der Flüssigkeitswiderstand in der hydrodynamischen Theorie. Die gewöhnliche Potentialströmung der reibungslosen Flüssigkeit ergibt für einen gleichförmig bewegten Körper in einer allseitig unendlich ausgedehnten Flüssigkeit niemals einen Widerstand in der Bewegungsrichtung

und auch keinen Auftrieb senkrecht dazu, gleichgültig, welche Gestalt der Körper auch habe. Dieses zuerst vielleicht verwunderliche Resultat läßt sich gut einsehen, wenn man den Impulssatz für eine den Körper in einiger Entfernung umschließende Kontrollfläche anwendet. Nähere Untersuchung zeigt, daß die durch den Körper verursachten Störungsgeschwindigkeiten nach allen Seiten sehr rasch, mindestens mit der umgekehrten dritten Potenz der Entfernung abklingen, die Druckunterschiede desgleichen; läßt man die Kontrollfläche ins Unendliche wachsen, wobei ihr Flächeninhalt proportional dem Quadrat des Halbmessers wächst, so gehen also die Beiträge zum Impuls usw. gegen Null. Da der Impulssatz für jede Kontrollfläche dasselbe Resultat ergeben muß, kann es also nur Null sein.

Bildet man die Impulsmomente, so kommt eine Potenz der Entfernung als Hebelarm dazu; daraus ist ersichtlich, daß die Impulsmomente nicht zu verschwinden brauchen, und in der Tat erhält man für schräg angeströmte Körper Drehmomente (und zwar solche, die die Körper quer zur Strömung stellen wollen, wie sich aus der Diskussion der Druckverteilung unschwer ergibt).

Mit der obigen Betrachtung steht nicht im Widerspruch, daß Körper, die sich in der Nähe einer Wand oder eines anderen Körpers bewegen, Kräfte durch die Strömung erfahren (hier ist es nicht möglich, die Kontrollfläche ins Unendliche zu rücken). Kugeln werden z. B., wenn sie sich parallel zu einer Wand bewegen, mit Kräften proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung von der Wand angezogen, wenn sie sich senkrecht auf die Wand zu bewegen oder sich von ihr entfernen, mit Kräften derselben Art abgestoßen.

Bei beschleunigten Körpern findet man auch in der reibungslosen Flüssigkeit Kräfte zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, die aber nur von der Art sind, als ob die Masse des Körpers durch die der von ihm mitgenommenen Flüssigkeit vergrößert wäre. Man spricht hier von einer „scheinbaren Masse" der mitbewegten Flüssigkeit. Bei einer Kugel ist die scheinbare Masse halb so groß wie die von der Kugel verdrängte Flüssigkeitsmasse. Da beim Bewegungsbeginn aus der Ruhe heraus immer zunächst angenähert eine Potentialbewegung entsteht, hat dieses Resultat auch für die wirklichen Flüssigkeiten Bedeutung.

Daß der Widerstand bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers in reibungsloser Flüssigkeit gleich Null ist, läßt sich auch aus einer Energiebetrachtung schließen. Beim Fehlen von Reibung könnte die für die Überwindung des Widerstandes aufzuwendende Arbeit nur in Form von kinetischer Energie in der Flüssigkeit aufgespeichert werden. Wenn sich aber, wie bei den Potentialbewegungen, die Flüssigkeit hinter dem Körper ebenso schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hat, und also keine Störung in ihr zurückbleibt, so ist auch kein Widerstand möglich. Ein Fall, in dem kinetische Energie in der Flüssigkeit zurückbleibt, und daher auch ein Widerstand auftritt (Flugzeugtragflügel), wird in § 15 und 16 behandelt werden.

Ein anderer Fall betrifft das an der freien Wasseroberfläche fahrende Schiff, bei dem, wie schon erwähnt, durch das sich bildende Wellensystem, dessen Ausdehnung mit der Länge der Fahrt dauernd zunimmt, Energie zerstreut wird. Der Energiezerstreuung entspricht hier der Wellenwiderstand.

Das Auftreten eines Auftriebs ohne Hinterlassung von kinetischer Energie in der Flüssigkeit wird durch die Energiebetrachtung nicht ausgeschlossen, da der Auftrieb senkrecht zum Wege des Körpers in der Flüssigkeit wirkt

und daher keine Arbeitsleistung erfordert. Das Auftreten eines solchen Auftriebs (oder Quertriebs) ist bereits in § 10 des vorigen Kapitels behandelt worden.

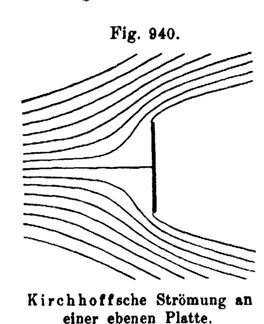
Die mit der scheinbaren Masse zusammenhängenden Flüssigkeitskräfte bei der Beschleunigung eines Körpers lassen sich vom Standpunkt des Energiesatzes gut verstehen, wenn man überlegt, daß die Arbeiten dieser Kräfte erforderlich sind, um die in der Flüssigkeitsbewegung steckende kinetische Energie zu erzeugen oder — bei der Verzögerung — wieder aus der Flüssigkeit fortzuschaffen.

Daß in Wirklichkeit die meisten Körper einen über den unvermeidlichen Reibungswiderstand (vgl. § 5) weit hinausgehenden Widerstand aufweisen, liegt daran, daß sich an ihnen in der in § 6 beschriebenen Art Trennungsschichten und Wirbel ausbilden. Diese sind als eigentlicher Sitz des Widerstandes anzusehen. Sie verhindern, daß sich die Strömung hinten ebenso schließt, wie sie sich vorn geöffnet hatte, und veranlassen so eine Unsymmetrie der Druckverteilung (vorn voller Staudruck, hinten nicht); sie sorgen auch dafür, daß dauernd kinetische Energie vom Körper weggeführt wird.

Von den verschiedenen Versuchen, das Widerstandsproblem im Rahmen der Theorie der idealen Flüssigkeit zu behandeln, seien hier zwei als besonders typisch behandelt, die Kirchhoffsche Strömung um die Platte mit Trennungsfläche und die Kármánsche Wirbelstraße.

Kirchhoff[1]) fand ein sehr schönes Beispiel der Anwendung der Helmholtzschen Diskontinuitätsflächen (vgl. § 7 des vorigen Kapitels) in der Umströmung einer ebenen Platte gemäß Fig. 940. Die Strömung teilt sich vor der Platte und fließt von den Kanten seitlich nach hinten zu ab, während der Raum hinter der Platte von einer ruhenden Flüssigkeit eingenommen wird. Da in diesem Raume, wenn von Schwere abgesehen wird, der Druck überall konstant ist, erhält man für die Trennungsfläche die Bedingung, daß auch auf ihr der Druck konstant und also wegen der Bernoullischen Gleichung auch die Geschwindigkeit konstant ist. Die Theorie liefert bei Einhaltung dieser Bedingung nur solche Lösungen, bei denen die Trennungsflächen ins Unendliche reichen und die Geschwindigkeit auf der Trennungsfläche gleich der Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit (d. h. gleich der Geschwindigkeit im Unendlichen) wird. Die Druckverteilung ist leicht zu übersehen: vor der Platte in der Mitte Staudruck, nach den Rändern zu bis auf den Druck der ungestörten Flüssigkeit abfallend; auf der Hinterseite konstanter Druck gleich dem der ungestörten Flüssigkeit. Dies gibt im

Fig. 940.



Kirchhoffsche Strömung an einer ebenen Platte.

[1]) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelles Journ. 70 (1869).

ganzen einen Widerstand proportional der Plattenfläche und proportional dem Staudruck, also konstantes $c \left(= \frac{2\pi}{4+\pi} = 0{,}880\right)$.

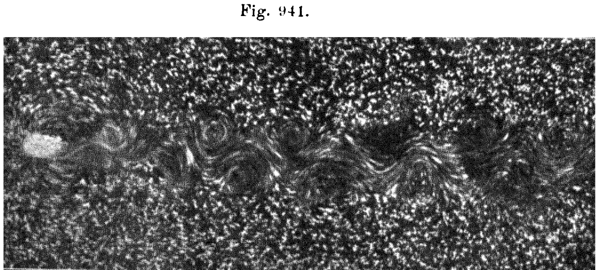
In Wirklichkeit sind, wie bereits mehrfach hervorgehoben, solche Trennungsflächen stark labil und zerfallen unter Bildung von großen und kleinen Wirbeln. Deshalb reicht das Totwasser in Wirklichkeit nicht ins Unendliche, und die Strömung schließt sich hinter der Platte bald wieder zusammen. Hiermit steht im Zusammenhang, daß der Druck hinter der Platte erheblich unter dem ungestörten Druck liegt, und infolge dieser „Saugwirkung" der Widerstand erheblich größer ist als nach der Kirchhoffschen Rechnung. In dem Fall der „unendlich breiten Platte" (Platte zwischen parallelen seitlichen Wänden) findet man etwa $c = 2{,}0$; bei einer rechtwinkligen Platte von endlichem Seitenverhältnis strömt über die Schmalseiten Flüssigkeit in den Saugraum nach und setzt dadurch den Unterdruck erheblich herab. Man erhält bei einem Seitenverhältnis

	1 : 20	1 : 10	1 : 4	1 : 1
$c =$	1,45	1,29	1,19	1,10

Die Kirchhoffsche Rechnung bezieht sich auf die unendlich lange Platte, stimmt also mit dem zugehörigen Versuchsergebnis sehr schlecht; gute Übereinstimmung mit der Rechnung ergibt dagegen der Fall, daß bei der Strömung von Wasser gegen eine Platte der Wasserstrom aufspaltet und der sich bildende Hohlraum mit Luft ausgefüllt wird (oder auch mit dem Dampf der Flüssigkeit, was bei sehr hohen Geschwindigkeiten vorkommt, sogenannte Kavitation). Da in diesem Falle die Trennungsfläche nicht oder nur unerheblich dem Zerfall ausgesetzt ist, sind die Bedingungen der Theorie gut erfüllt, und es dürfte daher auch der Widerstand dem gerechneten Wert entsprechen.

Bei solchen Strömungen um eine längliche Platte oder ein ähnliches Hindernis, bei denen eine Zerspaltung der Flüssigkeit von der oben erwähnten

Fig. 941.



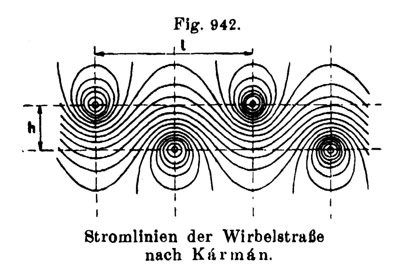
Wirbelstraße hinter einer schmalen Platte (ruhende Kamera).

Art nicht auftritt, kommt unter gewissen Bedingungen eine regelmäßig pendelnde Bewegung hinter dem Hindernis zustande, bei der abwechselnd links und rechts ein kräftiger Wirbel erzeugt wird; die Wirbel ordnen sich dabei zu einer mehr oder minder regelmäßigen Reihe an, vgl. Fig. 941. Solche Beob-

achtungen veranlaßten Th. v. Kármán [1]), die Stabilität von parallelen geraden Wirbelfäden in derartigen Anordnungen zu untersuchen. Es ergab sich für die meisten Anordnungen eine mehr oder minder große Labilität; nur eine einzige gemäß Fig. 942, bei der das Verhältnis des Abstandes h der beiden Wirbelreihen zu der Teilung $l = 0{,}283$ war, ergab Stabilität [2]).

Die tatsächlich beobachteten Wirbelreihen zeigen sehr nahe das angegebene Verhältnis h/l, falls die Wirbel einigermaßen ausgeprägte Kerne haben. (Wenn durch die Reibung die Form der Wirbel verschwommen wird, dann rücken sie weiter auseinander, wie aus Fig. 941 zu erkennen ist.)

Fig. 942.



Stromlinien der Wirbelstraße nach Kármán.

Der fortwährenden Neubildung von Wirbeln entspricht nach dem Energiesatz ein Widerstand, der im übrigen auch nach dem Impulssatz [3]) nachgewiesen werden kann (zwischen den Wirbeln strömt die Flüssigkeit dem Körper nach). v. Kármán hat diese Rechnung durchgeführt. Es ist ein schöner Erfolg der Theorie, daß aus einer photographischen Ausmessung des Wirbelsystems und einer Beobachtung über die Geschwindigkeit der Wirbel im Verhältnis zur Körpergeschwindigkeit die Widerstandszahl des wirbelerzeugenden Körpers in guter Übereinstimmung mit der aus Versuchen bestimmten Widerstandszahl gefunden wurde. Der Zusammenhang der Abmessungen des Wirbelsystems mit den Abmessungen des Körpers hat sich allerdings bisher noch nicht theoretisch fassen lassen.

§ 13. Experimentelle Feststellungen über den Flüssigkeitswiderstand.

Bei den Körpern mit einem größeren Flüssigkeitswiderstand ist, wie bereits erwähnt, die Ausbildung von Trennungsschichten maßgebend für das Zustandekommen des Widerstandes. Liegen, wie meist bei kantigen Körpern, die Ansatzstellen der Trennungsschichten, d. h. die Stellen, an denen sich die Strömung vom Körper ablöst, eindeutig fest, so findet man beim Versuch in ganz weitem Bereich konstante Widerstandszahlen. So ergaben z. B. Göttinger Versuche [4]) für senkrecht angeblasene ebene Kreisscheiben zwischen Reynoldsschen Zahlen $\mathfrak{R} = \frac{v\,r}{\nu}$ = rund 2000 bis 500000 keinen erkennbaren Gang in der Wider-

---

[1]) Kármán und Rubach, Physikal. Zeitschr. **13** 49, 1912.

[2]) Genauer gesagt, ist die Anordnung gegen alle kleinen Abweichungen der Anfangslage der Wirbelfäden stabil mit Ausnahme einer besonderen Störung, bei der die um die Entfernung l voneinander abstehenden Wirbel immer gerade entgegengesetzte Verschiebungen aufweisen. Gegen diese Störung ist Indifferenz vorhanden, d. h. solche Störungen können mit der Zeit gleichförmig weiterwachsen.

[3]) Die Berechnung nach dem Energiesatz würde eine Angabe über den Durchmesser der Wirbelkerne erfordern, die nach dem Impulssatz kommt ohne diese Angabe aus, daher ist nur diese hier brauchbar.

[4]) Vgl. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2. Lief., München 1923, S. 28 u. f.

standszahl, und es ist als sicher anzunehmen, daß auch noch bei weit größeren Reynoldsschen Zahlen keine Änderung in diesem Verhalten festgestellt werden würde. Bei kleineren Reynoldsschen Zahlen würde wohl, angefangen von etwa $\frac{v\,r}{\nu} = 500$, allmählich eine Vergrößerung der Widerstandsziffer durch die unmittelbare Reibungswirkung einsetzen, die allmählich zu dem Stokesschen Widerstandsgesetz überleiten muß, das für kreisförmige Platten

$$c = \frac{8{,}7}{\mathfrak{R}}$$

lautet und für Reynoldssche Zahlen unter 0,5 brauchbar ist. Versuche unter $\mathfrak{R} = 1000$ sind nicht bekannt, doch kann nach Analogie mit Kugeln etwa erwartet werden, daß bei

$$\mathfrak{R} = \quad 100 \quad 10 \quad 1$$

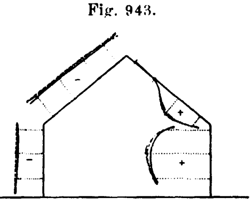
die Widerstandsziffer

$$c = \text{rd. } 1{,}4 \quad 2{,}8 \quad 10$$

gesetzt werden kann. Für $\mathfrak{R} > 1000$ ist $c = 1{,}10$ bis $1{,}12$.

Was für die Widerstandszahlen gilt, gilt auch für die Druckverteilungen. G. Eiffel[1]) hat die Druckverteilung an drei geometrisch ähnlichen Modellen eines Hauses gemessen, die eine Länge von 0,8, 5 und 40 cm besaßen. Die Ergebnisse stimmten dabei trotz der großen Verschiedenheit der Abmessungen sehr gut überein. Fig. 943 gibt diese Messungen wieder.

Fig. 943.



Winddruck auf ein Haus.

Wesentlich anders verhalten sich Körper von runden Formen, bei denen von vornherein keine bestimmte Stelle der Oberfläche für die Ablösung der Strömung bevorzugt in Betracht kommt. Die Lage der Ablösungsstelle wird hier durch die Vorgänge in der (meist dünnen) Reibungsschicht an der Oberfläche des Körpers bestimmt, vgl. § 6 und 7, und es sind deshalb oft scheinbar nebensächliche Umstände, wie z. B. eine leichte Rauhigkeit der Oberfläche oder kleinere oder größere Wirbligkeit der zuströmenden Flüssigkeit oder dergleichen, von recht merklichem Einfluß auf die Ablösungsstelle und damit auch auf die Größe und Lage des Wirbelgebildes und daher auch auf den Widerstand. Entscheidend ist aber, ob die Strömung in der Reibungsschicht bis zur Ablösungsstelle laminar verläuft oder vorher turbulent wird. Wie in § 7 bereits erwähnt wurde, rückt in dem letzteren Falle die Ablösungsstelle weit nach hinten, und der Widerstand verkleinert sich sehr erheblich. Diese Erscheinung wurde zuerst bei der Untersuchung des Widerstandes von Kugeln festgestellt[2]), dieser sinkt in der Gegend von $\frac{v\,r}{\nu} = 10^5$ von $c = 0{,}45$ bis $0{,}48$

[1]) G. Eiffel, Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, Paris 1914, S. 286 u. f.

[2]) G. Eiffel, Compt. rend. **155**, 1597, 1912; L. Prandtl, Göttinger Nachr., Math.-Physikal. Kl. 1914, S. 177, dort weitere Literatur; siehe auch C. Wieselsberger, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. **5**, 140, 1914.

auf Werte herunter, die bei besonders reinen Versuchsbedingungen noch unter 0,10 liegen; bei größerer Reynoldsscher Zahl — etwa $= 10^6$ — geht c wieder auf etwa 0,18 herauf (bei rauher Oberfläche wesentlich höher). Das kritische Gebiet von Reynoldsschen Zahlen verschiebt sich durch Wirbligkeit des Versuchsluftstroms nach kleineren Werten. Daß tatsächlich das Turbulentwerden der Reibungsschicht an der Widerstandsverkleinerung schuld ist, geht aus folgendem Versuch deutlich hervor: Legt man um eine große Kugel etwas vor der Stelle, wo bei laminarer Strömung die Ablösung stattfinden würde, einen dünnen Drahtreif (z. B. von einer Drahtstärke gleich $^1/_{300}$ des Kugeldurchmessers) auf und macht dadurch die Reibungsschicht wirblig, so wird auch unter $\mathfrak{R} = 10^5$ der kleinere Widerstand beobachtet. Gleichzeitig erweist sich die Ablösungsstelle, die sonst etwa bei 80° vom vordersten Punkt liegen würde, auf etwa 110 bis 120° verschoben.

Der Widerstand von Kugeln ist von sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl bis zu $\mathfrak{R} = \frac{v\,r}{\nu} = 1{,}8 \cdot 10^6$ untersucht[1]). Für $\mathfrak{R}$ kleiner als 0,2 gilt genügend genau das Stokessche Gesetz, das in unserer Ausdrucksart

$$c = 12/\mathfrak{R}$$

lautet. Für

$\frac{v\,r}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
ist c etwa $=$	120	14	2,6	0,75	0,42	0,45	0,44	0,18

Ganz ähnlich verhalten sich Kreiszylinder. Bei sehr langen Zylindern ($l \geqq 100$ Durchmesser) oder bei Zylindern, die an beiden Enden von parallelen Wänden begrenzt sind, gilt etwa[2]) für

$\frac{v\,r}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$c =$	34	6,5	2,0	1,30	0,92	1,20	1,15	0,35

Der Übergang von den großen Widerstandswerten zu den kleinen liegt zwischen $\frac{v\,r}{\nu} = 0{,}9 \cdot 10^5$ und $2{,}5 \cdot 10^5$. Der Widerstand fällt von $c = 1{,}2$ auf $c = 0{,}3$. Bei kleinem $\mathfrak{R}$ gilt hier statt der Stokesschen Formel eine verwickeltere von Lamb[3]):

$$c = \frac{4\pi}{\mathfrak{R}\,(1{,}309 - \ln \mathfrak{R})}.$$

Der Verlauf der c-Werte für Kreisplatte, Kugel und Zylinder ist in Fig. 944 wiedergegeben.

Bei endlich langen Zylindern erhält man wieder wesentlich kleinere Widerstände als bei den unendlich langen; die Ursache ist, wie bei den endlich

---

[1]) Von $\mathfrak{R} = 0{,}1$ bis $4 \cdot 10^2$: Allen, Phil. Mag. (5) **50**, 323; von $\mathfrak{R} = 4 \cdot 10^2$ bis $4 \cdot 10^5$: Ergebnisse der Aerodyn. Vers. Anstalt, Göttingen, 2. Lief., S. 28; von 10^5 bis $1{,}8 \cdot 10^6$: Bacon und Reid, 9. Report des National Advisory Comm. f. Aeronautics 1923, Washington 1924.

[2]) Göttinger Ergebnisse, 2. Lief., S. 28 und Relf, Technical Report of the Advisory Comm. f. Aeronautics 1913/14, London 1914, S. 47.

[3]) Phil. Mag. (5) **21**, 120, 1911.

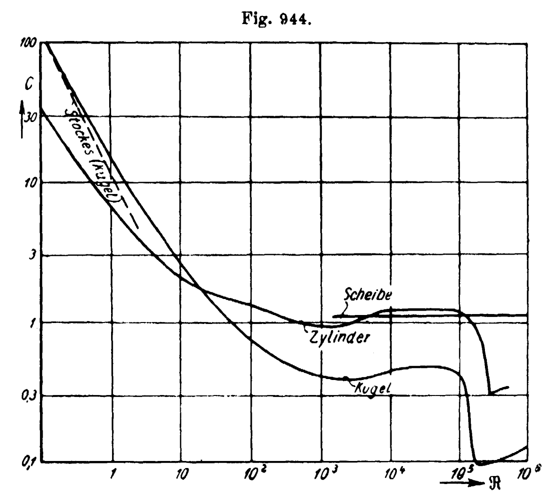
langen Platten, darin zu suchen, daß das Wirbelgebiet hinter dem Zylinder über die Zylinderenden belüftet wird und sich dort so ein kleinerer Unterdruck einstellt als bei fehlender Belüftung. Nach Göttinger Messungen ist für $l/r = 10$ bei

$$\frac{v\,r}{\nu} = 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6$$

$$c = 0{,}85\,^{1)} \quad 0{,}68 \quad 0{,}74 \quad 0{,}75 \quad 0{,}35\,^{1)}$$

In der Technik der Luftfahrzeuge hat die Aufgabe eine besondere Bedeutung erlangt, Körper von kleinstem Luftwiderstand zu finden. Wir

Fig. 944.



Widerstandszahl von Kugel, Zylinder und Scheibe, abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

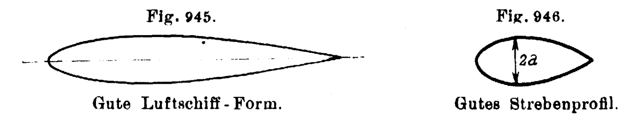
wissen, daß in der reibungslosen Flüssigkeit die Strömung, bei der sich die Flüssigkeit hinter dem Körper ebenso wieder schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hat, den Widerstand Null ergibt, gleichgültig, welche Form der Körper hat, da eben keine Störung in der Flüssigkeit zurückbleibt. Die genannte Aufgabe kann deshalb auch so formuliert werden: Wie muß ein Körper gestaltet werden, damit in der wirklichen Flüssigkeit jede Ablösung der Strömung an ihm unterbleibt. Wenn dies erreicht wird, dann ist dem Vorstehenden gemäß zu erwarten, daß der Widerstand eines solchen Körpers nur noch aus Reibungswiderstand besteht. Das ist nach den Versuchen in der Tat der Fall. Die Körperformen, für die ein Anliegen der Strömung erreicht wird, sind alle einigermaßen schlank und wohlgerundet und laufen nach hinten in eine Spitze oder Schneide aus, die allerdings auch etwas abgerundet sein darf. Vorn, wo ja keine Wirbelablösung zu befürchten ist,

[1]) Extrapoliert.

ist eine Zuspitzung nicht nötig, eine Form nach Art eines verlängerten Ellipsoids genügt völlig. (Anders liegt die Sache bei an der Wasseroberfläche fahrenden Schiffen, die einen schneidenartigen Bug haben müssen, damit nicht ein hoher Wellenberg vor dem Schiff entsteht.) Die Fig. 945 (Luftschiffkörper) und Fig. 946 (Strebenprofil) geben Beispiele von solchen Körpern.

Für den Rotationskörper nach Fig. 945 ergibt sich nach den Versuchen $c = 0{,}04$, der Widerstand ist also nur der 28. Teil desjenigen einer Kreis-

Fig. 945. Fig. 946.

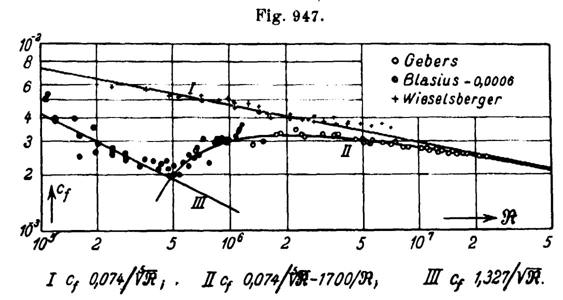


Gute Luftschiff-Form. Gutes Strebenprofil.

scheibe mit gleichem Durchmesser. Für einen quer zur Achse angeströmten Stab vom Querschnitt Fig. 946 liefert der Versuch etwa $c = 0{,}08$, wenn die Reynoldssche Zahl $v r/\nu$ über etwa 30 000 liegt.

Für den Reibungswiderstand mögen hier folgende Angaben genügen (vgl. auch § 5). Man pflegt ihn auf die gesamte reibende Oberfläche O zu beziehen; bei einer beiderseits beströmten rechteckigen Platte von der Breite b und der Länge l ist also $O = 2\,b\,l$; der Widerstand kann im allgemeinen der Breite senkrecht zur Bewegungsrichtung unmittelbar proportional gesetzt werden, die Breite ist also in O schon richtig enthalten, kommt daher in der Reibungswiderstandszahl c_f nicht mehr vor; die Länge l (in der Bewegungsrichtung) verhält sich dadurch anders, daß die hinteren Teile in dem durch die vorderen Teile schon teilweise gebremsten Strome stehen, so daß bei Ver-

Fig. 947.



Reibungswiderstand von ebenen Platten, abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

dopplung der Länge der Widerstand nicht ganz verdoppelt wird. Bei laminarer Strömung in der Reibungsschicht ist er proportional $\sqrt{l}$, bei turbulenter für genügend große Reynoldssche Zahlen bei glatter Oberfläche proportional $l^{0,8}$ bis $l^{0,85}$, bei rauher Oberfläche proportional $l^{0,65}$ bis $l^{0,75}$. Führt man die mit l zusammenhängende Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \frac{v\,l}{\nu}$ ein, so ergibt sich für glatte Oberflächen bei laminarer Strömung

$$c_f = 1{,}327/\sqrt{\mathfrak{R}};$$

bei turbulenter Strömung ist, wenn die Turbulenz gleich vorn beginnt, etwa

$$c_f = 0{,}074/\mathfrak{R}^{0,2}.$$

Wenn ein laminares Anfangsstück vorhanden ist und erst weiter hinten die Turbulenz einsetzt, so kann, entsprechend einer kritischen Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = 500\,000$,

$$c_f = 0{,}074/\mathfrak{R}^{0,2} - 1700/\mathfrak{R}$$

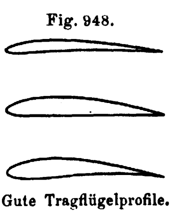
gesetzt werden. Fig. 947 stellt den Verlauf der drei Gesetze in logarithmischem Maßstab dar und zeigt ihre Übereinstimmung mit Versuchsresultaten.

Bei rauhen Oberflächen ist c_f von der Geschwindigkeit, also von der Reynoldsschen Zahl wenig oder gar nicht abhängig; Zahlenangaben mögen hier unterbleiben, da es schwierig ist, die Art der einzelnen rauhen Oberflächen genügend zu charakterisieren; vgl. indes die Ausführungen am Ende von § 5.

§ 14. Tragflügel. Bei der Behandlung der Widerstandsfragen sind hier bisher nur solche Fälle behandelt worden, wo vermöge einer vorhandenen Symmetrie die Widerstandskraft in die Bewegungsrichtung fällt. Im allgemeinen ergibt sich aber eine Kraft in irgend einer allgemeinen Richtung, gegebenenfalls zuzüglich irgend eines ebenfalls allgemein orientierten Drehmoments. Beispiele, in denen eine seitliche Kraft oder ein Drehmoment als gewollte Wirkung vorkommen, sind der Flugzeugtragflügel und das Rad einer Windmühle. In beiden Fällen kommt zu der gewollten Wirkung noch ein Widerstand in der Bewegungsrichtung hinzu.

Bei den Tragflügeln liegt die Aufgabe, wie leicht zu sehen ist, so, daß möglichst viel „Auftrieb“ mit einem Minimum von Widerstand erreicht werden soll. Ebene Platten, die um einen kleinen Winkel („Anstellwinkel“) gegen die Bewegungsrichtung geneigt sind, sind nicht ganz ungeeignet für diese Aufgabe. Besser sind aber, wie O. Lilienthal[1]) nachwies, flach gewölbte Platten. Statt der dünnen Platten können vorteilhafterweise auch ziemlich dicke „Profile“ genommen werden, die man sich so entstanden denken kann, daß man um eine flach gewölbte Mittellinie ein Fischprofil nach Fig. 945 herumlegt. Daß auch recht beträchtlich dicke Profile noch sehr brauchbar sind, hat zuerst um 1917 Junkers durch Konstruktion seiner Metallflugzeuge erwiesen, deren Flügel vollständig durch Versteifungen getragen werden, die im Flügelinnern liegen. Einige heute gebräuchliche Flügelprofile sind in Fig. 948 wiedergegeben, sie haben mit den Profilen der Flügel von gut fliegenden Vögeln große Ähnlichkeit.

Fig. 948.



Gute Tragflügelprofile.

Um zahlenmäßige Angaben über die Eigenschaften von Tragflügeln zu machen, kann man die resultierende Luftkraft in zwei Komponenten zerlegen, entweder nach im Flügel festen Richtungen (Normalkraft N und Tangentialkraft T senkrecht und parallel zur „Flügelsehne“ oder einer anderen passend

[1]) Vgl. O. Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegerkunst, 2. Aufl., München 1910, S. 73 u. f.

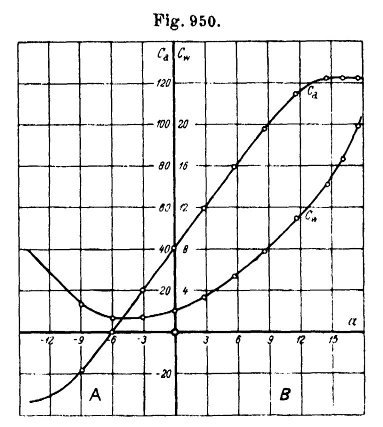
gewählten Richtung) oder nach der Richtung der Bewegung und senkrecht dazu (Auftrieb A und Widerstand W). Die dimensionslosen Widerstandszahlen werden hier zweckmäßig in der Weise gebildet, daß man sie nicht auf die veränderliche Projektionsfläche in der Bewegungsrichtung bezieht, sondern auf die „größte Projektionsfläche" des Flügels, also bei rechteckigen Flügeln einfach $F = b \cdot t$, mit b = Breite (Spannweite) und t = Tiefe (Ausdehnung in der Flugrichtung). Ist wieder $p_d = \frac{\varrho v^2}{2}$ der Staudruck, so wird gemäß der in der deutschen Aerodynamik üblichen Bezeichnung geschrieben:

$$\left.\begin{array}{ll} A = c_a F p_d, & W = c_w F p_d \\ \text{bzw.} \quad N = c_n F p_d, & T = c_t F p_d \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ist α der Winkel zwischen der Profilsehne und der Bewegungsrichtung (vgl. Fig. 949), so gelten für A und W einerseits und für N und T andererseits die bekannten Formeln für die Transformation von einem Koordinatensystem auf ein anderes um den Winkel α verdrehtes Koordinatensystem.

Fig. 949.

Fig. 950.



Auftrieb und Widerstand eines Tragflügels, abhängig vom Anstellwinkel.

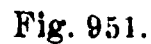
Durch Division mit $F p_d$ erhält man hieraus die entsprechenden Formeln für c_a und c_w einerseits und c_n und c_t andererseits. Diese lauten:

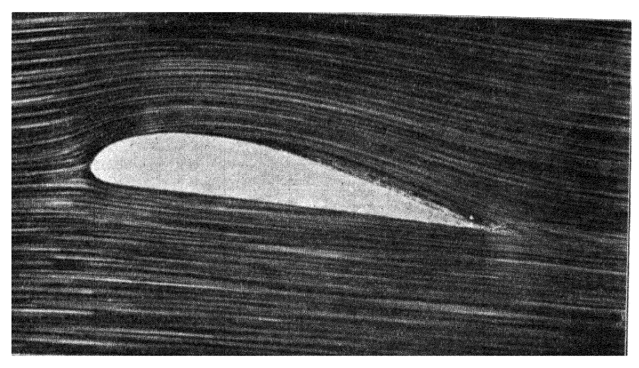
$$\left.\begin{array}{l} c_n = c_a \cos\alpha + c_w \sin\alpha \\ c_t = -c_a \sin\alpha + c_w \cos\alpha \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Strömungsformen sind je nach der Größe des „Anstellwinkels" α verschieden, daher sind auch c_a und c_w [und vermöge Gl. (2) auch c_n und c_t] als Funktionen von α zu betrachten. Fig. 950 stellt den typischen Verlauf dieser Funktionen für das erste der in Fig. 948 wiedergegebenen Profile dar (und zwar für ein Seitenverhältnis 1 : 5 des rechteckigen Flügels). Der Winkelbereich von A bis B entspricht der „gesunden Strömung", d. h. einer Strömung, die überall an dem Flügel anliegt; in den Bereichen jenseits A und B ist die Strömung auf der unteren bzw. oberen Seite des Flügels „ab-

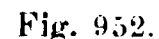
gerissen“ und der Zwischenraum mit Wirbeln erfüllt, vgl. die Strömungsaufnahmen, Fig. 951 (gesunde Strömung) und Fig. 952 (oben abgerissene Strömung).

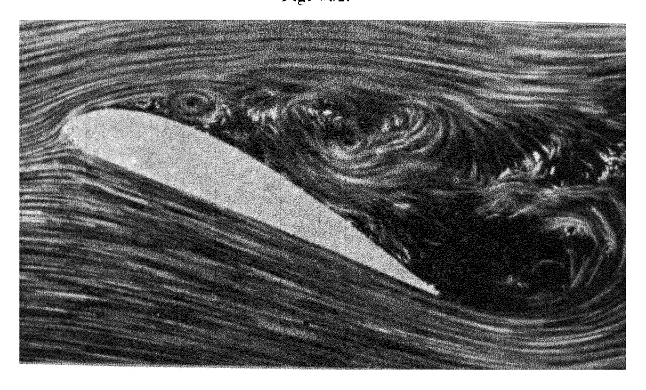
Eine andere viel verwendete Darstellung des Inhalts von Fig. 950 ergibt sich durch Auftragung von A senkrecht zu dem zugehörigen W oder auch


Fig. 951.



Gesunde Flügelströmung.


Fig. 952.

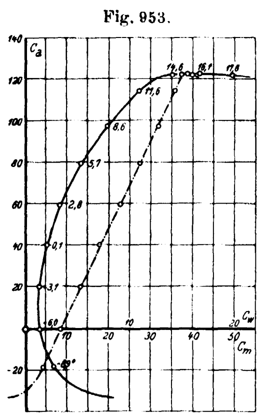


Abgerissene Flügelströmung.

von c_a senkrecht zu dem zugehörigen c_w; da A und W rechtwinklige Komponenten der resultierenden Luftkraft sind, stellt der Vektor vom Ursprung O nach einem Punkt der A-W-Kurve die resultierende Kraft nach Größe und Richtung dar. Für die c_a-c_w-Kurve gilt ganz Entsprechendes. Man nennt beide Kurven, da eine resultierende Kraft von einem Pol O aus aufgetragen ist, auch „Polarkurve“. Diese anscheinend zuerst von O. Lilienthal an-

gewandte Darstellung wurde von G. **Eiffel** dadurch verbessert, daß der meist sehr kleine Widerstand bzw. die Widerstandszahl in einem fünfmal größeren Maßstab aufgetragen wird als der Auftrieb bzw. die Auftriebszahl. Diese Auftragungsart hat sich sehr stark eingebürgert, da sie für die Verwendung in der Flugtechnik sehr bequem ist (vgl. § 20). Wenn an die einzelnen Punkte der Polarkurve die zugehörigen Anstellwinkel als Bezifferung angeschrieben werden, so enthält die Darstellung alle Angaben der zwei Kurven von Fig. 950 (vgl. Fig. 953, ausgezogene Kurve).

Fig. 953.



Polarkurve (ausgezogen) und Momentenkurve (strichpunktiert). Die Zahlen sind das Hundertfache von c_a, c_w und c_m.

Eine weitere wichtige Angabe für die strömungstechnischen Eigenschaften eines Flügels ist die **Lage** der resultierenden Kraft zum Flügel für jeden Anstellwinkel, die durch die Entfernung des Schnittpunkts der resultierenden Kraft mit der Profilsehne $\overline{OQ}$ von dem Bezugspunkt O, also s in Fig. 949, gegeben werden kann. Da jedoch s für $N = 0$ in der Regel unendlich wird, liefert s in seiner Abhängigkeit von α (die „Druckpunktwanderung") eine zeichnerisch und auch für Interpolationszwecke unbequeme Darstellung; besser ist es, das Drehmoment M der resultierenden Kraft für den Bezugspunkt O anzugeben, das einen sehr stetigen Verlauf zeigt. Es ist, wie leicht zu sehen, $M = Ns$, woraus bei gegebenem M und N s ermittelt werden kann. Um M durch eine dimensionslose Größe ausdrücken zu können, muß noch eine Länge eingeführt werden. Als solche bietet sich die Profiltiefe $\overline{OQ} = t$ dar. Damit wird

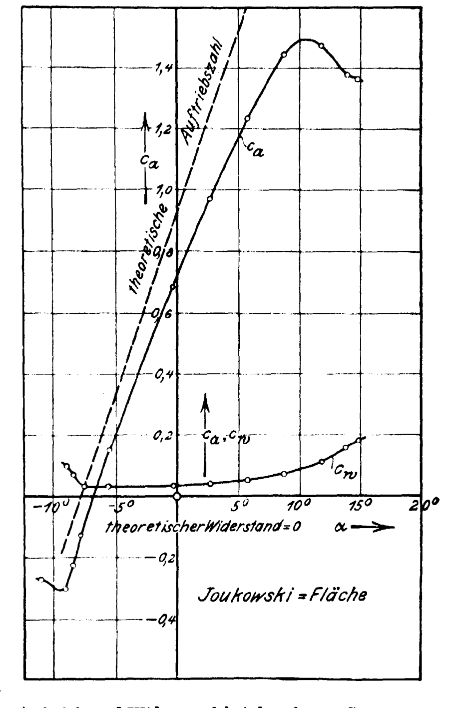
$$M = c_m F p_d t.$$

c_m heißt Momentenzahl. In Fig. 953 ist durch die gestrichelte Kurve c_m (wagerecht) abhängig von c_a (senkrecht) wiedergegeben. Diese Darstellung empfiehlt sich dadurch, daß c_a in dem flugtechnisch vor allem in Frage kommenden Gebiet der gesunden Strömung mit wachsendem Anstellwinkel ziemlich gleichmäßig wächst. Ein anderer Grund, warum die Wahl von c_a als unabhängige Veränderliche zweckmäßig ist, wird sich aus dem Folgenden ergeben (§ 15).

Die Eigenschaften der Tragflügel wie auch die der ebenen Platten erweisen sich als stark von dem Seitenverhältnis $t : b$ abhängig, in dem Sinne, daß der zu einem bestimmten Wert von c_a gehörige Wert von c_w um so kleiner ist, je kleiner $t : b$, d. h. je länglicher der Flügel ist. Ähnliches gilt auch für die zugehörigen Anstellwinkel. Soweit es sich um die gesunde Strömung handelt, können theoretische Betrachtungen über die reibungslose Strömung um Tragflügel zur Aufklärung dieser Dinge herangezogen werden; der Reibungswiderstand und etwaiger Druckwiderstand durch Ablösung der Strömung bleiben dabei natürlich unberücksichtigt, was beim Vergleich von Ergebnissen der Theorie mit solchen der Versuche immer zu berücksichtigen ist.

Der einfachste Fall betrifft den Flügel von unendlicher Spannweite bzw. den Flügel zwischen parallelen dicht anschließenden Wänden, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt. Die stationäre Strömung der reibungslosen Flüssigkeit für diesen Fall ist eine Potentialströmung mit Zirkulation, vgl. voriges Kapitel, § 10. Wie gut diese von W. M. Kutta[1]) und N. Joukowski[2]) entwickelte Theorie mit dem Versuch stimmt, mag aus Fig. 954[3]) entnommen werden, die Auftrieb und Widerstand eines Flügels zwischen Wänden im Vergleich mit der Theorie nach Versuchen von A. Betz[4]) abhängig vom Anstellwinkel darstellt. Das zugehörige Flügelprofil („Joukowskiprofil") ist das unterste von Fig. 948.

Fig. 954.



Auftrieb und Widerstand bei der ebenen Strömung.

Der Widerstand ist theoretisch gleich Null, der praktische Widerstand besteht in der Hauptsache aus Reibungswiderstand, der praktische Auftrieb ist etwas kleiner als der theoretische, was ebenfalls auf Reibungseinflüsse zurückzuführen ist (Verkleinerung der Zirkulation durch die auf der Saugseite etwas breitere Reibungsschicht, die ebenso wirkt wie eine geringe Gestaltänderung des Profils). Die theoretisch gerechnete und die praktisch gemessene Druckverteilung an einem solchen Flügel für einen mittleren Anstellwinkel ist in Fig. 954a wiedergegeben.

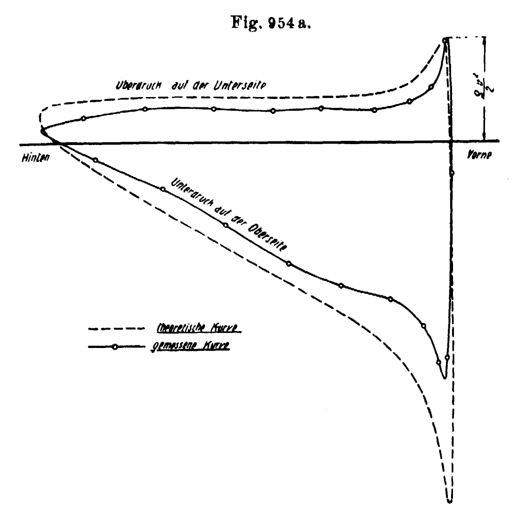
Die Berechnungsmethoden für diese Potentialströmung mit Zirkulation sind durch Arbeiten von v. Mises[5]), Geckeler[6]), Wilh. Müller[7]), Höhndorf[8]) u. a. so ausgebildet, daß man die Rechnung für jedes

[1]) Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. M.-Ph. Kl. 1910 u. 1911. — [2]) Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 1, 281, 1910; vgl. auch Joukowski, Aerodynamique, Paris 1916. — [3]) Die Figuren 954 bis 954a, 960, 961, 963 bis 964 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer (Berlin) dem Werke Kármán-Levi-Civita: „Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik" entnommen. — [4]) Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 6, 173, 1915. — [5]) Ebenda 8, 157, 1917 u. 11, 68 u. 87, 1920. — [6]) Ebenda 13, 137, 176, 191, 1922. — [7]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 3—6, 1923—1926. — [8]) Ebenda 6, 265, 1926.

praktisch vorkommende Profil mit der erforderlichen Genauigkeit durchführen kann.

Bei endlicher Spannweite des Tragflügels bildet sich an der Hinterkante eine Trennungsfläche aus, wie sie in § 6 des vorigen Kapitels im Anschluß an Fig. 861 beschrieben ist. Durch das dort geschilderte Einrollen der Trennungsfläche entstehen zwei Wirbel, die sich in der ganzen Länge der Flugbahn

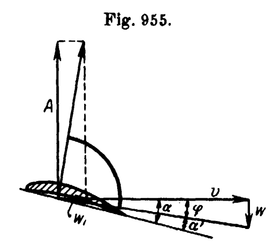
Fig. 954 a.



Druckverteilung nach Theorie und Messung.

nach hinten erstrecken. Da in jedem Zeitabschnitt ein Stück dieser Wirbel neu gebildet werden muß, ist nach dem Energiesatz leicht einzusehen, daß hierfür dauernd Arbeit geleistet werden muß; diese Arbeit kann nur in der Überwindung eines Widerstandes bestehen. Es ergibt sich also die Tatsache, daß der endliche Tragflügel auch in der reibungslosen Flüssigkeit einen Widerstand erfährt. Eine angenäherte Berechnung dieses Widerstandes ist in der im folgenden dargelegten Weise möglich.

Fig. 955.



Aus § 10 des vorigen Kapitels wissen wir, daß in der reibungslosen Flüssigkeit der Auftrieb immer senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit v steht. Beim endlichen Tragflügel weicht die Flüssigkeit auf der Druckseite nach außen aus und strömt über die Flügelspitzen zur Saugseite. Diese Bewegung kann als ein Nachgeben der Flüssigkeit unter dem Druck des Flügels gedeutet werden, ihr entspricht auch eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung dieser Druckkraft; die resultierende Strömung am Flügel setzt sich daher

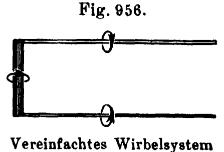
aus der ungestörten Geschwindigkeit v und der durch den Flügel selbst hervorgerufenen Geschwindigkeit w ($\perp v$) zusammen und hat daher die Neigung $tg\,\varphi = w/v$ (vgl. Fig. 955). Die resultierende Luftkraft steht senkrecht zu dieser Richtung und hat daher zwei Komponenten, den Auftrieb A und den Widerstand $W = A\,tg\,\varphi = A\frac{w}{v}$. Die Aufgabe der Tragflügeltheorie besteht nun darin, die vom Tragflügel „induzierte" Geschwindigkeit w zu ermitteln.

§ 15. Tragflügeltheorie[1]. Die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit w gelingt unter der vereinfachenden Annahme, daß der Auftrieb A so klein ist, daß alle Ablenkungen der Strömung nur klein sind und daß es daher genügt, bei allen Größen nur die jeweils niedrigste Ordnung zu berücksichtigen, während alle Beiträge, die von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt werden. Diese Annahme schließt z. B. ein, daß man bei den Winkeln, die die relativen Stromlinien mit der Bewegungsrichtung bilden, Sinus, Tangens und Bogen verwechseln und den Kosinus = 1 setzen darf.

Das Feld der von einem Tragflügel induzierten Geschwindigkeiten läßt sich nun aus dem Wirbelsystem berechnen, das man für den Tragflügel und seine Trennungsfläche substituieren kann. Auftrieb ist immer mit Zirkulation verknüpft, und zwar ist nach dem Kutta-Joukowskischen Satz, der auch hier gilt, der Auftrieb pro Längeneinheit $= \varrho \Gamma v$ (Γ = Zirkulation, vgl. § 10 und § 13, a des vorigen Kapitels). Der Flügel wirkt deshalb auf die Flüssigkeitsteile, die weiter von ihm entfernt sind, wie ein Wirbellinienstück von der Wirbelstärke (Zirkulation) Γ. Da im übrigen für einen solchen Wirbel, der in Wirklichkeit ein Flügel ist, der Helmholtzsche Satz, daß der Wirbel immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht, nicht gilt, spricht man hier von einem „tragenden Wirbel", im Gegensatz zu den „freien Wirbeln", die dem Helmholtzschen Satz unterworfen sind.

Das einfachste Wirbelschema eines endlichen Tragflügels besteht nun aus einem tragenden Wirbel von der Stärke Γ mit zwei von den Flügelspitzen nach hinten parallel ins Unendliche laufenden freien Wirbeln von der gleichen Stärke, vgl. Fig. 956. (Der Satz, daß ein Wirbelfaden nirgends endigen kann und auf seiner ganzen Erstreckung die gleiche Stärke haben muß, ist rein kinematischer Natur und gilt deshalb für ein aus freien und tragenden Wirbeln zusammengesetztes Gebilde ebenso wie für freie Wirbel.) In Wirklichkeit pflegt die Auftriebsintensität nach den Flügelspitzen zu abzunehmen. Dies läßt sich in dem Wirbelbild durch Überlagerung sehr vieler Wirbelgebilde mit infinitesimaler Stärke nach Fig. 956 erreichen, von denen jedes eine andere Spannweite hat

Fig. 956.

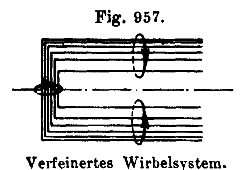


Vereinfachtes Wirbelsystem eines Tragflügels.

[1]) Vgl. Prandtl, Götting. Nachr. 1918, S. 451 u. 1919, S. 107, auch Kármán-Levi-Civita, Hydrodyn. Vorträge (Innsbruck 1921), Berlin 1923, Vorträge von Trefftz und Wieselsberger.

als die übrigen (vgl. Fig. 957). Wenn man so verfährt, so erhält man eine Näherungsdarstellung der früher besprochenen Trennungsfläche, bei der aber bewußt darauf verzichtet wird, die Umgestaltung, die die Trennungsfläche mit wachsendem Abstand vom Flügel erfährt, zu berücksichtigen. Je kleiner der Auftrieb ist, desto langsamer geht diese Umgestaltung vor sich, so daß man im Grenzfall sehr kleinen Auftriebs in der Tat diese Umgestaltung ganz vernachlässigen kann, wenn es gilt, das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe des Flügels zu berechnen.

Fig. 957.



Verfeinertes Wirbelsystem.

Für die hier vorliegende Aufgabe braucht man nur die Geschwindigkeit parallel zur Auftriebskraft am Orte des Tragflügels zu berechnen. Unter Zugrundelegung eines Wirbelsystems nach Fig. 956 ergibt sich für die Mitte des Tragflügels das Folgende. Ein nach vorn und hinten unendlicher gerader Wirbel von der Stärke Γ gibt im Abstand a eine Geschwindigkeit $w = \Gamma/2\pi a$, vgl. § 11 des vorigen Kapitels. Ein von der „Querebene" durch den Flügel nur nach hinten sich erstreckender Wirbel gibt aus Symmetriegründen in der Querebene gerade die Hälfte des obigen Betrags, also $\Gamma/4\pi a$. Ist b die Spannweite des Tragflügels, so ist für die Mitte des Tragflügels $a = b/2$, und es kommen zwei Beträge von dem rechten und linken Wirbel zusammen, so daß also $w_0 = 2 \cdot \frac{\Gamma}{4\pi b/2} = \frac{\Gamma}{\pi b}$ wird. Mit $\Gamma = \frac{A}{\varrho b v}$ nach dem Kutta-Joukowskischen Satz wird $w_0 = \frac{A}{\pi \varrho v b^2}$. Neben der Mitte ergeben sich größere Geschwindigkeiten, wie leicht nachzurechnen ist, und in der Nähe der Flügelenden gehen sie gegen Unendlich. Das heißt nur, daß die Annahme eines bis zum Flügelende konstanten Auftriebs unzulässig ist. Die genauere, an Fig. 957 anknüpfende Theorie zeigt, daß man ein über die ganze Spannweite konstantes w erhält, wenn man den Auftrieb nach einer halben Ellipse (vgl. Fig. 958) über die Spannweite verteilt. Da hier die Zirkulation in der Mitte $4/\pi$-mal größer ist als der Mittelwert und im übrigen die einzelnen Wirbelfäden durchschnittlich näher zur Mitte liegen, wird w größer als w_0, und zwar ergibt sich gerade

Fig. 958.

Elliptische Auftriebsverteilung.

$$w = 2 w_0 = \frac{2A}{\pi \varrho v b^2} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Damit wird

$$tg\,\varphi = \frac{w}{v} = \frac{2A}{\pi \varrho v^2 b^2} = \frac{A}{\pi p_d b^2} \quad \ldots \quad (2)$$

Da w, wie erwähnt, bei elliptischer Auftriebsverteilung über die ganze Spannweite konstant ist, ist es auch $tg\,\varphi$. Es ist also die Beziehung von § 14

$$tg\,\varphi = \frac{W}{A}$$

unmittelbar übertragbar, und es ist daher

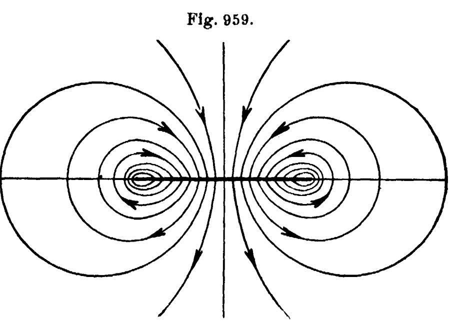
$$W = \frac{A^2}{\pi p_d b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Dieser Widerstand eines Tragflügels in der reibungslosen Flüssigkeit heißt „induzierter Widerstand“ (der Name kommt von der Ähnlichkeit der Beziehungen zwischen den Wirbelfäden und den Geschwindigkeiten mit den zwischen elektrischen Leitern und ihrem Magnetfeld). Eine nähere Untersuchung hat ergeben, daß der Widerstand nach Formel (3) das Minimum des induzierten Widerstandes darstellt, das bei irgend einer Verteilung des Auftriebs A in der Spannweite b erreicht werden kann; die Minimumseigenschaft hängt dabei ursächlich mit der Konstanz der induzierten Geschwindigkeit über die Spannweite zusammen. Da übrigens eine Größe in der Nähe des Minimums sich meist nur wenig zu ändern pflegt, ist Formel (3) auch für andere Auftriebsverteilungen, wenn sie nicht allzusehr von der elliptischen abweichen, als Näherungsformel zu brauchen. Für rechteckige Flügel von nicht allzu großem Seitenverhältnis ist dies z. B. der Fall.

Formel (3) zeigt, daß der mit der Erzeugung eines bestimmten Auftriebs verbundene induzierte Widerstand um so kleiner ist, auf eine je größere Spannweite der Auftrieb verteilt wird. Daß alle Flugzeuge verhältnismäßig große Spannweiten bei geringen Tiefen aufweisen, hat hierin seinen Grund. Die Tiefe des Tragflügels in der Flugrichtung kommt in Formel (3) nicht vor, was so zu verstehen ist, daß es nur darauf ankommt, welcher Strömungszustand hinter dem Flügel zurückbleibt, nicht aber, ob dieser Zustand durch große Druckunterschiede in einer wenig tiefen Zone oder durch sanfte Drucke in einer etwas tieferen Zone erzeugt worden ist.

Die Betrachtung der hinter dem Tragflügel zurückbleibenden Störung führt zu einer anderen anschaulichen Darstellung der hier obwaltenden Beziehungen. Statt daß in rascher Aufeinanderfolge eine Stelle der Bahn des Flügels nach der anderen durch diesen Drucke erfährt, kann man sich denken, daß alle Stellen der durchlaufenen Bahn gleichzeitig eine kurze Zeit lang solche Drucke erfahren. Die so entstehende Bewegung ist eine ebene Potentialbewegung (vgl. § 9, c des vorigen Kapitels); die Fläche, auf der die Drucke ausgeübt worden sind, ist dabei zu einer Trennungsfläche geworden. Fig. 959 [1]) stellt eine solche Strömung dar. Man kann die „Stoßdrucke“ $\int_0^{t_1} p\,dt$ einerseits mit dem Strömungspotential, andererseits mit der Auftriebsverteilung in Verbindung bringen und so Formeln gewinnen, die den früher erwähnten

Fig. 959.



Strömung hinter dem Tragflügel.

[1]) Nach Jahrbuch der wiss. Gesellschaft für Luftschiffahrt 1920 mit freundl. Erlaubnis der Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin.

gleichwertig sind. Hier soll lediglich eine vereinfachte Impuls- und Energiebetrachtung Platz finden, in der angenommen wird, daß sich nach dem Vorübergang des Tragflügels eine Flüssigkeitsmenge vom Querschnitt F_1 mit der Geschwindigkeit w_1 in der Richtung der auf die Flüssigkeit ausgeübten Kraft bewege, die übrige Flüssigkeit aber in Ruhe bleibe. (In Wirklichkeit hat man es mit einer Geschwindigkeitsverteilung zu tun, in der die Geschwindigkeiten in der Nähe der Bahn des Tragflügels von der Größenordnung w_1 sind und nach außen asymptotisch gegen Null abnehmen.) Die sekundlich neu in Bewegung gesetzte Masse ist gemäß unserer Annahme $m = \varrho F_1 v$. Der Impuls in der Richtung von w_1, der der Wirkung des Auftriebs A in einer Sekunde äquivalent ist, ist also $m w_1 = \varrho F_1 v w_1$, die erzeugte kinetische Energie ist $m \frac{w_1^2}{2} = \varrho F_1 v \frac{w_1^2}{2}$. Diese muß gleich der sekundlichen Arbeitsleistung des induzierten Widerstandes am Tragflügel sein, also

$$\varrho F_1 v \frac{w_1^2}{2} = W v;$$

nimmt man

$$\varrho F_1 v w_1 = A$$

hinzu, so kann w_1 eliminiert werden, und man erhält

$$W = \frac{A^2}{2 \varrho v^2 F_1} = \frac{A^2}{4 p_d F_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der Vergleich von Gl. (3) und (4) zeigt, daß beim Eindecker mit elliptischer Auftriebsverteilung die Hilfsfläche $F_1 = \frac{\pi}{4} b^2$ gesetzt werden muß, also gleich der Fläche des Kreises ist, der über der Spannweite als Durchmesser beschrieben werden kann. Die Formel (4) gilt übrigens, kleinen Auftrieb vorausgesetzt, ganz allgemein für jedes geradlinig bewegte Flügelsystem. Es muß nur jedesmal die Fläche F_1 besonders ermittelt werden.

Bei einem Doppeldecker steht jeder Flügel außer seiner Wirkung auf sich selbst auch unter derjenigen des anderen Flügels (Selbstinduktion und gegenseitige Induktion); unter der Annahme kleinen Auftriebs überlagern sich die Einzelwirkungen additiv, und der induzierte Widerstand besteht aus vier Beiträgen:

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22}$$

(W_{12} = Widerstand des 1. Flügels unter der Wirkung des 2. Flügels usw.). Die Rechnungen für Doppeldecker sind sehr weit durchgeführt und haben eine Reihe bemerkenswerter Beziehungen zutage gefördert, doch kann hier darauf nicht näher eingegangen werden[1]). Ein praktisches Ergebnis wird am Schlusse des nächsten Paragraphen mitgeteilt werden.

§ 16. Praktische Anwendung der Tragflügeltheorie; Bestätigung durch den Versuch. Will man die Ergebnisse der Tragflügeltheorie praktisch anwenden, so muß man berücksichtigen, daß bei den wirklichen Flüssigkeiten Reibungswiderstand und auch Widerstand durch Ablösung der Strömung

[1]) Vgl. hierüber etwa Prandtl, Gött. Nachr. 1919, S. 107—123 oder Ergebnisse d. Aerodyn. Vers.-Anstalt 2, 9, 1923 und 3, 9, 1927; auch B. Eck, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 1925, S. 183.

vorhanden ist. Dieser Widerstandsanteil kann isoliert beobachtet werden durch Versuche mit Tragflügeln zwischen parallelen Wänden, vgl. § 14[1]); bei diesen ist der induzierte Widerstand gleich Null, wenigstens in einem allseitig geschlossenen Kanal[2]).

Beim endlichen Tragflügel kommt zu diesem Widerstand W_0, den man „Profilwiderstand" nennt, der induzierte Widerstand W_i dazu:

$$W = W_0 + W_i.$$

Damit diese additive Zusammensetzung erlaubt ist, darf man aber nicht Zustände bei gleichem Anstellwinkel vergleichen, sondern es muß der Strömungszustand am Flügelelement derselbe sein: wenn dies der Fall ist, dann ist auch (unter Vernachlässigung kleiner Größen) die Auftriebsintensität am Flügelelement dieselbe. Wir erkennen also, daß man zweckmäßig von der Auftriebsintensität, also z. B. von der Auftriebszahl c_a ausgeht, wenn man die Beziehungen der Tragflügeltheorie verwerten will. (Die Auftriebszahl c_a stellt allerdings bereits eine Mittelbildung über verschieden große Auftriebsintensitäten von der Mitte bis zu den Flügelenden dar; da aber in dem Gebiet der gesunden Strömung c_a ungefähr linear mit α geht und die Profilwiderstandszahl c_{wo} nicht stark veränderlich ist, ist diese Mittelwertsbildung nicht bedenklich). Geht man in Formel (3) von § 15 von A und W_i zu c_a und c_{wi} über ($A = c_a F p_d$ und $W_i = c_{wi} F p_d$), so ergibt sich

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}$$

und daher, nach dem Vorstehenden, für ein gegebenes c_a

$$c_w = c_{wo} + c_{wi} = c_{wo} + \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} \quad \text{. . . . .} \quad (1)$$

Diese Formel kann zur Berechnung der Widerstandszahl eines endlichen Tragflügels aus der des unendlich langen verwendet werden. Noch genauer ist sie aber für die Berechnung der Widerstandszahl eines endlichen Flügels aus einem Versuch mit einem anderen endlichen Flügel mit anderem F/b^2, denn hier ist die Verteilung des Auftriebs über die Spannweite in beiden Fällen ungefähr dieselbe, und die oben in der eingeklammerten Bemerkung erwähnte Mittelwertbildung findet in gleicher Weise für das Gegebene und das Gesuchte statt. Man überzeugt sich durch zweimalige Anwendung von Gl. (1), einmal auf den Flügel 1 (Spannweite b_1, Fläche F_1) und dann auf den Flügel 2 (Spannweite b_2, Fläche F_2), wenn gemäß dem früher Gesagten $c_{a2} = c_{a1}$ gesetzt wird, daß hier die Beziehung besteht:

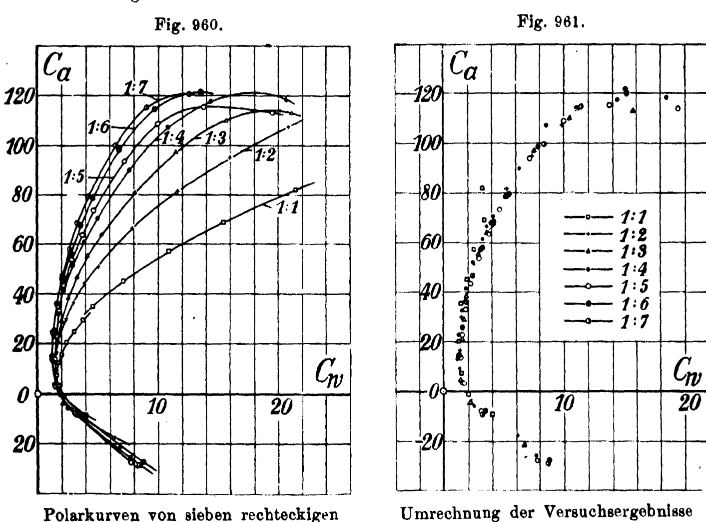
$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2}\right) \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

---

[1]) Eine andere Methode, die den Impulssatz auf das Gebiet verminderter Geschwindigkeit hinter dem Flügel anwendet, mag hier wenigstens erwähnt werden, vgl. A. Betz, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 1925, S. 42; H. Weidinger, ebenda 1926, S. 112; M. Schrenk, Luftfahrtforschung Heft 2, 1928.

[2]) Bei einem oben und unten freien Strahl zwischen parallelen Seitenwänden ist ein induzierter Widerstand nach Formel (4) des vorigen Paragraphen mit F_1 = Strahlquerschnitt vorhanden.

Für rechteckige Flügel ist $F = b \cdot t$, hier wird also, wie bemerkt werden mag, $\frac{F}{b^2} = \frac{t}{b}$, also gleich dem „Seitenverhältnis". Die Umrechnungsformel (2) hat sich in dem praktisch am meisten in Betracht kommenden Bereich von Seitenverhältnissen 1 : 3 bis 1 : 7 für alle vorkommenden Auftriebswerte sehr gut bewährt, obwohl sie zunächst nur für verschwindend kleine Auftriebe abgeleitet ist. Die Ablenkungen der Stromlinien durch solche Flügel sind eben hier im Bereich der gesunden Strömung, wenn man von der unmittelbaren Nachbarschaft des Flügels absieht, noch ziemlich klein. Bei einem Seitenverhältnis 1 : 2 oder gar 1 : 1 hat die Ersetzung des Flügels durch eine „tragende



Polarkurven von sieben rechteckigen Tragflügeln verschiedenen Seitenverhältnisses.

Umrechnung der Versuchsergebnisse von Fig. 960 auf das Seitenverhältnis 1 : 5.

Die Zahlen sind das Hundertfache von C_a und C_w.

Wirbellinie" etwas zu Gewaltsames, und man kann nicht verlangen, daß hier noch Übereinstimmung mit den Formeln erreicht werden kann; trotzdem sind die Abweichungen selbst in diesen Fällen nicht allzu bedeutend. Die im folgenden mitgeteilte Göttinger Versuchsreihe[1]) mag das Maß der Übereinstimmung mit Formel (2) erweisen. In Fig. 960 sind die Polarkurven für eine Reihe von Flügeln von gleichem Profil und vom Seitenverhältnis 1 : 1 bis 1 : 7 wiedergegeben. In Fig. 961 sind diese sämtlichen Messungen nach Formel (2) auf das Seitenverhältnis 1 : 5 umgerechnet, und man sieht, daß die Mehrzahl der Versuchspunkte sich eng an die gemessene Kurve 1 : 5 anschließt. Etwas weiter abseits liegt nur das Quadrat.

Eine andere Nutzanwendung dieser Beziehungen besteht darin, daß man bei den Polarkurven, die aus den Versuchen erhalten werden, die „Parabel"

[1]) Ergebnisse der Aerodyn. Vers.-Anst. 1 50, 1921.

des induzierten Widerstandes beifügt, wodurch dann gemäß Gl. (1) dieses Paragraphen zwischen der Parabel und der Versuchskurve der Profilwiderstand abgelesen werden kann. In Fig. 962 ist diese Parabel zu der Polarkurve von Fig. 953 hinzugezeichnet.

Fig. 962.

Parabel des induzierten Widerstandes.

Die Umrechnung der Anstellwinkel für gleiches c_a gelingt ebenso wie die der Widerstandszahlen. Hier führt die folgende Überlegung zum Ziel: Dem Anstellwinkel des unendlich langen Flügels in wagerechter Strömung entspricht beim endlichen Flügel der Winkel α' zwischen der Profilsehne und der unter dem Winkel φ geneigten Strömungsrichtung (vgl. Fig. 955, S. 1154). Wir müssen also erwarten, daß die Abhängigkeit zwischen c_a und dem „wirksamen Anstellwinkel" $\alpha' = \alpha - \varphi$ bei allen in Betracht kommenden Seitenverhältnissen dieselbe sein wird. Nach Gl. (2) von § 15 ist

$$tg\,\varphi = \frac{A}{\pi\, p_d\, b^2} = \frac{c_a F}{\pi\, b^2},$$

also ist, wenn $\alpha' = f(c_a)$ geschrieben wird,

$$\alpha = \alpha' + \varphi = f(c_a) + \frac{c_a}{\pi}\frac{F}{b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Will man wieder für gleiches c_a einen Anstellwinkel α_2 eines Flügels 2 aus einem Versuch mit einem anderen Flügel 1 berechnen, so ergibt sich

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_2}{b_2{}^2} - \frac{F_1}{b_1{}^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Auch Gl. (4) ist durch Versuche gut bestätigt. Fig. 963 gibt den Verlauf von c_a mit dem Anstellwinkel bei den vorhin erwähnten Versuchen mit sieben Flügeln wieder; Fig. 964 zeigt die auf das Seitenverhältnis 1 : 5 umgerechneten Anstellwinkel. Auch hier ist die Übereinstimmung in den früher erwähnten Grenzen recht befriedigend.

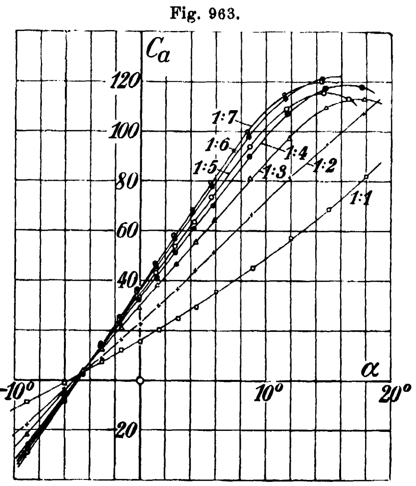
Bei irgendwelchen zusammengesetzten Tragflügelanordnungen, wie z. B. bei Doppeldeckern, lassen sich sehr ähnliche Beziehungen angeben. Es zeigt sich, daß man die Formeln (1) und (2) auch für solche zusammengesetzte Flügelanordnungen verwenden kann, wenn $\varkappa \frac{F}{b^2}$ statt $\frac{F}{b^2}$ gesetzt wird, wobei $\varkappa$ ein nur von der Anordnung abhängiger Zahlwert ist; bei den günstigen Anordnungen ist $\varkappa$ regelmäßig kleiner als 1. Für Doppeldecker von gleicher Spannweite beider Flügel kann genähert

$$\varkappa = \frac{0{,}975 + 1{,}44\, h/b}{1 + 3{,}5\, h/b}$$

gesetzt werden; b ist dabei die Spannweite, h der Abstand der beiden Flügel voneinander. Die Formel kann von $b = 2h$ bis $b = 15h$ verwendet werden.

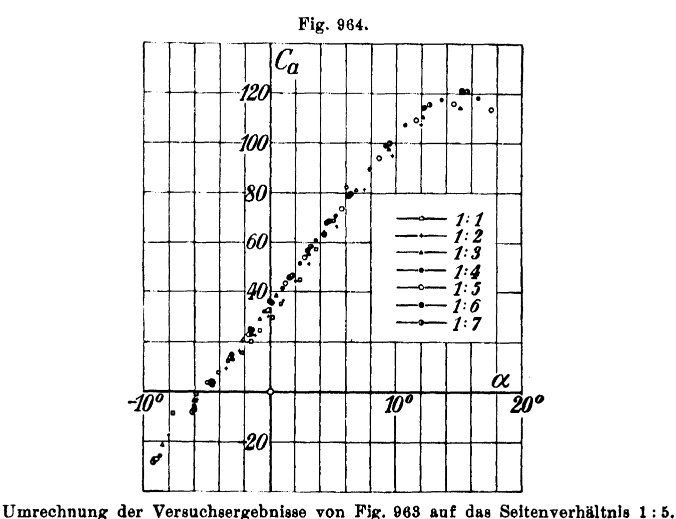
An Stelle der Formeln (3) und (4) können ebenfalls mit gewisser Annäherung ähnliche Formeln gebraucht werden, aber mit einem Wert $\varkappa'$ an Stelle von $\varkappa$,

Fig. 963.



Auftriebszahlen von rechteckigen Tragflügeln verschiedenen Seitenverhältnisses abhängig vom Anstellwinkel.

Fig. 964.



Umrechnung der Versuchsergebnisse von Fig. 963 auf das Seitenverhältnis 1 : 5.

der größer als $\varkappa$ ist [Einfluß der Stromlinienkrümmung, verursacht durch den anderen Flügel][1]).

[1]) Vgl. Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt 3, 9.

§ 17. Propeller. Im Gegensatz zu den Tragflügeln, die eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Kraft erzeugen sollen, haben die Propeller die Aufgabe, eine Kraft in der Bewegungsrichtung hervorzubringen und damit also Nutzarbeit zu leisten. Ist die Kraft $= S$ („Propellerschub") und die Relativgeschwindigkeit des Fahrzeuges gegen das Medium $= v$, so ist die sekundliche Nutzarbeit oder „Nutzleistung" $L_0 = S v$. Nach dem Impulssatz arbeitet der Propeller so, daß er dauernd neue Flüssigkeitsmassen in Bewegung setzt. Ist die sekundliche Masse $= M$ und die erteilte Geschwindigkeit w, so wird der Propellerschub S gleich dem Impuls $M w$. Mit der Erteilung der Geschwindigkeit w ist eine kinetische Energie der in Bewegung gesetzten Flüssigkeitsmassen verbunden, deren Erzeugung einen zusätzlichen Energieaufwand bedeutet. Pro Sekunde wird hierfür eine Leistung $L' = M \frac{w^2}{2}$ verbraucht. Ist der Propellerschub, also das Produkt $M w$ gegeben, so wird L' offenbar um so kleiner, je kleiner w, also je größer M ist. Es gilt also, tunlichst große Massen M zu erfassen und diesen eine kleine Geschwindigkeit zu erteilen, um die aufzuwendende Leistung $L_0 + L'$ möglichst zu verringern. Diese Leistung ist noch nicht der Gesamtaufwand; dieser enthält noch einen dritten Anteil L'', der durch Reibung und Verwirbelung verbraucht wird. Man versteht unter dem Wirkungsgrad η das Verhältnis der Nutzleistung zum Aufwand, also

$$\eta = \frac{L_0}{L_0 + L' + L''} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Neben diesem „Gesamtwirkungsgrad" unterscheidet man noch den theoretischen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{L_0}{L_0 + L'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und den hydraulischen Wirkungsgrad oder Gütegrad

$$\eta_h = \frac{L_0 + L'}{L_0 + L' + L''} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Wie leicht zu sehen, ist $\eta = \eta_{\text{th}} \cdot \eta_h$. Für den theoretischen Wirkungsgrad läßt sich wegen $L' = M \frac{w^2}{2} = S \cdot \frac{w}{2}$ (siehe oben) auch schreiben

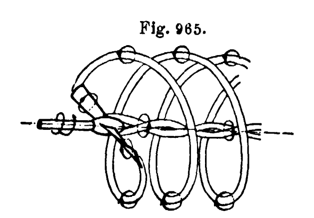
$$\eta_{\text{th}} = \frac{S \cdot v}{S v + S w/2} = \frac{v}{v + w/2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß η_{th} immer nahe an 1 gebracht werden kann, wenn w klein gegen v gemacht wird, was nach dem Früheren dadurch erreicht wird, daß man große Flüssigkeitsmassen erfaßt, also den Querschnitt des vom Propeller verarbeiteten Flüssigkeitsstroms groß macht. In Wirklichkeit sind dem freilich durch technische Gesichtspunkte häufig ziemlich enge Grenzen gezogen, auch haben zu große Propeller einen kleineren hydraulischen Wirkungsgrad, wodurch unter Umständen der Gewinn wieder aufgehoben wird.

Die wichtigsten Arten der Propeller sind der Schaufelradpropeller und der Schraubenpropeller. Der erstere findet sich bei dem „Raddampfer" und wirkt so, daß die Schaufeln des Rades der Reihe nach in das Wasser eintauchen und dem zwischen den Schaufeln befindlichen Wasser eine Geschwindigkeit nach hinten erteilen. Die Schaufelkanten erzeugen dabei Trennungsflächen (vgl. voriges Kapitel § 6); das Wasser zwischen den Schaufeln erhält annähernd die Geschwindigkeit der Schaufeln und behält diese nach dem Herausziehen der Schaufeln zunächst bei (später erfolgt natürlich Vermischung mit dem übrigen Wasser entsprechend den Ausführungen von § 5 des vorliegenden Kapitels). Bei einer Fahrgeschwindigkeit des Schiffes $= v$ und einer Rückwärtsgeschwindigkeit des angetriebenen Wassers $= w$ wird also die Umfangsgeschwindigkeit des Rades annähernd $= v + w$; wird die Umfangskraft $= S$ gesetzt (genau genommen ist S nur die wagerechte Komponente der Schaufeldrücke, deren Richtung im allgemeinen gegen die Wagerechte abweicht!), so ergibt sich ein Leistungsaufwand $= S(v + w)$, also ein Wirkungsgrad $\eta = \frac{Sv}{S(v+w)} = \frac{v}{v+w}$. Der Vergleich mit dem Früheren lehrt, daß hier im ganzen die Leistung $L_0 + 2L'$ aufzuwenden ist, wovon das zweite L' auf Rechnung der durch die Schaufeln erzeugten Wirbel zu setzen ist. Durch allerhand Nebeneinflüsse ergeben sich noch weitere Verluste. Der Wirkungsgrad kann aber durch Wahl eines kleinen w, d. h. großer wirksamer Schaufelflächen immerhin ganz gut gemacht werden (z. B. Anordnung von Schaufelrädern hinter dem Schiff in der ganzen Schiffsbreite, wie dies bei neueren Donaudampfern ausgeführt ist). Die großen, langsam umlaufenden Räder sind aber vom maschinenbaulichen Standpunkt aus unerwünscht, so daß man sie nur bei Fluß- und Binnenseedampfern ausführt, wo des geringen Tiefgangs des Schiffes wegen Schraubenpropeller nicht anwendbar sind.

Diese letzteren sind da, wo der erforderliche Tiefgang vorhanden ist, durch ihren kleineren Durchmesser und ihre größere Drehungszahl (die leichtere Antriebsmaschinen ergibt) überlegen. Für den Antrieb von Luftfahrzeugen kommen praktisch allein die Schraubenpropeller in Betracht.

Fig. 965.



Wirbelsystem einer Luftschraube.

Die Schraubenpropeller erzeugen ihren Schub nach dem Tragflügelprinzip, das nur insofern abgeändert ist, als die „Schraubenflügel" sich durch die Drehung des Propellers bei gleichzeitigem Fortschreiten auf Schraubenlinien fortbewegen, statt der geradlinigen Bewegung der Tragflügel. Von den Enden der Flügel gehen auch hier Wirbel aus (vgl. Fig. 965); die in der Nähe der Nabe austretenden Wirbel der verschiedenen Flügel, die gleichen Drehsinn haben, vereinigen sich dabei zu einem „Nabenwirbel"; die äußeren Wirbel umschlingen schraubenförmig die ganze durch den Propeller hindurch-

gegangene Flüssigkeitsmasse. Wenn wir vorübergehend sehr viele Propellerflügel annehmen, dann schließen die äußeren Wirbel einen nahezu geschlossenen Strahl ein (die enge Folge von Wirbeln ist nahezu einer Trennungfläche äquivalent, vgl. voriges Kapitel § 11, c). Der Strahl ist gegenüber der übrigen Flüssigkeit in fortschreitender und drehender Bewegung. Die fortschreitende Bewegung hängt unmittelbar mit der Aufgabe des Propellers zusammen, eine Schubkraft zu erzeugen; die drehende Bewegung ist ein notwendiges Übel; in günstigen Fällen ist ihre kinetische Energie verhältnismäßig gering.

Eine wirklich befriedigende Theorie der verwickelten Vorgänge im Schraubenpropeller ist bisher nicht vorhanden. Soweit man die vom Propeller erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten als sehr klein gegen die Fahrgeschwindigkeit ansehen kann (schwach belasteter Propeller), lassen sich Überlegungen anwenden, die mit denen der Tragflügeltheorie verwandt sind [1]); jedoch sind die praktisch angewandten Propeller meist nicht schwach belastet. Hier mag es ausreichen, zwei Gesichtspunkte etwas näher herauszuarbeiten, die einen gewissen Überblick über die obwaltenden Verhältnisse vermitteln.

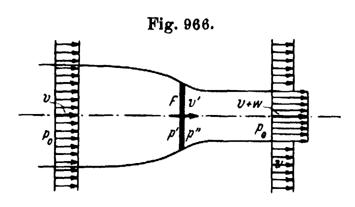
Der erste ergibt sich aus der Anwendung von Impuls- und Energiesätzen auf eine idealisierte Schraube, bei der angenommen wird, daß sie jedem durch den Schraubenkreis hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen eine Druckerhöhung erteilt. Eine solche Druckerhöhung durch die Wirkung eines Flügelsystems ist nach den Darlegungen von § 13, a des vorigen Kapitels verständlich. Zur Vereinfachung soll nun angenommen werden, daß alle durch den Schraubenkreis hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen genau die gleiche Erhöhung ihres Druckes erfahren, was in den überwiegenden Teilen des Schraubenkreises durch geeignete Wahl der Flügelbreite möglich ist. In der Nähe der Nabe, wo die Umlaufgeschwindigkeit der Flügel ungenügend ist, und an den Flügelspitzen, wo die Flüssigkeit dem Flügel ausweichen kann, ist dies allerdings nicht möglich, doch kann man diese Umstände dadurch berücksichtigen, daß man als ideale Schraubenkreisfläche F eine Fläche wählt, die nach Abzug der unwirksamen Gebiete von der wirklichen Schraubenkreisfläche übrigbleibt.

Weiter soll die Rotationsbewegung, die die Schraube der Flüssigkeit in Wirklichkeit erteilt, unberücksichtigt bleiben. Man hat also jetzt einen Idealpropeller, der jedem durch eine gegebene Kreisfläche F hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen eine Druckerhöhung (d. h. Erhöhung der Konstanten der Bernoullischen Gleichung) $= \Delta p$ erteilt, während natürlich die außerhalb des Propellerkreises vorbeiströmenden Flüssigkeitsteilchen eine solche Veränderung nicht erfahren. Da sich in einiger Entfernung vom Propeller der Druck völlig ausgleicht, erhält man also einen Strahl mit erhöhter Geschwindigkeit hinter dem Propeller. Die durch den Schraubenkreis gehenden Stromlinien bilden dabei die Strahlgrenze (vgl. Fig. 966). Im einzelnen ergibt sich nun folgendes.

[1]) Vgl. etwa A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, Göttinger Nachr. 1919, S. 193 = Vier Abhandl. zur Hydrodynamik und Aerodynamik, S. 68.

In einem Bezugssystem, in dem der Schraubenmittelpunkt ruht, hat man eine Zustromgeschwindigkeit v, die der Fahrgeschwindigkeit der Schraube entspricht. Die Abstromgeschwindigkeit ist dann $v + w$, beides in solchen Entfernungen von der Schraube, in denen das Druckfeld der Schraube als ausgeglichen gelten darf, also der ungestörte Druck p_0 herrscht. Die Durchflußgeschwindigkeit durch die Schraube ist unter dem Einfluß des Druckfeldes von v verschieden; sie liegt zwischen v und $v + w$ (vgl. Fig. 966). Wir wollen dabei die Schraube auch noch in der Weise idealisieren, daß wir ihre Erstreckung in der Strömungsrichtung vernachlässigen. Dann ist die Geschwindigkeit unmittelbar hinter der Schraube aus Gründen der Kontinuität mit der unmittelbar vor der Schraube identisch; sie sei mit v' bezeichnet.

Fig. 966.



Der Drucksprung Δp kommt nun so zustande, daß der Druck p' unmittelbar vor der Schraubenkreisebene niedriger ist als der ungestörte Druck, der Druck p'' hinter der Schraube aber höher als dieser. Die Bernoullische Gleichung liefert nun für die Zustände vor und hinter der Schraube

$$p_0 + \frac{\varrho v^2}{2} = p' + \frac{\varrho v'^2}{2}$$

$$p_0 + \frac{\varrho (v + w)^2}{2} = p'' + \frac{\varrho v'^2}{2}.$$

Für den Drucksprung $\Delta p = p'' - p'$ ergibt sich hieraus durch Subtraktion

$$\Delta p = \frac{\varrho (v + w)^2}{2} - \frac{\varrho v^2}{2} = \varrho w \left(v + \frac{w}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir wenden nun den Impulssatz auf zweierlei Weise an:

1. Für eine Kontrollfläche, die die Schraubenkreisebene möglichst eng umschließt. Die Geschwindigkeit ist in der Grenze vor und hinter der Schraubenkreisebene gleich und $= v'$, trägt also zum Impuls nichts bei, dagegen bringt der Drucksprung Δp auf der Fläche F eine Kraft, die gleich dem Schraubenschub S ist:

$$S = F \Delta p = \varrho F w \left(v + \frac{w}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

2. Für eine Kontrollfläche, die durch die Stromlinien durch den Schraubenkreis und eine Fläche weit davor und eine Fläche weit dahinter abgegrenzt ist. Die durchfließende Menge ist hier $= \varrho F v'$, sie hat vorher die Geschwindigkeit v, hinterher die Geschwindigkeit $v + w$; das Druckintegral bringt, wie eine nähere Untersuchung zeigt, keinen Beitrag, also wird der Schub S auch:

$$S = \varrho F v' \cdot w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Der Vergleich von (6) und (7) liefert die bemerkenswerte Beziehung

$$v' = v + \frac{w}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Die aufzuwendende Leistung unseres „idealen Strahlpropellers" läßt sich an Hand der Kontrollfläche I oder II berechnen. Die erste liefert die Pumpleistung

$$L = F v' \cdot \Delta p = S v' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

(Volumen pro Zeiteinheit × Druckunterschied); die zweite in der früheren Weise Masse pro Zeiteinheit × Unterschied der halben Geschwindigkeitsquadrate:

$$L = \varrho F v' \left(\frac{(v + w)^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right),$$

was dasselbe gibt. Die Nutzleistung ist wie früher $L_0 = S \cdot v$, so daß der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{S v}{S v'} = \frac{v}{v'} = \frac{v}{v + w/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ist. Dies stimmt mit dem Ausdruck η_{th} von Gl. (4) überein. Der ideale Strahlpropeller ist somit gleichzeitig ein Idealbild für jede Propellerart und eignet sich daher für Vergleichsrechnungen mit ausgeführten Propellern.

Eine wichtige Beziehung ergibt sich noch, wenn man aus Gl. (6) w ausrechnet und diesen Wert in die Wirkungsgradformel (4) einführt. Man erhält zunächst

$$w = -v + \sqrt{v^2 + \frac{2 S}{\varrho F}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wofür man unter Einführung der „Belastungsziffer"

$$c_s = \frac{S}{{}^1\!/_2 F \varrho v^2}$$

auch schreiben kann:

$$\frac{w}{v} = -1 + \sqrt{1 + c_s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11a)$$

(das andere Vorzeichen der Wurzel hat keinen physikalischen Sinn). Dies gibt nun

$$\eta_{th} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Man sieht, daß mit verschwindender Belastungsziffer η_{th} gegen 1 geht; mit wachsendem c_s nähert es sich dagegen der Null. Die Formel (12) liefert für jede Schraube, die einen verlangten Schub S mittels einer gegebenen Schraubenkreisfläche F bei gegebener Fahrgeschwindigkeit v hervorbringen soll, eine obere Grenze für den Wirkungsgrad. Sie liefert auch eine sehr willkommene Vergleichsbasis bei Versuchen. Das Verhältnis des gemessenen Wirkungsgrades η zu η_{th} ist der früher schon erwähnte Gütegrad.

Die vorstehende Beurteilung versagt offenbar bei Hubschrauben, die eine Last schwebend erhalten sollen. Hier ist zwar dauernd Leistung aufzuwenden, aber, falls kein Steigen vorliegt, ist keine Nutzleistung da. Man kann hier nur nach dem theoretischen Leistungsaufwand bei gleichem gehobenem Gewicht fragen und diesen mit dem wirklichen Aufwand vergleichen.

Wir können unser Formelsystem so verwenden, daß wir $v = 0$ setzen. Dann ist $v' = w/2$ und gemäß (9)

$$L_{\text{th}} = {}^1/_2\, S w,$$

wobei hier S das gehobene Gewicht bedeutet. Gl. (6)

$$S = {}^1/_2\, \varrho F w^2$$

liefert wieder das Mittel, um w fortzuschaffen. Es wird $w = \sqrt{\frac{2S}{\varrho F}}$ und daher

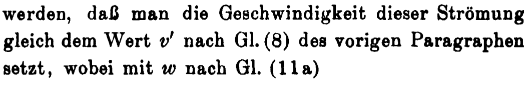
$$L_{\text{th}} = \sqrt{\frac{S^3}{2\varrho F}}; \qquad (13)$$

hieraus läßt sich wieder ein Gütegrad $= L_{\text{th}}/L$ bilden.

Die erforderliche Leistung einer Hubschraube ist also bei gleichbleibendem Gütegrad um so kleiner, je größer F gewählt wird! Andererseits wächst in Wirklichkeit mit wachsender Größe der Hubschraube deren Eigengewicht und damit also auch das zu hebende Gewicht S.

§ 18. Weiteres über Schraubenpropeller; Windmühlen. Um den Einblick in die Wirkungsweise der Propeller zu verbessern, seien nun die Verhältnisse an einem einzelnen Flügelblatt etwas näher studiert.

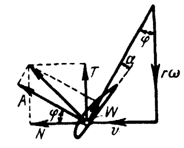
Wir behandeln einen Abschnitt eines Flügelblattes, der zwischen den Radien r und $r + dr$ liegt, wie ein Stück eines Tragflügels, und zwar, genauer gesagt, wie ein Stück eines unendlich langen Tragflügels, falls wir uns vorbehalten, diejenige Geschwindigkeit in die Rechnung einzuführen, die sich als Relativgeschwindigkeit zwischen dem Flügelelement und der Flüssigkeit am Ort des Flügelelements ergibt. Diese Geschwindigkeit ist nun wieder durch den ganzen Propeller beeinflußt, und es hat hier also eine Rechnung einzusetzen, die in ihren Grundgedanken mit der der Tragflügeltheorie verwandt ist. Auch hier mag wieder der Vereinfachung halber die Drehung der Flüssigkeit in der Schraube vernachlässigt werden. Die Beeinflussung der axialen Strömung durch die Schraube kann dadurch berücksichtigt werden, daß man die Geschwindigkeit dieser Strömung gleich dem Wert v' nach Gl. (8) des vorigen Paragraphen setzt, wobei mit w nach Gl. (11a)



$$v' = {}^1/_2\, v\,(1 + \sqrt{1 + c_s})$$

gesetzt werden kann. Die Umfangsgeschwindigkeit des Flügelblattes ist $r \cdot \omega$ (ω die Winkelgeschwindigkeit). Damit wird die Relativgeschwindigkeit des Schraubenblattes zur Flüssigkeit $= \sqrt{v'^2 + r^2 \omega^2}$, die Richtung ist durch $tg\,\varphi = \frac{v'}{r\omega}$ gegeben (vgl. Fig. 967). Ist das Flügelprofil um den kleinen Winkel α gegen diese Richtung geneigt, so ergibt sich ein dem Staudruck der Relativgeschwindigkeit und diesem Anstellwinkel entsprechender Auftrieb A in Richtung senkrecht zur Relativgeschwindigkeit und ein Wider-

Fig. 967.



stand W entgegengesetzt der Relativgeschwindigkeit, wobei A und W auf die Längeneinheit des Flügelblattes bezogen sein mag (auf das Element dr würde sich also $A\,dr$ und $W\,dr$ ergeben.)

Für die weitere Rechnung werden nun zweckmäßig die Komponenten normal zur Schraubenkreisebene (N) und tangential zur umlaufenden Bewegung (T) gebildet. Die ersteren wirken also in der Richtung von v, vgl. Fig. 967, die letztere entgegengesetzt zur Richtung von $r\omega$. Wie leicht zu sehen, wird

$$\left.\begin{aligned} N &= A\cos\varphi - W\sin\varphi \\ T &= A\sin\varphi + W\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Integration der Normalkomponenten ergibt den Schub, die der Momente der Tangentialkomponenten das Drehmoment D, also bei n Flügeln

$$S = n\int_0^r N\,dr; \qquad D = n\int_0^r T\,r\,dr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man hätte statt dessen auch die Arbeitsleistungen am Element, $N\,dr\cdot v'$ und $T\,dr\cdot r\omega$ integrieren können und hätte daraus die Schubleistung gegen die Geschwindigkeit v', $S\cdot v'$ (Pumpleistung) und die durch den Motor aufzubringende Leistung $D\omega$ erhalten. Ein einfacher Begriff sei hier noch erwähnt, der Wirkungsgrad des einzelnen Flügelelements

$$\eta_{Fl} = \frac{N\,dr\cdot v'}{T\,dr\cdot r\,\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Mit den obigen Werten von N und T und unter Berücksichtigung von $v' = r\,\omega\cdot tg\,\varphi$ ergibt sich, wenn noch die „Gleitzahl" $W/A = \varepsilon$ eingeführt wird,

$$\eta_{Fl} = \frac{1 - \varepsilon\,tg\,\varphi}{1 + \varepsilon\,ctg\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck weist ein Maximum bei einem Steigungswinkel φ auf, der (genähert) bei $\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$ liegt. Da die Profilgleitzahl ε sehr klein ist ($\varepsilon = 1/20$ bis $1/50$), ist aber das Maximum so flach, daß auch Steigungswinkel φ weit ab von diesem Maximum vom Standpunkt des Flügelwirkungsgrades noch fast ebenso brauchbar sind. Erst bei sehr kleinen Neigungen wird der Flügelwirkungsgrad unzulässig klein. In der Praxis entscheidet der Umstand, daß bei größeren Werten $tg\,\varphi$ der Flüssigkeit eine stärkere Drehgeschwindigkeit erteilt wird[1]), die wegen ihrer kinetischen Energie schädlich ist; deshalb wählt man für die äußeren Flügelteile, auf die es wegen ihrer großen Umfangsgeschwindigkeit hauptsächlich ankommt, wesentlich kleinere Steigungen als das obige Optimum, z. B. $tg\,\varphi = 1/3$ bis $1/5$.

Der Zusammenhang zwischen dem Auftrieb A des Flügelelements und dem zugehörigen Staudruck liefert nun einen Weg für die Ermittlung der zu wählenden Flügelbreite in Abhängigkeit von r und für die des zuge-

[1]) Man kann sich bei Untersuchung derartiger Verhältnisse auf die Theorie der Schaufelsysteme stützen, wie sie (allerdings ohne Reibung) in § 13, Abschnitt a des vorigen Kapitels entwickelt worden ist.

hörigen Anstellwinkels α. Jedoch ergibt sich bei schnellaufenden Wasserschrauben die Notwendigkeit, noch darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Wasserströmung durch Luftausscheidung und Dampfbildung zerreißt, sobald der absolute Druck im Wasser sich dem Wert Null nähert. Man nennt diese Erscheinung „Kavitation" oder Hohlraumbildung. Man wird deshalb bei sehr schnelläufigen Wasserschrauben genötigt, sehr flache Profile und sehr kleine Anstellwinkel zu verwenden, um die Unterdrücke auf der Saugseite der Profile klein zu halten, und man erhält dann sehr breite Flügelblätter. Fig. 968

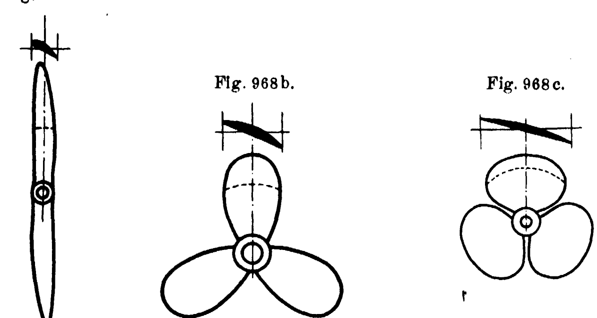


Fig. 968a. Luftpropeller. Fig. 968b. Langsam laufender Wasserpropeller. Fig. 968c. Schnell laufender Wasserpropeller.

enthält nebeneinander die Stirnansicht und einen Profilschnitt einer Luftschraube (a), einer langsam laufenden Wasserschraube für einen Frachtdampfer (b) und einer schnell laufenden Wasserschraube für einen Turbinen-Schnelldampfer (c). Bei Luftschrauben ergibt sich noch eine etwas anders geartete Störung, wenn die Umfangsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit erreicht. Auch hier ist es nötig, sehr flache Profile anzuwenden, die aber meist sehr schmal bleiben (Reedschraube).

Das wirkliche Verhalten der Wasser- und Luftschrauben pflegt durch Versuche festgestellt zu werden. Hier seien nur solche Versuche eingehender besprochen, bei denen die Schraube nicht in Verbindung mit dem Fahrzeug geprüft wird, sondern in der ungestörten Flüssigkeit für sich allein fährt. Im anderen Falle ergeben sich Störungen durch das Fahrzeug und Wechselwirkungen mit ihm, die das Gesamtbild sehr verwickelt machen [1]). Eine maßgebende Größe für die Ordnung von Versuchsergebnissen ist offenbar das Verhältnis Fahrgeschwindigkeit : Umfangsgeschwindigkeit. Wir schreiben $\frac{v}{u} = \frac{v}{r\,\omega} = \lambda$ (v = Fahrgeschwindigkeit, u = Umfangsgeschwindigkeit, r = Halbmesser des Schraubenkreises, ω = Winkelgeschwindigkeit) und nennen λ den Fortschrittsgrad. Für einen Schraubenpropeller, der aus Schraubenflächen von der Steigung h besteht, gibt es offenbar einen besonderen Fort-

[1]) Vgl. etwa A. Betz, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. 7, 431—436, 1927.

schrittsgrad λ_1, bei dem die Schraube sich in der Flüssigkeit so verschiebt, daß sie nur Reibungswiderstand erzeugt. Offenbar ist $\lambda_1 = \frac{h}{2\pi r}$. Nur für Werte von λ unterhalb λ_1 haben die Schraubenblätter einen Anstellwinkel gegen die Strömung relativ zu ihnen, der einen positiven Schraubenschub erzeugt. Für die Betriebszustände mit $\lambda > \lambda_1$ hätte man keinen Propeller, sondern eine Windmühle. Für die üblichen Ausführungsformen der wirklichen Propeller gilt ganz Entsprechendes, nur daß eine einfache geometrische Interpretation von λ_1 fehlt.

Die bei den Versuchen meßbaren Kraftgrößen sind der Schub S und das zum Antrieb der Schraube vom Motor aufgewandte Drehmoment D. Die aufgewandte Leistung ist $L = D\omega$, die Nutzleistung wie früher $L_0 = S \cdot v$, so daß der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Sv}{D\omega} \qquad (5)$$

wird.

Um die Versuchsergebnisse in einer von den speziellen Abmessungen der Versuchsschraube unabhängigen Form darzustellen, verwendet man auch hier dimensionslose Größen, die ähnlich wie diejenigen der Tragflügel gebildet sind. In Deutschland scheint jetzt das folgende System dieser Größen das gebräuchlichste zu sein[1]):

$$k_s = \frac{S}{{}^1/_2\,\varrho\, u^2 \pi r^2} = \frac{S}{{}^1/_2\,\varrho\,\omega^2 \pi r^4} \qquad (6\text{a})$$

$$k_d = \frac{D}{{}^1/_2\,\varrho\, u^2 \pi r^3} = \frac{D}{{}^1/_2\,\varrho\,\omega^2 \pi r^5} = \frac{L}{{}^1/_2\,\varrho\,\omega^3 \pi r^5} \qquad (6\text{b})$$

Da $v = \lambda \cdot r\omega$ ist, wird der Wirkungsgrad, wie sich an Hand von Gl. (5) leicht ergibt,

$$\eta = \frac{\lambda k_s}{k_d}.$$

Den Verlauf von k_s, k_d und η für eine Luftschraube gemäß Fig. 968 a stellt Fig. 969 dar. Man erkennt, daß k_s und k_d in der Nähe von $\lambda = 0{,}35$ durch Null gehen. η ist seiner Bedeutung nach $= 0$ für $\lambda = 0$ und für $k_s = 0$. Es hat dazwischen also ein Maximum. Um den Vergleich mit η_{th} gemäß Formel (12) des vorigen Paragraphen zu ziehen, können wir zunächst den Belastungsgrad c_s ermitteln, der, wie leicht nachzuprüfen, $c_s = \frac{k_s}{\lambda^2}$ ist. Damit können wir also η_{th} punktweise ausrechnen und zu dem zugehörigen λ auftragen. Das ist in Fig. 969 durch die gestrichelte Linie geschehen. Man sieht, daß die Werte von η denen von η_{th} ziemlich nahekommen, ausgenommen in der Gegend von λ_1, wo η_{th} gegen 1 und η gegen 0 geht.

Bezüglich der Windmühlen, die hier kurz berührt werden mögen, lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen anstellen wie für die Luftschrauben. Der anströmende Wind erfährt beim Durchtritt durch den Flügelkreis einen Druck-

[1]) c_s und c_d, wenn die Kräfte auf den Staudruck der Geschwindigkeit v bezogen werden; k_s und k_d, wenn die Kräfte auf den Staudruck der Geschwindigkeit u bezogen werden.

abfall Δp, durch den eine Leistung $\pi r^2 \cdot v' \Delta p$ zur Verfügung gestellt wird, die nun entsprechend dem Flügelwirkungsgrad in Nutzleistung an der Windradwelle verwandelt wird; v' ist dabei wieder die axiale Durchtrittsgeschwindigkeit durch die Radebene. Die Formeln von § 17 lassen sich unmittelbar übertragen, nur daß hier die Geschwindigkeit hinter dem Rade kleiner ist als vorher. Es muß also für den Geschwindigkeitsunterschied w hier ein negativer Wert eingeführt werden. Schreibt man $-w$ an Stelle von w, um wieder eine positive Größe zu erhalten, so wird gemäß Gl. (5) von § 17

$$\Delta p = \varrho w \left(v - \frac{w}{2}\right)$$

und gemäß Gl. (8)

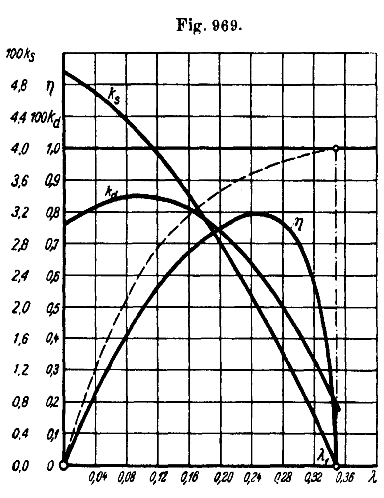
$$v' = v - \frac{w}{2},$$

so daß die verwandelbare Leistung

$$L_1 = \pi r^2 \cdot v' \Delta p$$

$$= \pi r^2 \cdot \varrho w \left(v - \frac{w}{2}\right)^2 \quad (6)$$

Fig. 969.



Kurven einer Luftschraube.

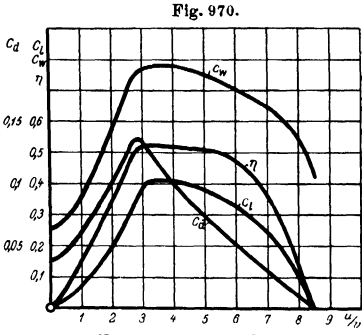
wird. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß diese Leistung bei gegebenem v und r dann ein Maximum wird, wenn die Geschwindigkeit hinter dem Rade $v - w = \frac{1}{3} v$, also $v' = \frac{2}{3} v$ gewählt wird. Damit wird $L_{1\,\max} = \frac{8}{27} \pi r^2 \varrho v^3$. Man kann die Leistung L_0, die durch den Radkreis fließen würde, wenn das Rad keinen Widerstand bieten würde, als Vergleichsgröße heranziehen und den Ausnutzungsgrad $c_l = L/L_0$ bilden. Da die sekundlich durch den Radkreis fließende Masse $= \varrho \pi r^2 v$ und die kinetische Energie der Masseneinheit $= \frac{1}{2} \varrho v^2$ ist, wird $L_0 = \frac{1}{2} \varrho \cdot \pi r^2 v^3$, und damit der maximale theoretische Ausnutzungsgrad $c_{l\,\max} = L_{1\,\max}/L_0 = \frac{16}{27} = 0{,}5926$.

Ein Wirkungsgrad hat bei den gewöhnlichen Windmühlen keinen Sinn, da die Windenergie in beliebigen Mengen zur Verfügung steht. Die Wirtschaftlichkeit kann nur nach dem Verhältnis der Leistung zu den aufgewandten Kosten beurteilt werden, wobei eine billige Konstruktion unter Umständen besser abschneiden kann als eine aerodynamisch hochwertige, aber teurere Konstruktion. Anders ist es mit Windmühlen auf Luftfahrzeugen, durch die mittels des Fahrtwindes irgendwelche Hilfsmaschinen angetrieben werden. Hier muß der Schub S der Windmühle vom Hauptpropeller des Luftfahrzeuges mit bestritten werden. Es wird also die Leistung $S \cdot v$ aufgewandt, und der Wirkungsgrad ist $\eta = L/S v$.

Bei den Versuchen mit Modellen von Windmühlen kann man bei gegebener Windstärke verschieden starke bremsende Drehmomente ausüben und erhält

mit wachsendem Moment abnehmende Umfangsgeschwindigkeit. Ähnlich wie bei Schrauben kann man Momentenzahlen bilden und diese abhängig von dem Verhältnis $u:v$ (Umfangsgeschwindigkeit zu Windgeschwindigkeit) auftragen. Ebenso kann man die Ausnutzungsgrade c_l auftragen. Die Windräder zeigen dabei je nach ihrer Schraubensteigung verschiedene „Schnellläufigkeit". Fig. 970 gibt als Beispiel Kurven für einen „Schnellläufer".

Fig. 970.



Kurven einer Windmühle.

§ 19. Strömungsmaschinen.

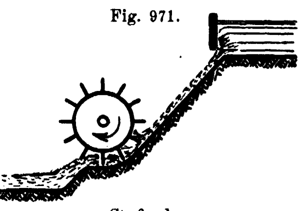
(Wasserräder und Turbinen, Pumpen und Gebläse.) Wasserkraftmaschinen verwandeln die Arbeitsleistung des um eine Höhe H herabsinkenden Wassers in eine Arbeitsleistung an einer drehenden Welle, die Pumpen Arbeitsleistung an einer drehenden Welle in Hebung von Wasser auf eine Höhe H; die Gebläse verrichten entsprechende Arbeitsleistungen an strömender Luft. Gebläse für niedrige Druckunterschiede heißen auch Ventilatoren.

Ist die sekundliche Wassermenge (Volumen/sec) $= Q$ und das Raumgewicht γ, so ist die der Wasserkraftmaschine zugeführte Leistung $L_0 = \gamma Q H$.

Für die Wasserräder ist charakteristisch, daß das Wasser zwischen den Schaufeln praktisch zur Ruhe kommt. Bei den Turbinen bleibt es relativ zu den Schaufeln in Bewegung.

Die Wirkung auf das Rad kann überwiegend Gewichtswirkung sein, wie bei den meisten Wasserrädern, sie kann aber auch rein dynamischer Art sein, wie bei den Turbinen und bei den Stoßrädern.

Fig. 971.



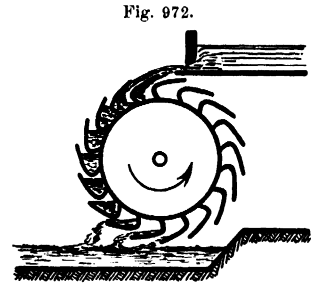
Stoßrad.

Bei dem reinen Stoßrad (Fig. 971) kommt das Wasser mit einer Geschwindigkeit c[1]) an und wird auf die Schaufelgeschwindigkeit u abgebremst. Nach dem Impulssatz gibt dies eine Kraft $P = \varrho\, Q \cdot (c - u)$; die Leistung ist $L = P \cdot u = \varrho\, Q \cdot u\,(c - u)$. Diese ist, wie leicht nachgewiesen werden kann, ein Maximum für $u = \frac{c}{2}$ und ist dann $\varrho \frac{Q\, c^2}{4}$. Wenn man von aller Reibung im Zulaufgerinne absieht, so ist $c = \sqrt{2\, g H}$, also $L_{\max} = {}^1/_2\, \gamma\, Q\, H$ (ϱ = Dichte, $\gamma = \varrho\, g$). Der Wirkungsgrad ist also $\eta_{\max} = L_{\max}/L_0 = {}^1/_2$. In Wirklichkeit ist er durch Verluste verschiedener Art noch kleiner. Das Stoßprinzip ist also nicht gut. Wesentlich besser ist das Gewichtsprinzip, denn die Gewichtsarbeit auf dem Wege von der Stelle, wo sich die Schaufel

[1]) Vgl. Fußnote 1, S. 1174.

mit Wasser gefüllt hat, bis dahin, wo sie das Wasser entleert, wird im Prinzip verlustlos an das Rad abgegeben. Die Notwendigkeit, die Schaufeln rasch zu füllen, bringt allerdings einen Stoßvorgang mit sich; einen weiteren Verlust ergibt die Fallhöhe des aus dem Rade ausfließenden Wassers, die durch das „Freihängen" bedingt ist. Immerhin erreicht man bei gut gebauten „oberschlächtigen" Wasserrädern (bei denen das Wasser von oben in die Zellen eintritt) Wirkungsgrade über 80 v. H. Bei den mittel- und unterschlächtigen Rädern kommt noch ein weiterer Verlust durch das Vorbeifließen des Wassers neben den Schaufeln hinzu, außerdem machen die Verluste beim Füllen und Entleeren des Rades meist einen größeren Bruchteil des Gesamtgefälles aus als bei den oberschlächtigen Rädern, deshalb bewegen sich die Wirkungsgrade guter Räder dieser Art zwischen 55 und 65 v. H.

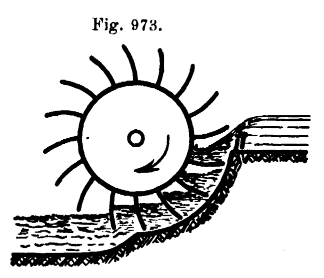
Fig. 972.





Oberschlächtiges Wasserrad.

Fig. 973.



Mittelschlächtiges Wasserrad.

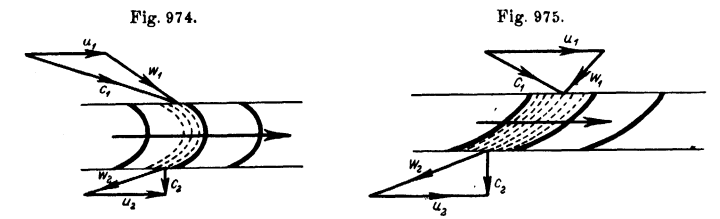
Ein wesentlich anderes Prinzip liegt bei den Turbinen vor. Die Energieübertragung ist hier rein dynamischer Natur. Das raschströmende Wasser wird durch eine Leitvorrichtung „stoßfrei" zwischen die Turbinenschaufeln eingeführt und nun durch die Schaufeln so abgelenkt, daß es das Rad mit einer möglichst kleinen Absolutgeschwindigkeit verläßt. Da bei diesen Vorgängen nirgends größere Verluste auftreten, so folgt aus dem Energieprinzip, daß von dem, was nach Abzug der kinetischen Energie des austretenden Wassers von der gesamten Gefälleleistung noch verbleibt, der weitaus überwiegende Teil an der drehenden Welle der Turbine nachgewiesen werden kann.

In bezug auf die Form, in der sich die Energieumsetzung vollzieht, unterscheidet man zwei Arten von Turbinen, die „Gleichdruckturbinen" und die „Überdruckturbinen". Bei den ersteren wird die ganze verfügbare Gefälleleistung vor dem Rade in kinetische Energie verwandelt, indem man das Wasser durch geeignete Mündungen oder Leitkanäle frei ausströmen läßt. Das Wasser, das mit der Absolutgeschwindigkeit c_1 [1]) auf das mit der Geschwindigkeit u_1 umlaufende Rad trifft, hat relativ zum Rade eine Ge-

[1]) Die Bezeichnungen c für Absolutgeschwindigkeiten, u für Umfangsgeschwindigkeiten, und w für Relativgeschwindigkeiten sind bei den Turbineningenieuren üblich.

schwindigkeit w_1 (vgl. Fig. 974). Die Eintrittskanten der Schaufeln haben ungefähr die Richtung von w_1; das Wasser wird nun von den Schaufeln in die Richtung w_2 abgelenkt, wobei, abgesehen von mäßigen Verlusten durch Oberflächenreibung, der Betrag der Relativgeschwindigkeit derselbe bleibt. Die Absolutgeschwindigkeit c_2 wird durch Konstruktion eines Geschwindigkeitsdreiecks aus w_2 und u_2 erhalten. Im günstigsten Betriebszustand ist sie nahezu senkrecht zum Schaufelsystem und sehr klein. Bei den Überdruckrädern wird zunächst nur ein mäßiger Teil des Gefälles in Geschwindigkeit umgesetzt; das Wasser tritt deshalb mit einem erheblichen Überdruck in das Rad ein. Die Einzelheiten ergeben sich aus Fig. 975. Das Wasser erfährt nun in den sich verengenden Schaufelkanälen einen erheblichen Zuwachs der Relativgeschwindigkeit und verbraucht dabei den Rest des Gefälles. Im günstigsten Betriebszustand ist die absolute Wassergeschwindigkeit hinter dem Rade wieder sehr klein und ungefähr senkrecht zum Schaufelsystem.

Die Überdruckturbinen arbeiten notwendig mit vollgefüllten Schaufelkanälen. Bei den Gleichdruckturbinen pflegt man dagegen durch geeignete



Geschwindigkeitsplan einer Gleichdruckturbine. Geschwindigkeitsplan einer Überdruckturbine.

Ausbildung der Schaufelform dafür zu sorgen, daß das Wasser mit einer freien an Luft grenzenden Oberfläche durch die Schaufeln fließt. Da hierbei die Schaufeln nur einseitig vom Wasser berührt werden, ergibt sich weniger Reibung als in dem Falle der zweiseitigen Berührung.

Wenn von der Reibung und den Zentrifugalwirkungen im Rade abgesehen wird, so ist

$$H = \frac{1}{2g}(c_1^2 + w_2^2 - w_1^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Das erste Glied liefert das Teilgefälle in der Leitvorrichtung, die Differenz der beiden anderen das Teilgefälle im Laufrad (für $w_2 = w_1$, also für die Gleichdruckturbine ist dieser letztere Anteil gleich Null).

Die Theorie der Turbinen, bei der eine gleiche Ablenkung aller Wasserteilchen angenommen wird, stammt von Euler. Von ihm stammt auch die folgende „Hauptgleichung der Turbinentheorie", die auf den Impulsmomentensatz (§ 13 des vorigen Kapitels, Abs. b) aufbaut. Die Umfangskomponenten der absoluten Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit, dort mit $w_1 \cos \beta_1$ und $w_2 \cos \beta_2$ bezeichnet, mögen jetzt in der bei den Turbinenfachleuten üblichen Bezeichnung c_{u_1} und c_{u_2} heißen. Dann ist das Drehmoment an der Turbinenwelle

$$D = \varrho\, Q\, (r_1 c_{u_1} - r_2 c_{u_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Nutzleistung L ist dann $= D\omega$; mit $r_1\omega = u_1$ und $r_2\omega = u_2$ wird dann

$$L = \varrho Q(u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

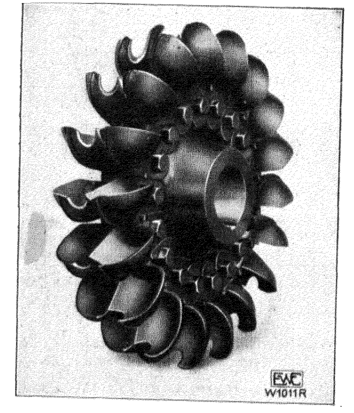
Andererseits ist $L = \eta L_0 = \eta \gamma Q H$, wobei η der hydraulische Wirkungsgrad ist. Für diesen ergibt sich also unter Berücksichtigung von $\gamma = \varrho g$:

$$\eta = \frac{u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}}{g H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Bei senkrechtem Austritt verschwindet c_{u_2}, so daß $u_1 c_{u_1} = \eta g H$ wird. Aus dieser letzteren Gleichung, in Verbindung mit Fig. 974 und 975, geht deutlich hervor, daß bei gleichem Gefälle die Überdruckturbinen wesentlich größere Umfangsgeschwindigkeit haben als die Gleichdruckturbinen. Man findet deshalb bei kleinen und mittleren Gefällen regelmäßig Überdruckturbinen, bei großen Gefällen aber Gleichdruckturbinen ausgeführt.

Von der Annahme der gleichen Ablenkung aller Wasserteilchen sucht sich die neueste hydrodynamische Auffassung des Turbinenproblems frei zu machen. Man sieht nicht mehr den Raum zwischen zwei Schaufeln einer Überdruckturbine als einen „Kanal" an, sondern betrachtet die Schaufeln als einzelne in der Strömung befindliche „Flügel", die sich dabei gegenseitig beeinflussen [1]). Bei den modernen Schnelläuferbauarten, die sehr große Abstände der Schaufeln aufweisen, wird nur diese Auffassung den wirklichen Vorgängen einigermaßen gerecht. Aber auch in den Fällen, wo man noch von Schaufelkanälen sprechen kann, zeigt sich, daß man die mittlere Eintritts- und Austrittsrichtung nicht mit den entsprechenden „Schaufelwinkeln" gleichsetzen darf, wie man dies im Rahmen der alten Theorie getan hat. Die Schaufelwinkel stellen vielmehr ein Maximum der Ablenkung dar, alle nicht unmittelbar an den Schaufeln anliegenden Wasserfäden erfahren geringere Ablenkungen. Im Falle der ebenen

Fig. 976.



Pelton-Rad.

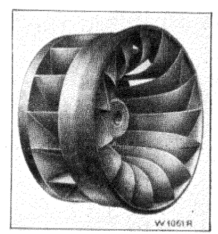
Fig. 977.

Pelton-Rad mit Regulierdüsen.

[1]) Vgl. Bauersfeld, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. **66**, 461 u. 514, 1922, oder Prandtl, ebenda **65**, 959, 1921. Vgl. auch die Rechnung über das Schaufelgitter in § 13 des vorigen Kapitels.

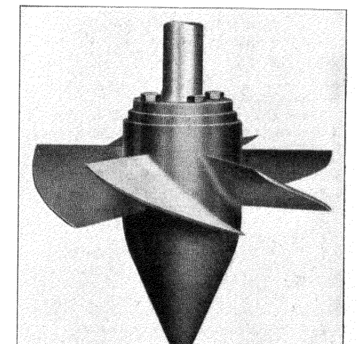
Strömung sind diese Verhältnisse in neuester Zeit durch verschiedene Arbeiten aufgeklärt worden [1]). Um von den praktischen Ausführungsformen der Wasserturbinen einige Beispiele zu geben, seien einige typische Laufräder im Bilde wiedergegeben. Fig. 976 zeigt die moderne Ausführung eines Gleichdruckrades oder Freistrahlrades, wie es sich aus dem sogenannten Peltonrad entwickelt hat. Ein oder mehrere Wasserstrahlen von kreisförmigem Querschnitt werden auf die an den links unten befindlichen Schaufeln erkennbaren Schneiden gerichtet und werden in den links und rechts von der Schneide befindlichen Muscheln um nahezu 180° umgelenkt. Die günstigste Radgeschwindigkeit liegt etwa bei der Hälfte der Wassergeschwindigkeit im Strahle. Fig. 977 zeigt eine etwas vereinfachte Skizze von dem Zusammenbau eines Freistrahlrades. In Fig. 978 ist eine übliche Form von Überdruckrädern dargestellt (sogenannte Francisturbine). Das Wasser tritt, aus einem das Rad umschließenden Leitapparat kommend, durch die linken Öffnungen in das Rad ein und verläßt es durch die rechten Öffnungen. Der Weg durch das Rad erfolgt in räumlich gewundenen Bahnen, doch ist im grundsätzlichen das Schema von Fig. 975 eingehalten. Um auch bei mäßigen Gefällen eine hohe Schnelläufigkeit zu erhalten, ist man zu Formen wie Fig. 979 gelangt (Kaplanturbine). Der Leitapparat ist dabei ähnlich wie bei der vorigen Turbinenart; er erzeugt eine spiralige Bewegung des Wassers von außen nach innen. Der Durchtritt durch das Rad erfolgt dann in axialer Richtung. Man kann es sich aus dem Francisrad entstanden denken, indem man von diesem nur die äußersten Schaufelteile ganz rechts in der Abbildung beibehält, die übrigen Teile des Rades aber fortläßt. Eine Skizze des Zusammenbaues einer Kaplanturbine mit dem Leitapparat zeigt Fig. 980.

Fig. 978.



Francisrad.

Fig. 979.



Kaplanrad.

Bei den Überdruckturbinen wendet man regelmäßig zur Verringerung der Austrittsenergie noch ein meist schwach kegelig erweitertes „Saugrohr" an (vgl. Fig. 980, *c*). Dadurch, daß man das Saugrohr unter Wasser ausmünden läßt, wird auch das Gefälle so vollständig wie möglich verwertet.

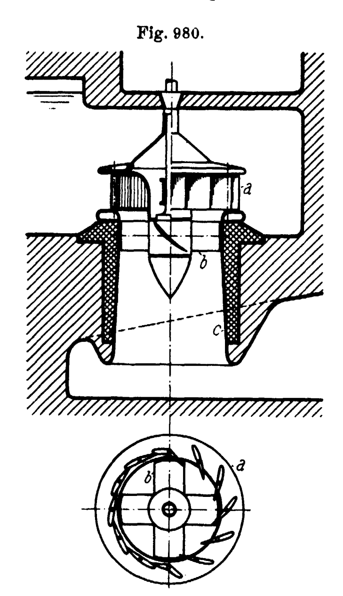
Zur Anpassung der Turbinenleistung an den vorliegenden Leistungsbedarf wird die Wassermenge reguliert. Dies geschieht meist in automatischer

[1]) Vgl. **Busemann**, Z. f. ang. Math. u. Mech. 1928, S. 372; dort weitere Literatur.

Weise so, daß die Drehzahl der Turbine konstant gehalten wird. Bei den Freistrahlturbinen dient dazu die in den Düsen befindliche Reguliernadel. Bei den Überdruckturbinen werden die Leitschaufeln (*a* in Fig. 980) verdreht, so daß die Durchflußkanäle weiter oder enger werden.

Die Wirkungsgrade bewegen sich bei guten Turbinen der verschiedenen Bauarten in der Gegend von 85 bis 90 v. H. Es mag bemerkt werden, daß auch bei den Dampfturbinen Gleichdruckräder und Überdruckräder unterschieden werden. Die Kompressibilität des Dampfes verursacht allerdings verschiedene Änderungen gegenüber den Wasserturbinen. Näheres hierüber vgl. Bd. III, 1, Kap. XXIII, § 13 u. f.

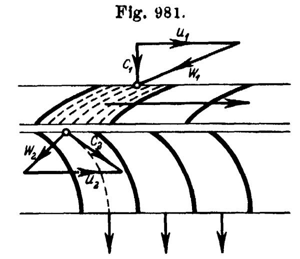
Fig. 980.



Kaplanturbine.

Die auf dem Flügelradprinzip beruhenden Pumpen, die gewissermaßen Umkehrungen der Turbinen (und zwar speziell der Überdruckturbinen) sind,

Fig. 981.



Schaufelplan einer Schraubenpumpe.

scheiden sich in solche mit axialem Durchtritt (Schraubenpumpen) und solche mit radialem Durchtritt (Zentrifugalpumpen). Für die Förderung von Luft gibt es ganz entsprechende Maschinen, Schraubengebläse und Zentrifugalgebläse. Die Schraubenpumpen und -gebläse sind in ihrer Bauart den Schraubenpropellern ähnlich; die einfachsten unterscheiden sich von den Propellern nur dadurch, daß sie im Innern eines Rohres oder in der Trennwand zweier Räume arbeiten. Durch ein Leitrad kann die im Pumpenrad erzeugte Energie der drehenden Bewegung zum größten Teile wieder in Druck verwandelt werden (vgl. den Schaufelplan Fig. 981).

Bei den Zentrifugalpumpen und -gebläsen kommt zu der eben beschriebenen Schaufelwirkung unterstützend noch die Zentrifugalwirkung in den rotierenden Schaufelkanälen dazu (in einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kanalsystem tritt die Zentrifugalkraft wie eine Massenkraft auf und liefert sowohl im Zustand relativer Ruhe wie auch — längs einer Stromlinie — in der stationären Bewegung einen Druckanstieg $\frac{\varrho\,\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2)$

(vgl. Kap. X, § 18). Die Schaufeln der Zentrifugalräder können radial, rückwärts geneigt oder auch nach vorn gebogen sein. Die rückwärts gekrümmten geben die besten Wirkungsgrade, die anderen aber etwas höhere Drucke. Statt eines Leitschaufelsystems zeigen die einfacheren Zentrifugalpumpen und -gebläse ein geeignet geformtes Spiralgehäuse (vgl. Fig. 982). Die hochwertigen Maschinen dieser Art, besonders die aus mehreren hintereinander geschalteten Rädern bestehenden Hochdruckpumpen und Turbokompressoren, besitzen dagegen ein besonderes Leitschaufelsystem (vgl. Fig. 983).

Fig. 982.

Zentrifugalpumpe mit Spiralgehäuse.

Fig. 983.

Hochdruck-Zentrifugalpumpe.

Die Nutzleistung L_0 der Pumpen ist, mit Q = sekundlichem Volumen und h = Förderhöhe,

$$L_0 = \gamma Q h \quad \text{(5a)}$$

Für Gebläse tritt in dem Falle, daß die Verdichtungsarbeit als klein vernachlässigt werden darf, an Stelle von γh der Unterschied der statischen Drucke vor und hinter dem Gebläse, $p_2 - p_1$, also

$$L_0 = Q(p_2 - p_1) \quad \text{(5b)}$$

Wird ohne eine längere Rohrleitung aus einem Raume vom Drucke p_0 angesaugt, so ist dabei $p_1 = p_0 - \frac{\varrho}{2} w^2$ zu setzen, mit w = mittlerer Geschwindigkeit in der Saugöffnung. Die kinetische Energie beim Austritt aus dem Gebläse usw. kann zum Teil durch einen Diffusor (ein erweitertes Rohrstück) wiedergewonnen werden, wodurch bei gleichbleibendem Gegendruck der Druck p_2 hinter dem Gebläse usw. verringert wird. Für den Fall von Gebläsen für höhere Druckunterschiede, bei denen die Verdichtungsarbeit nicht vernachlässigt werden kann, können die in § 8 von Kap. X für Kolbengebläse abgeleiteten Formeln unmittelbar benutzt werden [1]).

Die Antriebsleistung L ist wegen der Strömungsverluste und der Lagerreibung größer als L_0. Das Verhältnis $L_0/L = \eta$ ist der „Wirkungsgrad“ der Pumpe bzw. des Gebläses. Sieht man von der Lagerreibung ab, so ist in $L = D \cdot \omega$ das Drehmoment D nach der Eulerschen Gl. (2) berechenbar, und zwar für Schraubenräder ebenso wie für Zentrifugalräder. Meist ist $c_{u_1} = 0$, es ergibt sich daher

$$D = \varrho Q r_2 c_{u_2} \quad \text{(6)}$$

[1]) Vgl. auch Band III, 1, Kap. XXV, § 3.

Hiermit wird, da $r_2\omega = u_2$ ist,

$$L = \varrho Q u_2 c_{u_2} \quad \ldots \quad (7)$$

Mit $L_0 = \eta L$ und unter Berücksichtigung von (5a) ergibt sich also

$$h = \frac{\eta u_2 c_{u_2}}{g} \quad \ldots \quad (8)$$

c_{u_2} ist dabei jeweils aus den Geschwindigkeitsdreiecken ermittelbar; η ist abzuschätzen.

§ 20. Wasser- und Luftfahrzeuge. a) Kräftegleichgewicht. Das Gleichgewicht des Schwimmauftriebes A der Wasserfahrzeuge und der gasgefüllten Luftfahrzeuge mit dem Gewicht G des Fahrzeugs ist bereits in § 13 und 14 von Kap. X behandelt. Bei den Flugzeugen tritt der Auftrieb der Tragflügel an die Stelle des Schwimmauftriebes (vgl. § 14 bis 16 von Kap. XII). Der bei der Fortbewegung der Luft- und Wasserfahrzeuge auftretende Widerstand (W) wird durch den Schub (S) des Propellers überwunden. Es bestehen also für gleichförmige wagerechte Bewegung des Fahrzeugs die beiden Gleichungen

$$A = G \quad \ldots \quad (1)$$

$$S = W \quad \ldots \quad (2)$$

Der Propellerschub ist von der Maschinenleistung L abhängig. Es ist $S = \frac{\eta L}{v}$ (η = Wirkungsgrad, v = Fahrgeschwindigkeit). Bei Schiffen und Luftschiffen ist der Widerstand ungefähr proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit

$$W = c_w F \frac{\varrho v^2}{2}$$

(F = Hauptspantfläche); hiermit wird unter Berücksichtigung von (2)

$$S v = \eta L = c_w F \frac{\varrho v^3}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

woraus folgt, daß bei ein und demselben Fahrzeug die Geschwindigkeit ungefähr proportional der dritten Wurzel aus der aufgewandten Maschinenleistung ist. Bei Wasserfahrzeugen ergeben sich allerdings gelegentlich stärkere Abweichungen von dieser Regel, da der Wellenwiderstand anderen Gesetzen folgt. Er wird kleiner, wenn die Bugwelle und die Heckwelle gerade interferieren, und größer, wenn sie sich addieren.

Bei den Flugzeugen ist mit F = Flügelfläche

$$A = G = c_a F \varrho \frac{v^2}{2} \quad \ldots \quad (1a)$$

und

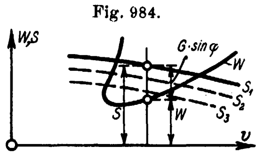
$$W = S = c_w' \varrho F \frac{v^2}{2} = \frac{c_w'}{c_a} \cdot G \text{[1]} \quad \ldots \quad (2a)$$

[1] In c_w' ist neben dem c_w des Flügels noch der „schädliche Widerstand" von Rumpf, Fahrgestell usw. eingerechnet.

Ist G gegeben, so kann man aus (1a) zu verschiedenen Werten von c_a, also zu verschiedenen Anstellwinkeln des Tragflügels, die zugehörigen Geschwindigkeiten v rechnen und nun sowohl die zu demselben Anstellwinkel gehörigen Werte von W wie auch die den verschiedenen Maschinenleistungen entsprechenden Propellerschübe S als Funktionen von v auftragen, vgl. Fig. 984 [Darstellung von G. König][1]).

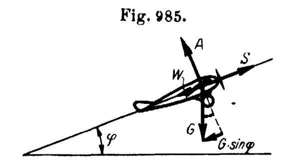
Jeder Schnittpunkt der W-Kurve mit einer S-Kurve stellt einen möglichen Flugzustand mit horizontaler Bahn dar. Sehr wesentlich ist, daß unterhalb einer gewissen Geschwindigkeit (die dem Maximum von c_a entspricht) ein

Fig. 984.



Zugkraftdiagramm von König.

Fig. 985.



Schweben überhaupt nicht mehr möglich ist. Die normalen Flugzustände entsprechen dem rechten Schnittpunkt der W-Kurve mit den S-Kurven. Da sowohl der Auftrieb und der Widerstand wie auch die Maschinenleistung von der Dichte abhängen, ergeben sich für jede Flughöhe etwas veränderte Beziehungen. Lehrreich sind auch die Beziehungen für den Steigflug und Gleitflug. Wenn die Kräfte A und W senkrecht zur Bahn bzw. in der Bahnrichtung angenommen werden, so wird hier (vgl. Fig. 985)

$$A = G \cos \varphi \quad \text{(1b)}$$

$$S = G \sin \varphi + W \quad \text{(2b)}$$

Die Werte von $\cos \varphi$ sind meist nicht viel von 1 verschieden, Fig. 984 braucht daher kaum geändert zu werden. Es entspricht jetzt jedem Punkt der W-Kurve bei jeder S-Kurve ein Flugzustand, denn es bestimmt sich einfach der Neigungswinkel φ der Flugbahn aus

$$\sin \varphi = \frac{S - W}{G}.$$

Für $S = 0$ erhält man die Zustände des motorlosen Gleitfluges[2]). Der Gleitwinkel $-\varphi = \varepsilon$ ergibt sich aus

$$\sin \varepsilon = \frac{W}{G} = \frac{c_w'}{c_a}.$$

Die gewöhnlichen Flugzeuge weisen Werte von $\sin \varepsilon$ in der Gegend von $^1/_{10}$ auf, hochwertige Segelflugzeuge kommen bis $\sin \varepsilon = {}^1/_{20}$.

b) Steuerung und Stabilität. Die Steuerung oder Lenkung wird durch Ruder erreicht, die aus geeigneten, um mäßige Winkel drehbaren

---

[1]) Vgl. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1911, S. 301.

[2]) Die vorstehenden Beziehungen gelten für ruhende Luft, bzw. in bewegter Luft für die Relativbewegung zur Luft. Der motorlose Segelflug besteht in einem Gleiten in einem aufsteigenden Luftstrom (Aufwind an Berghängen usw.).

Flächen bestehen. Bei den Wasserfahrzeugen ist nur ein solches Ruder erforderlich zur Steuerung des Kurses auf der Wasseroberfläche, bei den Luftschiffen hat man zwei Ruder nötig, nämlich eins für den Kurs in der Wagerechten (Seitenruder) und eins für die Einstellung der Längsneigung und damit der Vertikalgeschwindigkeit (Höhenruder). Bei den Flugzeugen kommt hierzu noch als Drittes zur Beherrschung der Querlage das „Querruder“ dazu. Fig. 986 bis 988 zeigen die gebräuchliche Ruderanordnung für

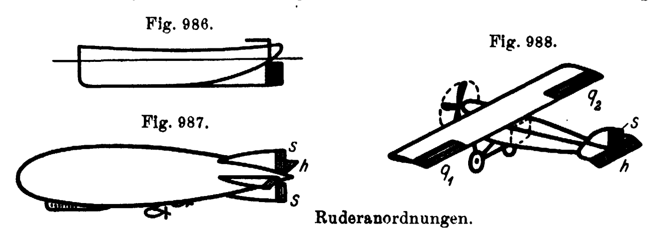


Fig. 986.

Fig. 987.

Fig. 988.

Ruderanordnungen.

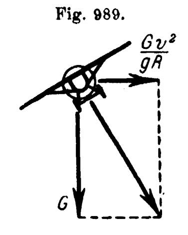
diese drei Fälle. Von dem Bewegungszustand in der geraden Fahrt wird verlangt, daß er stabil oder wenigstens nicht stark labil ist. Beim Wasserschiff ist die Längs- und Querneigung durch den Schwimmauftrieb stabilisiert (vgl. § 14, b von Kap. X), beim Luftschiff wesentlich nur die Querneigung. Für die Erhaltung der Richtung der Längsachse gegen Neigung nach der Seite und (beim Luftschiff) nach oben bzw. unten muß aber noch etwas Besonderes getan werden, da sich zeigt, daß längliche, vorn und hinten verjüngte Körper die Neigung haben, sich quer zu stellen. Deshalb bringt man sowohl beim Schiff wie beim Luftschiff am hinteren Ende vor dem Ruder noch besondere Flächen zur Stabilisierung an, die ähnlich wie die Federn eines Pfeiles wirken. Man bemißt diese „Flossen“ gern so, daß das Fahrzeug nahe dem indifferenten Gleichgewicht gegen Verdrehung ist; wenn dies der Fall ist, kann es mit verhältnismäßig kleinen Ruderbewegungen in ziemlich enge Kurven gebracht werden, während bei zu großer Stabilität die gute Lenkbarkeit verloren geht. Entsprechendes gilt auch für das Flugzeug. Auch hier wird aus Stabilitätsgründen vor dem Höhen- und Seitenruder eine feststehende „Höhenflosse“ und „Seitenflosse“ angeordnet (vgl. Fig. 988).

Beim richtigen Fliegen enger Kurven wird die Maschine zur Seite geneigt, so daß der Flügel senkrecht zur Resultierenden aus Gewicht (G) und Zentrifugalkraft $\left(\frac{Gv^2}{gR}\right)$ steht (vgl. Fig. 989). Der Flügel hat dabei durch seinen Auftrieb dieser Resultierenden $\left[G = \sqrt{1+\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2}\,\right]$ das Gleichgewicht zu halten. Der Flugzustand ist also hier so, als ob das Gewicht in dem angegebenen Maße erhöht wäre. Unter Bezugnahme auf Gl. (1a) erkennt man, daß dazu bei einem gegebenen Anstellwinkel eine höhere Fluggeschwindigkeit erforderlich ist als zum Geradeausflug.

Über die untere Grenze der Fluggeschwindigkeit in Fig. 984 mag noch folgendes bemerkt werden. Diese untere Grenze hängt mit der oberen Grenze

der Auftriebszahl c_a zusammen, bei der die Strömung am Tragflügel abzureißen beginnt. Diese Grenze erweist sich aus folgenden Gründen als sehr gefährlich: Wegen der abgerissenen Strömung werden die Querruder fast wirkungslos, und das Flugzeug stürzt leicht über eine Flügelspitze ab. Dabei geht folgendes vor sich. Hat das Flugzeug zufällig eine Drehung nach links unten erhalten, so wird dadurch der Anstellwinkel gegen den relativen Wind an der linken Flügelspitze vergrößert, an der rechten verkleinert. Dadurch reißt links die Strömung noch stärker ab, während sie sich rechts wieder anlegt. Der Auftrieb wird daher links noch kleiner, rechts dagegen wieder größer, und die Drehung nach links verstärkt sich. Das Flugzeug stürzt dann in einer engen Schraubenlinie, immer mit dem rechten Flügelende in der Luft führend, ab. Bemerkenswerterweise kann es wieder „gefangen werden", wenn man das Höhenruder stark senkt („drückt"). Dadurch werden die Anstellwinkel verkleinert, die Strömung legt sich wieder an, und die Drehung hört allmählich auf. Hinterher kann das Flugzeug durch „Ziehen" (Heben des Höhenruders) wieder aus dem Sturzflug in die wagerechte Lage genommen werden. Der ganze Vorgang erfordert aber immer eine Fallhöhe von mehreren hundert Metern. Steht diese wegen der Nähe des Erdbodens nicht zur Verfügung, so führt er immer zur Katastrophe.

Fig. 989.



Beim Fliegen enger Kurven ist nach der oben stehenden Bemerkung auch die untere Geschwindigkeitsgrenze in die Höhe gerückt, es ist also in den Kurven die Gefahr des „Abrutschens über einen Flügel" in erhöhtem Maße vorhanden. Sie wird aber sicher vermieden, wenn die Fluggeschwindigkeit ausreichend über dem jeweiligen Minimum liegt.

Durch Anwendung der in § 7 beschriebenen Mittel zur Verhinderung des Abreißens der Strömung, vor allem durch die Spaltflügel nach Handley Page, kann die Grenze für das Eintreten des Abrutschens sehr stark hinausgeschoben, und die Sicherheit des Fluges dadurch erhöht werden.

§ 21. Hydrodynamisches und aerodynamisches Versuchswesen.

a) Herstellung einwandfreier Versuchsbedingungen. Vielfach liegt die Aufgabe vor, die Bewegungen eines Körpers relativ zu einer sonst ungestörten Flüssigkeitsmasse zu studieren. Hier sind zwei Methoden brauchbar. Entweder bewegt man den Körper in der vorher genügend beruhigten Flüssigkeit, oder man läßt einen gleichförmigen Strom der Flüssigkeit gegen den Körper strömen. Die erstere Methode ist besonders für Wasserversuche geeignet und wird in den Schiffsmodell-Schleppanstalten benutzt. Man schleppt ein meist aus Paraffin hergestelltes Schiffsmodell mit Hilfe eines Schleppwagens durch das Wasser, mißt dabei die Geschwindigkeit des Wagens und den Widerstand des Modells, beobachtet die Wellenform usw. Das Wasserbecken muß dabei reichlich groß und tief gewählt werden, damit die von den Wänden des Beckens herrührenden Störungen sich nicht bemerklich

machen. Bei verfeinerten Einrichtungen haben die Modelle auch angetriebene Schrauben.

Die mechanische Ähnlichkeit in der Ausbildung der Wellen, auf die es hier besonders ankommt, wird bei diesen Versuchen erreicht, wenn sich die Geschwindigkeit des Modells zu der des Schiffes verhält, wie die Wurzel aus Modellänge zu Schiffslänge (dann sind nach Kap. XI, § 17 die Wellenlängen proportional den Körperlängen). Eine gleichzeitige Ähnlichkeit in bezug auf Reibung ist nicht erreichbar, da diese gleiche Reynoldssche Zahl verlangen würde, was sich mit der Regel für Ähnlichkeit der Wellen nicht verträgt. Man verzichtet deshalb auf Reibungsähnlichkeit. Um die hieraus entstehenden Fehler klein zu halten, wendet man möglichst große Modelle an.

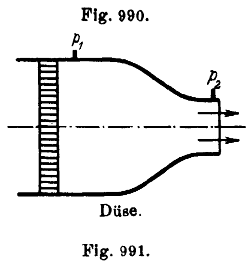
Für die Anwendung in Luft hat sich die Schleppmethode nicht als geeignet erwiesen. Da man genötigt ist, die Modelle verhältnismäßig schwer gegenüber der verdrängten Luftmasse zu machen, überwiegen hier die bei unbeabsichtigten kleinen Beschleunigungen des Modells auftretenden Massenkräfte die zu messenden Kräfte in solchem Maße, daß die Messungen sehr ungenau werden. Außerdem machen sich die von dem Meßwagen ausgehenden Störungen stark bemerkbar, da dieser sich hier im gleichen Medium wie das Modell bewegt. Man wendet deshalb in Luft immer die zweite Methode an; die Luft wird durch große Gebläse dem ruhend aufgehängten Körper entgegengeführt. Der Luftstrom muß dazu aber räumlich und zeitlich sehr gleichförmig sein und so großen Querschnitt haben, daß nicht nur der Körper reichlich von ihm eingehüllt wird, sondern auch die von dem Körper ausgehende Störung an den Grenzen des Luftstroms bereits genügend abgeklungen ist. Anderenfalls hat man Abweichungen zwischen dem Verhalten des Körpers in dem begrenzten Luftstrom gegenüber dem im unendlich ausgedehnten Luftraum zu erwarten.

Der Versuchsluftstrom kann entweder in einen Kanal (Tunnel) geführt werden oder als freier Stahl einen Raum, in dem die Luft ruht, durchfließen. Im ersteren Falle hat man bei parallelen Wänden des Kanals durch die Wandreibung einen Druckabfall in der Strömungsrichtung; seine Wirkung auf voluminöse Körper (z. B. Luftschiffmodelle) ist ähnlich wie der Schwimmauftrieb, bei dem ein Druckabfall nach oben vorhanden ist, liefert also eine wagerechte Kraft, die gleich $V \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$ ist und den Widerstand vermehrt. Man kann diese störende Erscheinung vermeiden, wenn man dem Kanal eine schwache Erweiterung gibt, so daß der Druck längs der Kanalachse gerade konstant wird (genau genommen nur für eine Geschwindigkeit erreichbar). Im Falle des freien Strahles ist der Druck an den Strahlgrenzen konstant, es tritt also die oben geschilderte Schwierigkeit nicht auf; dagegen ist allerdings das brauchbare Gebiet des Strahles dadurch eingeschränkt, daß dieser sich von den Rändern her allmählich mit der umgebenden ruhenden Luft vermischt, während die Reibungsschicht an den Wänden des Kanals viel langsamer in das Innere des Luftstromes vordringt. Wegen der besseren Zugänglichkeit sind die Versuche im Strahl natürlich bequemer auszuführen.

Um einen möglichst gleichmäßigen und von Wirbelungen freien Luftstrom zu erhalten, ist das beste Mittel, daß dieser auf einer kurzen Strecke von einer sehr kleinen Geschwindigkeit auf die Versuchsgeschwindigkeit ge-

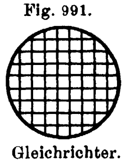
bracht wird, indem man den Kanal von einem sehr weiten Querschnitt in einer geeignet abgerundeten Düse in einen engen Querschnitt (den Versuchsquerschnitt) übergehen läßt (vgl. Fig. 990). Das Druckgefälle $p_1 - p_2$, das von jedem Luftteilchen durchlaufen wird, teilt jedem den gleichen Zuwachs an Bewegungsenergie mit. Es handelt sich also nur noch darum, daß die geringe Bewegungsenergie, mit der die Luft in dem weiten Querschnitt ankommt, nicht allzu ungleich auf die einzelnen Luftteilchen verteilt ist. Ist z. B. das Verhältnis der Geschwindigkeiten 1 : 5, so ist das der Staudrucke (= Bewegungsenergie) 1 : 25; jedes Teilchen erhält also in dem Druckgefälle $^{24}/_{25}$ der nachherigen Energie mitgeteilt; Schwankungen von $^1/_4$ der ankommenden Energie bringen also Schwankungen von 1 v. H. in der endgültigen Energie oder von $^1/_2$ v. H. in der endgültigen Geschwindigkeit. Eines ist dabei aber noch von Wichtigkeit. Alle Drehungen der ankommenden Strömung müssen sorgfältig durch Gleichrichter, d. h. Systeme von parallelen Kanälen (aus gekreuzten Blechen oder dergleichen gebildet, vgl. Fig. 991) ausgeschaltet werden. Eine um eine Achse parallel der Strömungsrichtung rotierende Luftmasse erhält nämlich bei der Einengung ihres Querschnittes auf $1/n$ die n-fache Winkelgeschwindigkeit[1]); da der Durchmesser quer zur Stromlinie im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt, ergibt sich eine Zunahme der Quergeschwindigkeit ($= r\omega$) im Verhältnis $\sqrt{n}$, während die Längsgeschwindigkeit im Verhältnis n zunimmt. Eine Rotation um eine Achse quer zur Stromlinie ergibt im Gegensatz zu dem Vorstehenden Verminderung der Winkelgeschwindigkeit proportional zur Verminderung der Querabmessung[1]), also auf das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-fache; hier wird danach die Störungsgeschwindigkeit $r\omega$ das $1/n$-fache wie vorher, in Übereinstimmung mit der obigen an die Bernoullische Gleichung angeknüpften Betrachtung. Zur Ausgleichung von longitudinalen Geschwindigkeitsunterschieden können im übrigen noch Drahtsiebe vor dem Gleichrichter angebracht werden, nötigenfalls solche, die an verschiedenen Stellen verschiedene Dichte aufweisen.

Fig. 990.



Düse.

Fig. 991.

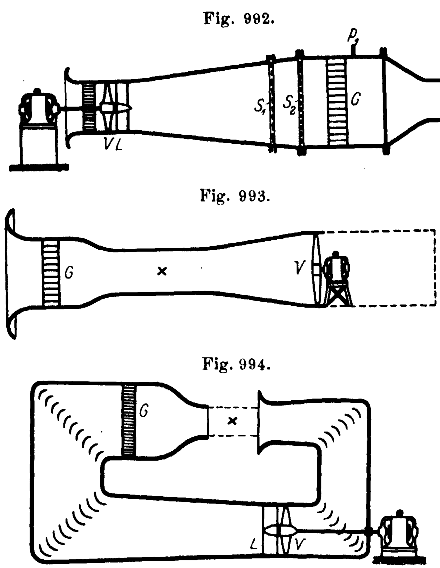


Gleichrichter.

Mehrere empfehlenswerte Anordnungen von Windkanälen sind in Fig. 992 bis 994 dargestellt; × ist die Versuchsstelle. Bei den offenen Bauarten ist zu beachten, daß der austretende Luftstrom nach irgendwelchen Umwegen wieder an die Eintrittsöffnung gelangt. In Fig. 992 ist auch vor dem Schraubengebläse ein Gleichrichter angeordnet, da sonst das Gebläse, wenn es die Wirbel einsaugt, die von dem Luftstrahl in dem Raume hervorgerufen

[1]) Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz, vgl. Kap. XI, § 11.

worden sind, schwankenden Druck liefert. In Fig. 993 ist hinter dem Gebläse ein Käfig angebracht, der ein ruhiges Abströmen der Luft bewirken soll. Bei der geschlossenen Bauart nach Fig. 994 wird der Luftstrom hinter der Versuchsstelle durch einen Trichter wieder aufgefangen, und es entfällt dadurch die sonst erhebliche Belästigung der Beobachter durch Zugwind. Durch die „Diffusoren“ (allmählich erweiterte Kanäle, vgl. § 10, d) wird bei der Bauart nach Fig. 993 und 994 ein beträchtlicher Teil der erzeugten kinetischen Energie zurückgewonnen.



Windkanalanordnungen.

Im Gegensatz zu den Schiffsschleppversuchen existiert bei den Anblasversuchen in Luft keine Regel, durch die die Modellgeschwindigkeit abhängig vom Modellverhältnis festgelegt wäre. Genau genommen müßte allerdings die Reynoldssche Ähnlichkeit beachtet werden. Das ist aber fast in allen Fällen unmöglich, da sich zur Einhaltung der gleichen Reynoldsschen Zahl für ein Modell im Maßstab 1 : 10 die zehnfache Geschwindigkeit des Originals ergeben würde. Abgesehen davon, daß eine solche Geschwindigkeit meist überhaupt unausführbar ist, würde man hierdurch meist bereits in das Gebiet der Kompressibilität (vgl. Kap. X, § 16) kommen, so daß wegen dieses Umstandes die Ähnlichkeit gar nicht erreicht würde. Man muß deshalb auch hier auf genaue Ähnlichkeit in bezug auf Reibung verzichten.

b) Meßtechnisches. Geschwindigkeiten können durch Anwendung der Bernoullischen Gleichung mit Hilfe von Druckunterschieden gemessen werden. Bei den Windkanälen bildet diese Messung die Regel. Man kann hierzu die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ von Fig. 990 verwenden. Statt dessen kann man auch ein Staugerät nach Fig. 867 (§ 7 von Kap. XI) anwenden.

Weitere Geschwindigkeitsmesser, die in der Praxis viel verwendet werden, in der Genauigkeit aber im allgemeinen gegen die vorige Methode zurückstehen, sind die Anemometer, von denen Fig. 995 und 996 zwei Typen, das Flügelradanemometer und das Schalenkreuzanemometer, darstellen. Das entsprechende Instrument für Wassergeschwindigkeiten heißt hydrometrischer Flügel; eine Ausführungsform zeigt Fig. 997. Man beobachtet entweder die Anzahl der von einem Zählwerk angezeigten Umdrehungen für eine bestimmte Zeit, z. B. eine Minute, oder aber die Zeit für eine feste Zahl von Umdrehungen, z. B. 500, die durch ein Signal kenntlich gemacht werden. Alle diese Instrumente bedürfen der Eichung. Bei den Anemometern wurde diese

früher meist auf dem Rundlauf ausgeführt, d. h. auf einem um eine senkrechte Achse umlaufenden Arm, der das Instrument mit der gewünschten Geschwindigkeit in einem großen Kreise herumführt. Hier störte aber, abgesehen von unerwünschten Zentrifugalkräften auf das Werk des Instruments, vor allem der „Mitwind", d. h. die von dem Arm verursachte umlaufende Luftbewegung in dem Raume, durch die eine schwer richtig zu messende Verringerung des Luftweges des Instruments verursacht wird. Deshalb zieht man heute vor, die Instrumente im Windkanal zu eichen. Die hydrometrischen Flügel werden geeicht, indem man sie in kleinen, den Schiffsmodell-Schleppanstalten ähnlichen Wasserrinnen mittels eines Wagens entlang fährt. Diese Eichung ist wesentlich zuverlässiger als die Rundlaufeichung.

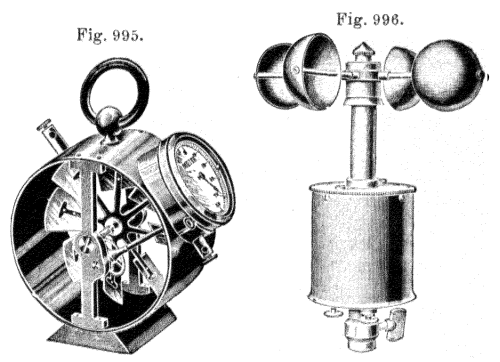


Fig. 995. Flügelrad-Anemometer.

Fig. 996. Schalenkreuz-Anemometer.

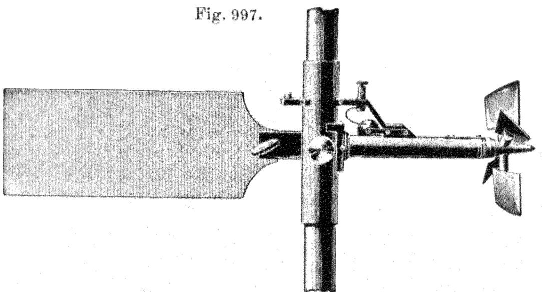


Fig. 997. Hydrometrischer Flügel.

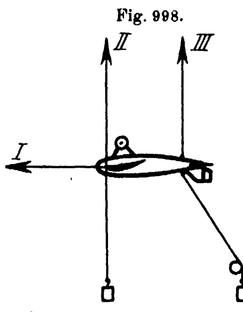
Neuerdings verwendet man auch die Abkühlung von elektrisch geheizten Drähten zur Geschwindigkeitsmessung von Luftströmen. Da der elektrische Leitungswiderstand der Metalle mit der Temperatur veränderlich ist, benutzt man zur Bestimmung der Temperatur gewöhnlich eine passende Brückenschaltung. Entweder stellt man durch Regulierwiderstände auf konstante Temperatur des Drahtes ein und erhält dann eine abgeführte Wärmemenge (= zugeführte Heizenergie), die bei dünnen Drähten sehr nahe der Wurzel aus der Geschwindigkeit proportional ist, oder man arbeitet mit konstantem Heizstrom und sinkender Temperatur, wobei die Abhängigkeit zwischen dem Drahtwiderstand und der Luftgeschwindigkeit empirisch durch eine Eichung ermittelt wird. Die Methode eignet sich besonders für kleine Luftgeschwindig-

keiten, wo die anderen Methoden versagen, sonst aber auch für Messungen sehr nahe an die Körper heran [1]). Bei der Verwendung sehr feiner Drähte lassen sich auch zeitlich sehr schnell veränderliche Vorgänge mit dem Hitzdraht verfolgen [2]).

Über die Modellmessungen sei so viel erwähnt, daß die Modelle, die geschleppt oder angeblasen werden, durch Halteorgane so befestigt zu werden pflegen, daß sie in ihrer Lage festgehalten sind. Die auf sie ausgeübten Kräfte wirken auf Waagehebel, an denen sie gemessen werden. Es gibt sehr verschiedene Möglichkeiten der Anordnung; eine, die sich für Messungen in Luft bewährt hat, ist die folgende:

Das Modell (Fig. 998) ist an drei Drahtsystemen gehalten, von denen eins wagerecht nach vorn und zwei senkrecht nach oben führen. Das erste überträgt den Widerstand und das zweite und dritte zusammen den Auftrieb. Das andere Ende jedes Drahtsystems ist an einem Waaghebel befestigt, an dem die genannten Kräfte beobachtet werden können. Aus dem Verhältnis der Anzeige der zweiten und dritten Waage folgt noch die Lage der resultierenden Auftriebskraft. Das Modell pflegt umgekehrt aufgehängt zu werden, wie Fig. 998 zeigt, damit die Auftriebskraft die Drähte spannt und nicht entlastet. Die Beobachtung geht auf die Weise vor sich, daß zunächst alle Waagen ohne Wind ins Gleichgewicht gebracht werden und nun nach Anstellung des Windes der Unterschied ausgewogen wird. Während der Wägung mit einer Waage werden zweckmäßig die anderen Waagen in der Mittellage festgehalten.

Fig. 998.



Dreikomponenten-Aufhängung.

Druckmessungen erfolgen mit Manometern und Mikromanometern (vgl. Kap. X, § 15). Schwierigkeiten macht dabei unter Umständen die Druckentnahme. Ziemlich einwandfrei ist die Druckentnahme durch Anbohrungen in glatter Wand (vgl. Kap. XI, § 7). Als Drucksonde für das Innere der Flüssigkeit kann man die hintere Öffnung der üblichen Staugeräte benutzen, muß aber dabei darauf achten, daß das Gerät auf wenige Grade genau in der Strömungsrichtung steht. Drucksonden werden am besten geeicht, wenn man sie in einen einwandfreien Parallelstrahl von nicht zu kleinen Abmessungen bringt. Sie sollen dann den Druck der ruhenden Luft in der Umgebung des Strahles anzeigen, oder genauer einen Überdruck von etwa $1/2$ v. H. des Staudruckes des Strahles, da infolge der Vermischungsvorgänge an der Strahloberfläche ein solcher Überdruck im Strahle herrscht [3]) (bei sehr genauen Anemometer- und Staugeräteichungen ist dieser Überdruck ebenfalls zu berücksichtigen!).

---

1) J. M. Burgers und v. d. Hegge-Zijnen haben so die Grenzschichten an ebenen Platten ausgemessen, vgl. Verh. XIII, Nr. 3, 1924. Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam.

2) Vgl. J. M. Burgers, Proc. XXIX, Nr. 4. Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam = Communication Nr. 8 des Labor. f. Aerodyn. und Hydrodyn. Delft; ferner Fage und Johannsen, Roy. Soc. Proc. (A) **116**, 1927.

3) W. Tollmien, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **6**, 468—478, 1926.

Dreizehntes Kapitel.

Methoden zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes und der Dichte [1]).

§ 1. Definitionen. Ausgehend von der Vorstellung, daß ein Körper aus einzelnen Masseteilchen besteht und daß bei mehr oder minder dichter Anordnung derselben in einem bestimmten Volumen eine mehr oder minder große Masse enthalten ist, hat man als Definition der Dichte eines Körpers das Verhältnis von Masse zu Volumen gewählt. Bezeichnet man das Volumen eines Körpers mit V, die in diesem Volumen enthaltene Masse mit m, so ist die Dichte ϱ des Körpers:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \text{(1)}$$

d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Masse. Den reziproken Wert der Dichte, d. h. das von der Masseneinheit eingenommene Volumen bezeichnet man als das „spezifische Volumen" des Körpers.

Aus dieser Definition folgt, daß die Dichte die Dimension $[m\, l^{-3}]$ hat und also, je nach dem für m und V gewählten Maße (Gramm oder Kilogramm; Kubikzentimeter oder Liter usw.), einen verschiedenen Zahlenwert annimmt.

Um von einem Maßsystem unabhängig zu sein, hat es sich als praktisch erwiesen, mit Dichteverhältnissen zu rechnen, d. h. mit dem Quotienten aus der Dichte eines Körpers und der Dichte einer ein für allemal festgelegten Vergleichssubstanz. Dieses Dichteverhältnis ϱ/ϱ_0 ist, wenn man von beiden Substanzen gleiche Volumina betrachtet, gleich dem Verhältnis der Massen. Berücksichtigt man, daß sich an ein und demselben Ort die Massen wie die Gewichte verhalten, so ist das Massenverhältnis m/m_0 gleich dem Gewichtsverhältnis G/G_0. Diese Verhältniszahl bezeichnet man als das spezifische Gewicht eines Körpers. Dies ist nach dieser Definition eine reine Zahl und in seiner Größe unabhängig von dem gewählten Maß- oder Gewichtssystem und nur abhängig von der Wahl der Vergleichssubstanz. Als solche wählt man im allgemeinen Wasser von 4° C; daher ist also das spezifische Gewicht eines Körpers definiert als das Verhältnis des Gewichtes eines Körpers zum Gewicht des gleichen Volumens Wasser von 4° C.

$$\text{Spez. Gew. } s = \frac{\text{Gewicht des Körpers: } G}{\text{Gewicht des gleichen Volumens Wasser: } G_w} = \frac{G}{G_w} \quad \text{(2)}$$

[1]) Bearbeitet von Prof. Dr. H. Senftleben in Breslau.

Die beiden gänzlich verschiedenartigen Größen, spezifisches Gewicht und Dichte, können, wenn man die Dichte in einem geeigneten Maßsystem mißt, zahlenmäßig denselben Wert haben. Es ist:

$$\varrho = \frac{m}{V} \text{ und } s = \frac{G}{G_w} = \frac{m}{m_w}.$$

Benutzt man als Volumeneinheit das Kubikzentimeter und als Masseneinheit das Gramm, so wird die Masse eines Volumens Wasser von 4° durch dieselbe Zahl angegeben wie das Volumen selbst. Aus den letzten Gleichungen sieht man, daß sich dann für ϱ und s dieselbe Zahl ergibt. Dasselbe ist der Fall, wenn man z. B. als Einheiten Kubikmeter und Tonnen nimmt. Benutzt man aber nicht solche Wertepaare der Maßeinheiten, so erhalten s und ϱ verschiedene Zahlenwerte.

Prinzipiell ist auch zu beachten, wenn es auch praktisch nur selten von Bedeutung sein wird, daß 1 ccm Wasser von 4° C nicht genau die Masse eines Gramms hat, sondern nur die von 0,999 973 g[1]). Hieraus folgt, daß die Dichte des Wassers von 4° eben diesen Zahlenwert hat und nicht genau 1 ist. Die kleine hierdurch hervorgerufene Korrektion beeinflußt natürlich entsprechend das Verhältnis der Zahlenwerte von s und ϱ.

Oft wird außer den Begriffen „spezifisches Gewicht" und „Dichte" noch der des „Raumgewichtes" (γ) eingeführt. Dies ist definiert als das Gewicht der Volumeneinheit, ist also gleich $\varrho \cdot g$, wenn g die Fallbeschleunigung bedeutet. Der Zahlenwert von γ wird mit dem der Dichte identisch, wenn man das technische Maßsystem benutzt. (1 g gleich dem Gewicht eines Kubikzentimeters Wasser von 4° C). Dies „Raumgewicht" wird manchmal auch als spezifisches Gewicht bezeichnet. Der oben als spezifisches Gewicht definierte Begriff ist eine reine Zahl und von dem „Raumgewicht" grundsätzlich zu unterscheiden. Bezieht man aber das Raumgewicht analog wie oben die Dichte auf Wasser, so erhält man die von uns als spezifisches Gewicht bezeichnete Größe.

Bei Angaben des spezifischen Gewichtes wird manchmal als Vergleichssubstanz nicht Wasser von 4°, sondern solches von anderer Temperatur ϑ^0 benutzt. Die Reduktion auf 4° erfolgt durch Multiplikation des für ϑ^0 angegebenen Wertes mit dem Werte des auf 4° bezogenen spezifischen Gewichtes des Wassers von ϑ^0.

Die Größe des spezifischen Gewichtes eines Körpers ist abhängig von der Temperatur und dem Druck, unter dem sich dieser befindet. Als Normalwerte gibt man die für eine bestimmte Temperatur (0°) und einen bestimmten Druck (760 mm) geltenden Werte an. Während der Einfluß der Temperatur meist beträchtlich ist, tritt der des Druckes nur bei den Gasen stark hervor; bei diesen spielt die gleichzeitige Angabe der äußeren Umstände eine entscheidende Rolle. Die Umrechnung der bei der Temperatur ϑ und dem Drucke p gemessenen Werte auf den Normalzustand erfolgt bei Gasen auf Grund des Gay-Lussacschen und des Boyle-Mariotteschen Gesetzes nach der Gleichung:

$$\varrho_{0,760} = \varrho_{\vartheta,p} \frac{(1 + \alpha\,\vartheta)\,760}{p}.$$

[1]) Vgl. Kapitel I, § 50: Maß und Messen.

Bei festen Körpern und Flüssigkeiten muß zur Umrechnung auf den Normalzustand der Ausdehnungskoeffizient bekannt sein, mit diesem ist das Verhältnis der Dichten bei 0^0 und ϑ^0, d. h. $\varrho_0 : \varrho_\vartheta$ zu berechnen und durch Multiplikation des bei ϑ^0 gemessenen Wertes mit diesem Quotienten die Reduktion auszuführen.

Um bei der Bestimmung der Dichte von Gasen von der Angabe der Werte der Temperatur und des Druckes, bei denen die Messung erfolgte, möglichst unabhängig zu sein, bezieht man die Dichte eines Gases häufig auf ein anderes Gas als Vergleichssubstanz, und zwar auf ein Gas von gleicher Temperatur und gleichem Druck. Da sämtliche Gase, falls sie sich nicht in der Nähe des Verflüssigungszustandes befinden, annähernd den Boyle-Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzen folgen, haben die äußeren Umstände (Druck und Temperatur) auf alle Gase annähernd denselben Einfluß. Setzt man also:

$$\text{Gasdichte } (d) = \frac{\text{Dichte des Gases (Druck } p \text{ und Temperatur } \vartheta)}{\text{Dichte des Vergleichsgases } (p \text{ und } \vartheta)},$$

so ist die so definierte „Gasdichte" eine für ein bestimmtes Gas annähernd konstante Größe. Sie ist nur insofern Änderungen unterworfen, als die Abweichungen der beiden Gase von den oben genannten Gesetzen, d. h. vom idealen Zustand, verschiedene sind. Als Vergleichsgas benutzt man in den meisten Fällen Luft, bei genauen Messungen Sauerstoff. Hat man es mit Dämpfen zu tun, so werden die Abweichungen vom idealen Zustand beträchtlich, so daß die Dampfdichte, wenn man sie analog der Gasdichte definiert, mehr als diese von den äußeren Umständen abhängig sein wird.

Die Methoden [1]) zur Bestimmung der Dichte und des spezifischen Gewichtes müssen sich auf Gleichung (1) oder (2) stützen. Da es bei den Messungen nur auf die Feststellung des Zahlenwertes ankommt, so ist es gleichgültig, ob eine Methode das spezifische Gewicht oder die Dichte ergibt. Nach den obigen Ausführungen ist eine Umrechnung, wenn überhaupt nötig, ohne weiteres durch Wahl geeigneter Einheiten möglich. Im folgenden Paragraphen werden zunächst die für feste und flüssige Körper anzuwendenden Methoden angegeben; die Verfahren zur Messung der Gas- oder Dampfdichte sind vielfach gänzlich anderer Natur und darum erst im nächstfolgenden Paragraphen beschrieben.

§ 2. Methoden zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes und der Dichte von festen und flüssigen Körpern.

a) Wägung und Volumenbestimmung. Durch Messung von Masse und Volumen der untersuchten Substanz ergibt sich unmittelbar die Dichte auf Grund von Gleichung (1). Die Bestimmung der Masse erfolgt mit der Waage, die des Volumens im einfachsten Falle durch Ausmessung der Dimensionen

---

[1]) Von diesen ist im folgenden meist nur das prinzipiell Wichtigste angegeben. Über die experimentelle Durchführung der Methoden und über die bei exakten Messungen zu berücksichtigenden Fehlerquellen und Korrektionen siehe z. B. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, in dem auch ein wesentlicher Teil der Literatur enthalten ist.

des Körpers, wenn dieser sich in regelmäßige Formen bringen läßt. Genauer ist die Volumenbestimmung für feste Körper durch Messung des von ihnen verdrängten Volumens einer Flüssigkeit. Das Volumen einer solchen wird durch Apparate, wie Meßglas und Pipette, oder durch Wägung ermittelt.

Zur genauen Dichtebestimmung verwendet man zweckmäßig ein Pyknometer; hierunter versteht man ein im allgemeinen aus Glas hergestelltes Gefäß von ganz bestimmtem, durch eine Marke (m) genau abgegrenztem Volumen. Zur Dichtebestimmung eines festen Körpers wägt man das Pyknometer einmal mit Wasser gefüllt (m_1) und einmal, wenn es den Körper enthält und Wasser bis zur Marke nachgefüllt ist (m_2). Ist die Masse des Körpers m, so ist die Masse des von ihm verdrängten Wassers $m_1 - m_2 + m$. Division dieser Größe durch die Dichte des Wassers ergibt das Volumen des Körpers, und man hat damit alle zur Dichtebestimmung erforderlichen Größen. Für in Wasser lösliche Substanzen verwendet man andere Flüssigkeiten bekannter Dichte. Zur Messung der Dichte von Flüssigkeiten wägt man das Pyknometer zunächst leer (m_1), dann mit destilliertem Wasser (m_2) und schließlich mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (m_3) gefüllt. $m_3 - m_1$ ergibt die Masse der Flüssigkeit und $\frac{m_2 - m_1}{\varrho_w}$ das Volumen derselben (bei Vernachlässigung des Gewichtes der Luft gegenüber dem der Flüssigkeiten), wobei ϱ_w die Dichte des zur Füllung verwendeten Wassers ist. Bei genauen Messungen ist die eben erwähnte Vernachlässigung durch Reduktion der Wägungen auf das Vakuum auszuschalten.

Gebräuchliche Formen von Pyknometern sind in den Fig. 999, 1000, 1001 und 1002 dargestellt. Die Art der Anwendung ist ohne weiteres ersichtlich, die beiden letzten Apparate sind nur für Flüssigkeiten brauchbar.

Für sehr exakte Messungen sind die Volumenänderungen des Gefäßes mit der Temperatur zu berücksichtigen; auch ist luftfreies Wasser zu verwenden und darauf zu achten, daß an den Körpern keine Luftblasen haften [1]).

Darf der zu untersuchende Körper nicht mit einer Flüssigkeit in Berührung kommen, so muß man zur Volumenbestimmung sogenannte Volumenometer verwenden. Diese Instrumente gestatten es, das Volumen von Räumen, welche nicht mit einer Flüssigkeit ausgewogen werden können, zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzt man das Gefäß mit dem unbekannten Volumen V_1 in Verbindung mit einem Gefäß bekannten (z. B. durch Auswägung) Volumens V_0 und mißt den Druck einer in den Gefäßen befindlichen Gasmenge, einmal, wenn sie sich in V_0 allein befindet, und einmal, wenn sie sich auf $V + V_0$ verteilt. Sind die gemessenen Drucke p_0 und p_1, so ist:

$$p_0 V_0 = p_1 (V_1 + V_0) \quad \text{oder} \quad V_1 = V_0 \frac{p_0 - p_1}{p_1}.$$

Ebenso kann man natürlich in der Weise verfahren, daß man das Gas von dem Volumen $V_0 + V_1$ (z. B. durch eine Sperrflüssigkeit) auf das Volumen V_1

---

[1]) W. Block, Zeitschr. für angew. Chemie 33, 198, 1920; R. Saar, Chem.-Ztg. 46, 433, 1922.

komprimiert; dann ändert sich die Formel in leicht ersichtlicher Weise. — Ist das Volumen des leeren Gefäßes gemessen, so bringt man den Körper unbekannten Volumens V_x hinein und wiederholt die Messung (V_2). Die Differenz $V_2 - V_1$ ergibt V_x.

b) Auftriebsmessung. Auf das Archimedische Prinzip, nach dem ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper so viel an Gewicht verliert, wie die

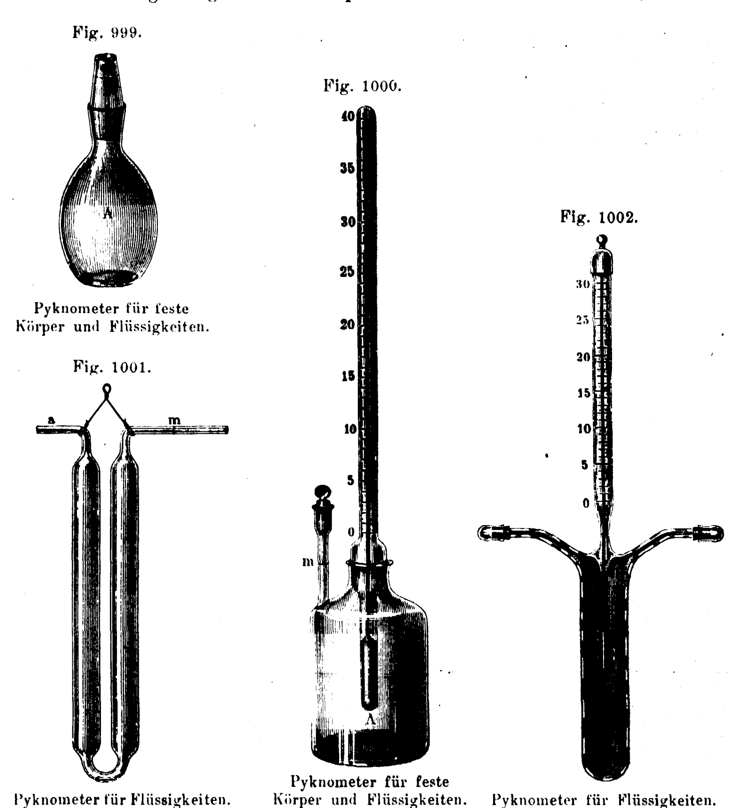


Fig. 999. Pyknometer für feste Körper und Flüssigkeiten.

Fig. 1000. Pyknometer für feste Körper und Flüssigkeiten.

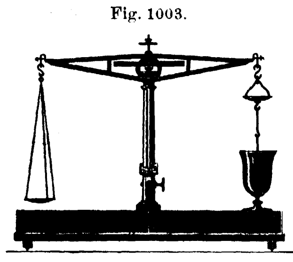
Fig. 1001. Pyknometer für Flüssigkeiten.

Fig. 1002. Pyknometer für Flüssigkeiten.

verdrängte Menge Flüssigkeit wiegt, läßt sich eine Reihe von Methoden zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes gründen. Man wägt den zu untersuchenden Körper einmal in Luft und einmal, wenn er in eine Flüssigkeit, meist Wasser, getaucht ist. Sind die erhaltenen Gewichte G_1 und G_2, so ist $\frac{G_1}{G_1 - G_2}$ das Verhältnis des Gewichtes des Körpers zu dem der gleichen Menge Flüssigkeit, d. h. falls als solche Wasser benutzt wurde, das spezifische Gewicht des Körpers. Läßt sich als Eintauchflüssigkeit kein Wasser benutzen

so folgt durch Multiplikation mit der Dichte der Flüssigkeit ohne weiteres das auf Wasser bezogene spezifische Gewicht des Körpers.

Fig. 1003.



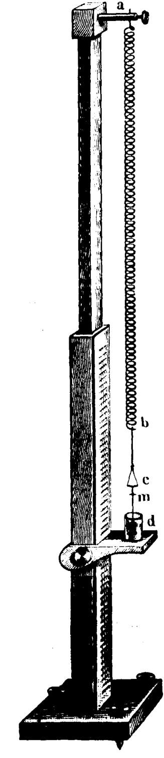
Hydrostatische Waage.

Die Ausführung der Messung kann prinzipiell mit jeder Waage geschehen, wenn man an der einen Waagschale eine Vorrichtung zum Aufhängen der untersuchten Substanz anbringt. (Hydrostatische Waage, Fig. 1003).

Man wägt den Körper einmal in Luft und einmal in Wasser getaucht, unter Berücksichtigung des Gewichtes und des Auftriebes der Aufhängevorrichtung.

Ist der zu untersuchende Körper spezifisch leichter als die Flüssigkeit, in der sein Auftrieb bestimmt werden soll, so beschwert man ihn mit einem schwereren Körper, dessen Gewichtsverlust für sich allein bestimmt und vom Gesamtgewichtsverlust abgezogen wird. Pulverförmige und poröse Körper schmilzt man in Paraffin, Vaselin oder ähnliche Substanzen ein, deren Auftrieb vorher gesondert bestimmt wurde, und mißt den Gesamtauftrieb [1]).

Fig. 1004.



Federwaage nach Jolly.

Läßt sich aus experimentellen Gründen die Waage nicht in der oben angegebenen Weise zu einer „hydrostatischen" umändern, so kann man in der Weise verfahren, daß man ein Gefäß mit Wasser auf die eine Waagschale stellt und die Waage ins Gleichgewicht bringt. Hängt man dann den zu untersuchenden Körper von außen in das Wasser hinein, so wirkt auf die Waagschale mit dem Wassergefäß eine dem Auftrieb entgegengesetzt gerichtete, ihm an Größe gleiche Reaktionskraft nach unten. Diese kompensiert man durch Auflegen von Gewichten und erhält so die Größe des Auftriebs.

Statt einer Hebelwaage kann man zu diesen Messungen auch eine Federwaage verwenden, wie sie in Fig. 1004 (Jolly) abgebildet ist.

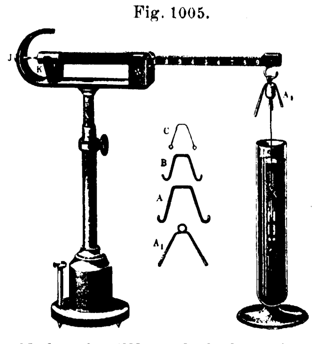
Von den beiden an einer langen Feder *b* hängenden Waagschalen *c* und *d* taucht die untere *d* stets in ein Gefäß mit Wasser, welches mit ihr gehoben und gesenkt werden kann. Vermittelst einer Marke ***m*** kann die Verlängerung der Feder an einer Skala

[1]) Betreffs anderer Methoden für poröse Körper vgl. auch: P. Fillanger, Mitt. techn. Versuchsamt Wien **10**, 33, 1921; H. Romanowicz; ebenda **10**, 105, 1921; A. Schmolke, Stahl und Eisen **42**, 1237, 1922.

abgelesen werden. Sind die Verlängerungen, wenn der Körper auf der oberen bzw. unteren Waagschale liegt, v_1 bzw. v_2, so ist das spezifische Gewicht gleich $\frac{v_1}{v_1 - v_2}$, wobei Proportionalität zwischen Gewicht und Verlängerung vorausgesetzt ist.

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten werden die hydrostatischen Waagen meist in der Weise verwandt, daß man den Auftrieb eines von der Flüssigkeit nicht angreifbaren (meist aus Glas bestehenden) Körpers in Wasser und in der Flüssigkeit bestimmt. Das Verhältnis der so erhaltenen Werte für den Auftrieb ergibt das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Die Messung kann mit einer der eben beschriebenen Waagen erfolgen; häufig bedient man sich auch der Mohrschen Waage, besonders in der Form, die ihr durch Westphal gegeben worden ist (Fig. 1005).

Fig. 1005.



Mohrsche (Westphalsche) Waage.

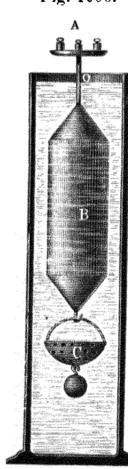
Der an einem Haken hängende Tauchkörper besteht aus einem kleinen Thermometer, welches zugleich die Temperatur der Flüssigkeit angibt. Ihm wird durch das Gegengewicht K das Gleichgewicht gehalten, dessen genaue Einstellung durch das Gegenüberstehen der Spitzen (bei J) festgestellt wird. Die (gleichen) Gewichte A_1 und A sind gleich dem Auftrieb des Thermometers in Wasser, die Reiter B und C $^1/_{10}$ bzw. $^1/_{100}$ des Gewichtes von A_1. Taucht das Thermometer in Wasser von 4°, so ist durch Anhängen des Gewichtes A_1 (siehe Fig. 1005) Gleichgewicht zu erreichen. Wird an die Stelle des Wassers eine Flüssigkeit unbekannten spezifischen Gewichtes gebracht, so ist eine Veränderung des angehängten Gewichtes erforderlich, um wieder Gleichgewicht zu erzielen. Ist die Flüssigkeit leichter oder schwerer als Wasser, so muß ein geringeres oder größeres Gewicht angebracht werden. Um mit möglichst wenig Reitergewichten auszukommen, ist der Wagebalken in zehn Teile geteilt und an den Teilstellen mit Kerben versehen, in die man die Gewichte A, B oder C hängen kann. Tritt Gleichgewicht ein, wenn man das Gewicht A z. B. auf die Kerbe 8 hängt, so folgt hieraus, daß der Auftrieb des Tauchkörpers in der Flüssigkeit 0,8 des Auftriebs in Wasser beträgt, d. h. daß das spezifische Gewicht der Flüssigkeit 0,8 ist. Ganz analog geben die Gewichte B und C die zweite und dritte Dezimale des spezifischen Gewichtes an. Ist die Flüssigkeit schwerer als Wasser, so sind die Einer durch die Zahl der am Thermometerhaken hängenden Reiter vom Gewichte A bestimmt. Diese Methode ist, bei Berücksichtigung der möglichen Fehlerquellen, einer sehr großen Genauigkeit fähig[1]). Zu beachten ist vor allem, daß der Draht, an dem der

[1]) W. Block, Chem.-Ztg. 1917, S. 641; Zeitschr. f. Instrkde. 38, 40 ff., 1918.

Tauchkörper hängt, sehr dünn ist, damit die Störungen in der Oberfläche und die Unregelmäßigkeiten, welche infolge der Benetzung des Drahtes auftreten können, recht gering sind. Temperaturschwankungen während der Messung können Fehler hervorrufen und sind nach Möglichkeit zu vermeiden. Bei der Untersuchung sehr verdünnter Lösungen lassen sie sich durch einen von **Mie**[1]) angegebenen Kunstgriff ausschalten. Mie benutzt als Tauchkörper ein mit destilliertem Wasser gefülltes Glasgefäß, das durch eine kapillare Öffnung mit der zu messenden Flüssigkeit kommuniziert. Bei Temperaturschwankungen tritt etwas Wasser aus dem Gefäß aus oder in dasselbe hinein.

Ebenfalls auf den Auftriebsgesetzen beruhen die Senkwaagen und Aräometer, welche im allgemeinen zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten, zum Teil aber auch von festen Körpern Verwendung finden. Für beide Zwecke ist die in Fig. 1006 abgebildete Nicholsonsche Senkwaage zu brauchen[2]). An einem Hohlkörper B aus Messing ist unten ein Sieb C und oben an einem dünnen Stab, der bei 0 eine Marke trägt, eine Schale A angebracht. Auf diese werden Gewichte gelegt, bis der Apparat bis zur Marke 0 in Wasser eintaucht (G_1). Darauf wird der zu untersuchende feste Körper mit so viel Gewichten (G_2) auf den Teller A gelegt, daß die gleiche Einstellung erzielt wird. Bringt man sodann den Körper in das Sieb C, und ist jetzt ein Gewicht G_3 erforderlich, damit der Apparat bis 0 eintaucht, so ist $G_1 - G_2$ das Gewicht des Körpers in Luft, $G_1 - G_3$ dasselbe in Wasser, also das spezifische Gewicht:

Fig. 1006.



Nicholsonsche Senkwaage.

$$\frac{G_1 - G_2}{G_3 - G_2}.$$

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten bestimmt man die Gewichte, welche auf die Schale A aufgelegt werden müssen, damit das Instrument bis 0 eintaucht, einmal, wenn es in Wasser, und einmal, wenn es in der unbekannten Flüssigkeit schwimmt. Sind die so erhaltenen Werte G_1 und G_2, und ist G das Gewicht des Instrumentes, so ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit:

$$\frac{G + G_2}{G + G_1}.$$

Die zuletzt beschriebene Methode der Messung mit der Nicholsonschen Senkwaage beruht auf der Vergleichung der Gewichte von gleichen Volumina der Flüssigkeit und des Wassers. Umgekehrt kann man aber auch die Volumina von Flüssigkeit und Wasser bei gleichem Gewicht des eingetauchten Körpers miteinander ins Verhältnis setzen und daraus das spezifische Gewicht ermitteln. Dies geschieht bei den Aräometern[3]). Diese bestehen in der Regel aus einer zylindrischen Glasröhre, die sich unten erweitert und

---

[1]) G. Mie, Boltzmannfestschrift 1904, S. 326.
[2]) H. Rebenstorff, Physik. Zeitschr. 8, 910, 1907.
[3]) J. Domke und E. Reimerdes, Handbuch der Aräometrie. Berlin 1912.

in der sich etwas Quecksilber befindet, um zu erreichen, daß das Aräometer aufrecht schwimmt. Noch zweckmäßiger enthält es ein Thermometer, dessen Kugel die nötige Beschwerung liefert (Fig. 1007). In einer Flüssigkeit wird es je nach deren spezifischem Gewicht mehr oder weniger tief einsinken. An der oberen dünnen Röhre ist eine Teilung angebracht, die man an der Stelle, an der die Skala aus der Flüssigkeit heraustritt, abliest. Je dünner das Skalenrohr im Verhältnis zum unteren Gefäß ist, um so stärker wird sich eine Änderung des spezifischen Gewichtes an ihm bemerkbar machen, d. h. um so empfindlicher wird das Instrument. Das spezifische Gewicht ist hierbei umgekehrt proportional dem eingetauchten Volumen. Ist die Skala in Volumenteilen geeicht, so nennt man die Instrumente Volumeter. Um die Umrechnung der Volumetergrade in spezifisches Gewicht zu vermeiden, haben Gay-Lussac und vorher schon Brisson und G. G. Schmidt Aräometer konstruiert, welche direkt das spezifische Gewicht abzulesen gestatten. Sie werden manchmal Densimeter genannt und unterscheiden sich von den Volumetern nur durch die Skala. Die Eichung von Aräometern erfolgt empirisch durch Eintauchen in Flüssigkeiten bekannten spezifischen Gewichtes. Meist beschränkt man sich, damit das Instrument nicht zu lang wird, auf bestimmte Meßbereiche.

Fig. 1007.



Skalen-aräometer.

Ein Fehler, unter welchem sowohl die Aräometer wie überhaupt die teilweise in eine Flüssigkeit eintauchenden Apparate leiden, ist der beträchtliche Einfluß der Kapillarität. Eingehende Untersuchungen über diese Frage sind von Lohnstein durchgeführt worden, welcher auch ein Aräometer konstruiert hat, das diesen Fehler vermeidet[1]). Bei ihm besteht der Tauchkörper aus einem Glasgefäß, welches oben horizontal abgeschliffen ist und so weit belastet wird, daß diese Oberfläche mit der der Flüssigkeit gerade in der Horizontalebene liegt. Eine andere Methode, um die Kapillareinflüsse bei Aräometern zu vermeiden, ist die, daß man ganz untergetauchte Aräometer verwendet. Von Guglielmo ist ein Aräometer konstruiert worden, welches bis zur Berührung mit dem Boden einsinkt und sich in eine gegen den Boden geneigte Lage einstellt. Diese hängt außer von der Form und von dem Gewicht des Instrumentes vom Auftrieb und damit von der Dichte der Flüssigkeit ab, welche also durch Messung des Neigungswinkels ermittelt werden kann. Von anderen Abänderungen des Aräometerprinzips seien nur kurz solche erwähnt, bei denen die zu messende Flüssigkeit (unter Umständen auch der feste Körper) in das Aräometer gefüllt wird. Sie haben den Vorteil, daß meist nur sehr geringe Substanzmengen zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes erforderlich sind.

Für Spezialzwecke, z. B. zur Bestimmung der Zusammensetzung von Flüssigkeitsgemischen, werden Aräometer mit besonderen Skalen hergestellt,

[1]) T. Lohnstein, Zeitschr. f. Instrkde. **14**, 164, 1894.

an welchen man direkt die gesuchten Werte ablesen kann (Alkoholometer, Saccharometer usw.).

Im technischen Gebrauch haben sich für die Angabe des spezifischen Gewichtes auf der Aräometerskala noch eine Reihe von willkürlichen Skalen, z. B. in Baumégraden eingebürgert. Da sie heute noch häufig benutzt werden, sind einige zusammen mit den dazugehörigen Werten des spezifischen Gewichtes in folgender Tabelle zusammengestellt[1]).

Spez. Gewicht	Baumé	Beck	
0,8	46,3	42,5	leichter als Wasser
0,9	26,1	18,9	
1,0	10,0	0,0	
1,0	0,0	0,0	schwerer als Wasser
1,1	13,2	15,4	
1,2	24,2	28,3	
1,3	33,4	39,2	
1,4	41,3	48,6	
1,6	54,2	63,7	
1,8	64,2	75,6	

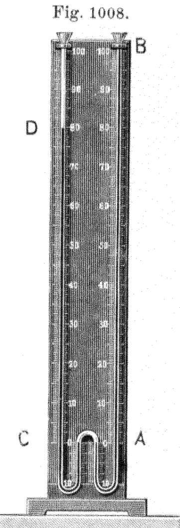
Auf dem Prinzip des Aräometers beruhen auch die Messungen nach der „Schwebemethode", bei der aus dem „Schweben" eines festen Körpers in einer Flüssigkeit auf die Gleichheit des spezifischen Gewichtes geschlossen wird. Für Flüssigkeiten benutzt man die Wilsonschen Glaskugeln, d. h. kleine gläserne Hohlkörper verschiedener Dichte. Wirft man diese Körper in eine Flüssigkeit, so werden sie teils untersinken, teils oben schwimmen. Nur derjenige wird annähernd schweben, dessen spezifisches Gewicht dem der Flüssigkeit am nächsten kommt. Eine Verbesserung der Methode stammt von Warrington[2]). Dieser benutzt ein aräometerähnlich geformtes Gefäß, an welches so viel geeichte Platingewichte gehängt werden, bis es in der Flüssigkeit schwebt[3]). — Für feste Körper wird die Schwebemethode[4]) in der Weise verwandt, daß man eine Mischung aus geeigneten Flüssigkeiten herstellt, in welcher der zu untersuchende Körper gerade schwebt, und dann das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bestimmt. Diese Methode ist auch für kleine, sogar pulverförmige Körper brauchbar; jedoch ist es nicht immer leicht, geeignete Flüssigkeiten zu finden; aus diesem Grunde ist die Methode auch nur für nicht allzuschwere Substanzen, bis zu einem spezifischen Gewicht von ungefähr fünf herauf, zu brauchen[5]).

c) Hydrometer. Diese Methode, bei der jede Wägung vermieden wird und eine Längenmessung erforderlich ist, beruht darauf, daß die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen, welche denselben Bodendruck hervorrufen, sich umgekehrt wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten verhalten. Fig. 1008 zeigt einen Apparat, mit dem derartige Messungen vorgenommen werden

[1]) Betr. genauerer Angaben, auch über andere Aräometerskalen, s. Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen.
[2]) A. W. Warrington, Phil. Mag. 48, 498, 1899.
[3]) Vgl. A. Ångström und H. Pettersson, Zeitschr. f. Instrkde. 37, 177, 1917.
[4]) J. L. Andreae, Zeitschr. f. phys. Chemie 76, 491, 1911.
[5]) Näheres über geeignete Flüssigkeiten siehe z. B. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik.

können. Das Verhältnis der durch die Längen AB und CD gemessenen Drucke gibt das Verhältnis der spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Als eine derselben benutzt man meist Wasser. Die Längenmessung geschieht an einer Skala; wenn größere Genauigkeit erstrebt wird, mit einem Kathetometer.

Fig. 1008.



Apparat zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten.

§ 3. Methoden zur Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen[1]**.** a) Wägung und Volumenbestimmung. Die Masse des zu untersuchenden Gases (oder Dampfes) wird in der Weise bestimmt, daß man einen Glaskolben, dessen Volumen V vorher durch Auswägung mit einer Flüssigkeit ermittelt ist, mit dem Gase bis zu einem gemessenen Drucke p_1 füllt und ihn dann wägt (m_1). Ergibt eine zweite, bei dem Gasdruck p_2 vorgenommene Wägung die Masse m_2, so ist die Masse M des beim Druck p_1 im Kolben enthaltenen Gases gleich $\frac{(m_1 - m_2) p_1}{p_1 - p_2} = M$. Die Dichte beim Druck p_1 ist $\frac{M}{V}$. Will man die auf die Luft bezogene Gasdichte ermitteln, so bestimmt man die Masse der Luft (Index L) und die des Gases (Index G) bei zwei Drucken und erhält:

$$d = \frac{(m_{1G} - m_{2G})\ (p_{1L} - p_{2L})}{(p_{1G} - p_{2G})\ (m_{1L} - m_{2L})} \cdot \frac{p_{1G}}{p_{1L}}.$$

Ist vollkommenes Evakuieren des Ballons möglich, so sind nur drei Wägungen erforderlich, da m_{2G} und m_{2L} identisch werden.

Will man das Auspumpen vermeiden und bei konstantem Druck arbeiten, so wägt man den Kolben mit Luft (m_1), mit dem zu untersuchenden Gas (m_2) und mit Wasser gefüllt (m_3). Sind m_W, m_G, m_L und ϱ_W, ϱ_G, ϱ_L die Massen bzw. die Dichten von Wasser, Gas und Luft, so ist: $m_G = m_2 - m_1 + m_L$. Ferner ist:

$$m_L = V \cdot \varrho_L = \frac{m_W - m_L}{\varrho_W - \varrho_L} \cdot \varrho_L = \frac{m_3 - m_1}{\varrho_W - \varrho_L} \cdot \varrho_L.$$

Für die gesuchte Gasdichte d ergibt sich:

$$d = \frac{m_G}{m_L} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} \frac{\varrho_W - \varrho_L}{\varrho_L} + 1,$$

oder, wenn ϱ_L gegen ϱ_W vernachlässigt wird,

$$d = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} \frac{\varrho_W}{\varrho_L} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Erfolgen die Messungen mit Luft und Gas nicht unter gleichen Temperatur- und Druckverhältnissen, sondern bei den Temperaturen bzw. Drucken ϑ_L, ϑ_G

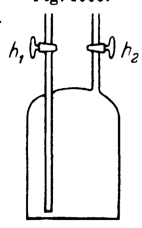
[1]) Eine ausführliche Behandlung dieser Methoden s. z. B. Stähler, Handb. d. Arbeitsmethoden d. anorg. Chemie 3 (Artikel von A. Eucken. Berlin 1913/14).

bzw. p_L, p_G, so ist eine Reduktion erforderlich, die (analog dem auf S. 1190 Gesagten) zu der Formel führt:

$$d = \left[\frac{(m_2 - m_1)\varrho_W}{(m_3 - m_1)\varrho_L} + 1\right]\frac{p_L(1 - \alpha\vartheta_G)}{p_G(1 - \alpha\vartheta_L)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Als Meßkolben benutzt man mit Vorteil Gefäße von der in Fig. 1009 angegebenen Art. Die Füllung geschieht, je nachdem das zu untersuchende Gas schwerer oder leichter als Luft ist, durch den Hahn h_1 oder h_2.

Fig. 1009.



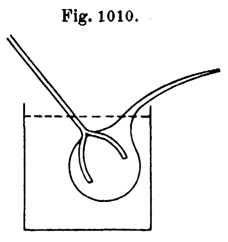
Gefäß zur Gasdichtebestimmung.

Soll diese Methode zu größter Genauigkeit gesteigert werden, so muß bei den Wägungen der Auftrieb, ferner die Ausdehnung des Glases bei Temperaturschwankungen sowie die Zusammendrückung des Gefäßes durch den äußeren Druck berücksichtigt werden. Weitgehend unabhängig wird man von einem Teil dieser Fehler, wenn man als Gegengewicht einen möglichst gleichgroßen Ballon benutzt, der bewirkt, daß einige der genannten Fehler sich bei der Messung kompensieren. — Nach dieser Methode sind zuerst von Regnault Bestimmungen des spezifischen Gewichtes der Luft mit großer Genauigkeit ausgeführt worden.

Läßt sich das zu untersuchende Gas verdichten, oder kann man es (wie z. B. CO_2 in Kalilauge) von einer andern Substanz absorbieren lassen, so kann die Dichtebestimmung in der Weise durchgeführt werden, daß man den Gasinhalt eines Kolbens von bekanntem Volumen kondensiert oder absorbiert und dann durch Wägung seine Masse ermittelt.

Zur Bestimmung der Dichte von Dämpfen auf Grund der gleichen Überlegungen verfährt man nach Dumas (1827) folgendermaßen: Ein Glaskolben mit angeblasener, am Ende zu einer Spitze ausgezogener Röhre (Fig. 1010) wird zunächst mit Luft gefüllt gewogen (m_1). Sodann füllt man einige Tropfen einer Flüssigkeit, deren Dampf untersucht werden soll, in den Kolben und bringt diesen mit einem geeigneten Halter in ein Heizbad, dessen Temperatur wesentlich über dem Siedepunkt der Flüssigkeit liegt [1]). Sobald alle Flüssigkeit verdampft ist und an der Spitze kein Dampf mehr austritt, der Druck desselben also gleich dem äußeren Luftdruck ist, schmilzt man die Spitze zu. Nach dem Abkühlen, bei dem sich der Dampf im Kolben kondensiert, wägt man wieder (m_2). Bricht man dann unter Wasser die Spitze des Kolbens ab, so steigt infolge des in ihm herrschenden Unterdruckes dieses in ihn hinein und füllt ihn fast ganz aus. Eine Wägung ergibt jetzt m_3, die Masse des mit Wasser gefüllten Ballons. Mißt man noch Temperatur ϑ_1 und Druck p_1 bei der Wägung, sowie Tempe-

Fig. 1010.



Kolben zur Bestimmung der Dampfdichte nach Dumas.

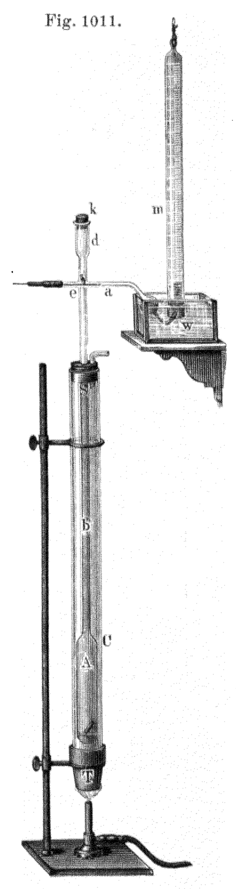
[1]) Dies ist erforderlich, damit man wenigstens annähernd die idealen Gasgesetze auf den Dampf anwenden kann; auch ist die bei höheren Temperaturen eintretende Vergrößerung der Verdampfungsgeschwindigkeit in vielen Fällen von Wichtigkeit.

ratur ϑ_2 des Heizbades und äußeren Luftdruck p_2 beim Zuschmelzen, so sind alle Größen bestimmt, mit denen man auf Grund von Gleichung (4) S. 1200 die Dichte des Dampfes ermitteln kann.

Häufig ist es von Vorteil, wenn man das Gewicht des Dampfes nicht zusammen mit dem des Ballons zu bestimmen braucht. Man benutzt dann einen Ballon mit kleinem Ansatzgefäß und kondensiert, nachdem der Ballon mit Dampf bekannten Druckes gefüllt ist, den Dampf in das Ansatzgefäß. Sodann schmilzt man es ab und wägt die in ihm kondensierte Substanz [1]).

Die Dumassche Methode hat vor anderen Methoden den Vorteil, daß die gesamte Dampfmenge sich unter ganz konstanten, genau bestimmbaren Temperatur- und Druckverhältnissen befindet. Dies ist besonders für die Untersuchung dissoziierender Gase von Wichtigkeit. Für spezielle Verwendungszwecke, z. B. für hohe Temperaturen, ist diese Methode mehrfach abgeändert und ausgebaut worden.

Fig. 1011.



Dampfdichte nach Victor Meyer.

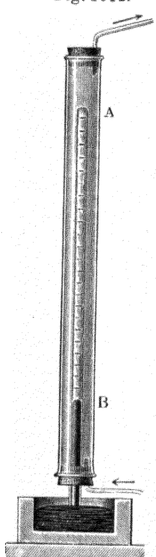
Während bei der eben beschriebenen Methode Volumen und Druck des Dampfes durch Balloninhalt und äußeren Druck gegeben waren und die Masse der Substanz sich danach einstellte, wird diese bei der Methode von Viktor Meyer (1878) vorher abgewogen, verdampft und dann Volumen und Druck ermittelt. Diese Volumenbestimmung wird nicht direkt am Dampf ausgeführt, sondern man läßt diesen eine andere, mit ihm natürlich nicht reagierende Substanz (Luft, Stickstoff, Edelgase oder dgl.) verdrängen und mißt das Volumen der verdrängten Substanz. Die Versuchsanordnung ist aus Fig. 1011 zu ersehen.

Ein dünnwandiges Glaskügelchen oder ein kleines mit einem Schliff versehenes Gefäßchen mit der abgewogenen Menge (m) der Substanz wird in den mit einem dünnen Zuleitungsrohr b versehenen Kolben A, dessen Boden mit etwas Asbest geschützt ist, geworfen. Entweder geschieht dies durch schnelles Lüften des Stopfens k oder mit irgend einer Vorrichtung, welche die vor Beginn des Versuches oben bei e in das Rohr gebrachte Substanz in den Kolben hineinfallen läßt, ohne daß ein Öffnen des Apparates erforderlich ist. Eine in das Gefäß C gebrachte Flüssigkeit von geeignetem Siedepunkt [2])

[1]) A. Schulze, Physik. Zeitschr. **14**, 922, 1913.
[2]) Vgl. die Anmerkung auf S. 1200.

wird vorher zum Sieden gebracht, so daß der Kolben A erwärmt ist und die Substanz in ihm schnell verdampft, wobei das Kügelchen platzt bzw. der Schliff sich öffnet. Das durch den sich entwickelnden Dampf im Kolben A verdrängte Gas entweicht durch a und wird in m aufgefangen und sein Volumen an der Teilung des Rohres abgelesen. Das auf diese Weise oder mit anderen Auffangvorrichtungen gemessene Volumen v ist gleich dem des im Kolben entwickelten Dampfes bei Zimmertemperatur ϑ und einem Druck p, welcher gleich dem äußeren Luftdruck, vermindert um das Gewicht der Wassersäule und den Dampfdruck des Wassers in m ist. Diese Methode, welche den Vorteil einer sehr schnellen Messung bietet, ist für Spezialzwecke (verminderter Druck, hohe Temperatur) verschiedenen Umänderungen unterworfen worden[1]). Ein gewisser Nachteil ist der Umstand, daß der Dampf infolge der Diffusion nicht unter überall gleichen genau angebbaren Temperatur- und Druckverhältnissen steht, so daß eine Messung dissoziierender Substanzen unter Umständen nicht möglich ist. Die Berechnung der (absoluten) Dichte erfolgt nach Formel (1) nach Reduktion des gemessenen Volumens auf den Normalzustand:


Fig. 1012.



Apparat zur Bestimmung der Dampfdichte nach Hofmann.

$$\varrho = \frac{m(1 + \alpha\vartheta) \cdot 760}{V \cdot p}.$$

Bei der Methode zur Messung der Dampfdichte nach Gay-Lussac (1812), Hofmann (1867) wird die Substanz ebenfalls in einem kleinen Gefäßchen abgewogen (m). Dies Gefäßchen läßt man in einem mit Quecksilber gefüllten Rohr, das nach Art eines Barometers in ein weiteres Quecksilbergefäß taucht, emporsteigen, vgl. Fig. 1012. Erhitzt man nun das ganze Rohr über die Siedetemperatur der Substanz, so wird das Gefäßchen platzen, bzw. der Schliff wird herausgedrückt werden, die Substanz wird verdampfen und den oberen Teil AB des kalibrierten Rohres ausfüllen, so daß ihr Volumen V ohne weiteres ablesbar ist. Der äußere Luftdruck, vermindert um den Druck der bis B reichenden Quecksilbersäule und den Dampfdruck des Quecksilbers in AB, ergibt den Druck p des Dampfes. Nach Reduktion des Volumens auf den Normalzustand folgt wieder aus der letzten Gleichung die absolute Dichte und nach Division derselben durch die Dichte der Luft im gleichen Zustand die Dampfdichte.

Auch diese Methode ist mehrfachen Abänderungen unterworfen worden. Meist beziehen sich diese auf die Ablesegenauigkeit und die Art der Heizung. Eine viel gebrauchte, von Hofmann herrührende Heizmethode ist in Fig. 1012 dargestellt. Um das Barometerrohr ist ein weiteres Glasrohr angebracht,

---

[1]) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie **9**, 622, 1903; H. v. Wartenberg, Zeitschr. f. anorg. Chemie **56**, 320, 1907. (Hohe Temperaturen.)

durch welches Dampf einer Flüssigkeit geleitet wird. Für eine große Reihe von Substanzen genügt Wasserdampf. In der geschilderten Form hat die Methode eine Reihe von Nachteilen, die hauptsächlich daher rühren, daß es nicht möglich ist, die Temperatur der Quecksilbersäule sicher zu bestimmen. Von Ramsay und Steele[1]) ist eine Abänderung der Anordnung angegeben worden, bei der diese Nachteile verringert werden. Eine noch weiter gehende Verbesserung rührt von Magnus und Schmid[2]) her.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Dampfdichte besteht darin, daß man eine bestimmte Menge Substanz in einem bestimmten Volumen zur Verdampfung bringt und den sich einstellenden Druck mißt[3]). Dies bietet den Vorteil, daß der gesamte Dampf unter gleichen Bedingungen steht und die Methode darum auch zur Untersuchung dissoziierender Substanzen geeignet ist. Stark und Bodenstein[4]) benutzen ein Quarzgefäß bekannten Volumens mit angeschmolzenem Quarzmanometer; hierdurch werden Dampfdichtemessungen bei hohen Temperaturen möglich. Eine andere Anordnung ist von Menzies[5]) angegeben worden; bei ihr erfolgt die Heizung ähnlich wie bei den oben besprochenen Methoden durch strömenden Dampf, der auch das zur Druckmessung benutzte kleine Quecksilbermanometer erhitzt.

b) Auftriebsmethode. Analog wie bei Flüssigkeiten wird diese Methode zur Dichtebestimmung von Gasen verwendet, indem man den Auftrieb eines Tauchkörpers in verschiedenen Gasen vergleicht[6]). Zu diesem Zweck wird eine Waage, bei der einer leichten Glaskugel durch ein kleines Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten wird, in ein geschlossenes Gefäß gebracht, welches mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt werden kann. Infolge des in verschiedenen Gasen verschieden großen Auftriebs der Kugel verschiebt sich die Gleichgewichtslage je nach dem Gasinhalt des Gefäßes[7]). Durch Druckveränderungen, welche an einem Manometer abgelesen werden können, läßt sich das Gleichgewicht wieder herstellen. Die Eichung des Apparates geschieht empirisch. Häufig wird auch die umgekehrte Konstruktion benutzt, bei der das zu untersuchende Gas in die Glaskugel geleitet wird, während das umgebende Gas (meist Luft) unverändert bleibt. In diesem Falle wird also die Dichte des Gases auf die umgebende Luft bezogen (Luxsche Gaswaage).

c) Manometrische Methode. Analog der für Flüssigkeiten anwendbaren Hydrometermethode kann man für Bestimmungen der Gasdichte die Messung des Gewichtes von zwei Gassäulen verwenden. Zwei vertikal stehende

---

[1]) W. Ramsay u. B. D. Steele, Zeitschr. f. phys. Chem. **44**, 348, 1903; K. Drucker u. G. Ullmann, Zeitschr. f. phys. Chem. **74**, 567, 1910.

[2]) A. Magnus u. E. Schmid, Zeitschr. f. anorg. Chem. **120**, 232, 1922.

[3]) W. Haupt, Zeitschr. f. phys. Chem. **48**, 713, 1904; Ph. Blackman, Zeitschr. f. phys. Chem. **63**, 1908; Chem. Ber. **41**, 1908 (mehrere Arbeiten) u. **65**, 549, 1909.

[4]) G. Stark u. M. Bodenstein, Zeitschr. f. Elektrochem. **16**, 961, 1910.

[5]) A. W. C. Menzies, Zeitschr. f. phys. Chem. **76**, 231 u. 335, 1911.

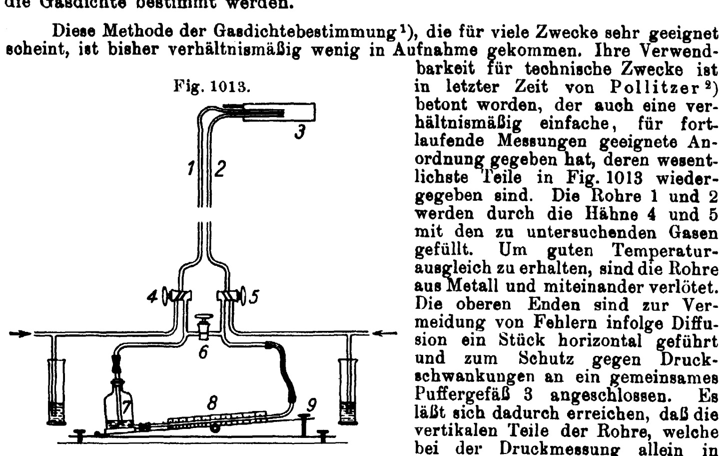
[6]) Vgl. A. Jaquerod u. M. Tourpaïan, C. R. **151**, 666, 1910; J. D. Edwards, Techn. Papers. Bur. Stand. Nr. 89, 1917.

[7]) Über Konstruktionen für Mikromessungen s. auch F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. **89**, 439, 1913; A. Stock u. G. Ritter, Zeitschr. f. phys. Chem. **119**, 333, 1926.

mit den zu vergleichenden Gasen gefüllte Rohre kommunizieren unten durch ein Flüssigkeitsmanometer (vgl. Fig. 1013). Aus der Verschiebung der beiden Flüssigkeitsoberflächen gegeneinander kann, wenn die Dichte der Flüssigkeit und des einen Gases bekannt ist, das Gewicht des andern Gases und daraus die Gasdichte bestimmt werden.

Diese Methode der Gasdichtebestimmung[1]), die für viele Zwecke sehr geeignet scheint, ist bisher verhältnismäßig wenig in Aufnahme gekommen. Ihre Verwendbarkeit für technische Zwecke ist in letzter Zeit von Pollitzer[2]) betont worden, der auch eine verhältnismäßig einfache, für fortlaufende Messungen geeignete Anordnung gegeben hat, deren wesentlichste Teile in Fig. 1013 wiedergegeben sind. Die Rohre 1 und 2 werden durch die Hähne 4 und 5 mit den zu untersuchenden Gasen gefüllt. Um guten Temperaturausgleich zu erhalten, sind die Rohre aus Metall und miteinander verlötet. Die oberen Enden sind zur Vermeidung von Fehlern infolge Diffusion ein Stück horizontal geführt und zum Schutz gegen Druckschwankungen an ein gemeinsames Puffergefäß 3 angeschlossen. Es läßt sich dadurch erreichen, daß die vertikalen Teile der Rohre, welche bei der Druckmessung allein in Frage kommen, stets mit reinen Gasen gefüllt sind. Durch die Hähne 4 und 5 lassen sich die Rohre entweder mit der Füllungsleitung oder mit dem Manometer, dessen Konstruktion aus der Figur ohne weiteres hervorgeht, in Verbindung setzen. Die Flasche 7 und das kalibrierte Messingrohr 8 sind mit einer Meßflüssigkeit (Petroleum) gefüllt. Durch die Schraube 9 läßt sich die Neigung des Meßrohres und damit die Empfindlichkeit des Instrumentes verändern. Hahn 6 dient zum Kurzschließen des Manometers, um seine Nullage feststellen zu können.

Fig. 1013.



Apparat zur Gasdichtebestimmung nach Pollitzer.

d) Ausströmungsmethode. (Bunsen, 1857.) Das Verhältnis der Zeiten, in denen gleiche Volumina zweier Gase unter denselben Temperatur- und Druckverhältnissen aus einer engen Öffnung ausströmen, ist annähernd gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Dichten dieser Gase[3]). Sind t_1 und t_2 diese Ausströmungszeiten für gleiche Volumina der Gase, und ϱ_1 und ϱ_2 die entsprechenden Dichten, so ist also:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

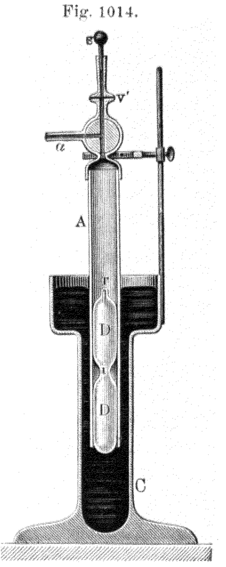
Fig. 1014 zeigt ein zu Messungen nach dieser Methode geeignetes Effusiometer. Der Glaszylinder A ist oben mit einem Dreiweghahn verschlossen, dessen Öffnung a von normaler Weite, Öffnung v' dagegen sehr eng ist. Das Gefäß C, in welches A eintaucht, ist mit Quecksilber gefüllt; dies trägt einen Schwimmer D. Das durch die Öffnung a in den Zylinder A gefüllte Gas

---

1) F. C. G. Müller, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht **33**, 181, 1920.
2) F. Pollitzer, Zeitschr. f. angew. Chem. **37**, 459, 1924.
3) Vgl. z. B. F. G. Donnan, Phil. Mag. (5) **49**, 423, 1900; E. Buckingham u. J. D. Edwards, Bull. Bur. Stand. **15**, 573, 1920.

wird durch Eintauchen dieses Zylinders (bei geschlossenem Hahn) in das Quecksilber unter einen Überdruck gebracht. Sodann läßt man das Gas durch v' entweichen und beobachtet die Zeit, welche zwischen den Zeitpunkten vergeht, an denen zwei Punkte des Schwimmers, z. B. die Stellen r und l, eine bestimmte Stelle des Apparates, z. B. die Quecksilberoberfläche, passieren. Durch Messung dieser Zeit bei zwei Gasen ist nach Gl. (5) das Verhältnis ihrer Dichten bestimmt.

Fig. 1014.



Effusiometer nach Bunsen.

Diese Methode ist zu Präzisionsmessungen nicht geeignet, wird aber infolge ihrer Einfachheit viel benutzt. Für Spezialzwecke ist sie verschiedentlich abgeändert worden [1]).

e) Akustische Methode. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem Gase hängt von der Dichte desselben ab; daher kann prinzipiell jede Methode zur Messung der Schallgeschwindigkeit von Gasen auch zur Bestimmung der Dichte derselben verwandt werden. (Allerdings ist die Kenntnis des Verhältnisses der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen erforderlich.)

Besonders einfach lassen sich Dichten durch Veränderung der Tonhöhe einer und derselben Lippenpfeife vergleichen, wenn diese mit verschiedenen Gasen oder Dämpfen angeblasen wird. Denn die Wellenlänge in der Pfeife bleibt konstant; entsprechend der veränderten Schallgeschwindigkeit verändert sich die Tonhöhe. Diese läßt sich durch Vergleich mit einer andern Pfeife messen, so daß auf diesem Wege eine Bestimmung der Dichte möglich ist [2]).

f) Optische Methoden. Diese beruhen auf der Beziehung, welche zwischen dem Brechungsquotienten einer Substanz und deren Dichte besteht, und lassen sich sowohl auf gasförmige wie auch auf feste und flüssige Körper anwenden. Häufig bestimmt man auf diesem Wege nicht die absoluten Werte der Dichte, sondern benutzt die optischen Methoden dazu, Dichteänderungen, sei es durch äußere Einflüsse, sei es durch Beimischung anderer Substanzen, nachzuweisen und zu messen [3]).

Infolge der großen Meßgenauigkeit, welche die Interferenzmethoden zulassen, ist man dazu übergegangen, auch diese zu Bestimmungen des Brechungsquotienten bei Dichtemessungen zu verwenden. Speziell zur Untersuchung von Gasen und Flüssigkeiten sind Methoden ausgearbeitet und Apparate kon-

---

1) R. Ullrich, Marb. Ber. 1909, S. 232.

2) Vgl. R. Wachsmuth, Boltzmannfestschrift 1904, S. 923; A. Kalähne, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 81, 1914; P. Bräuer, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. **32**, 1, 1919.

3) Über Refraktometer und andere Apparate zur Bestimmung des Brechungsquotienten vgl. Müller-Pouillet, Bd. II.

struiert worden, welche die Dichte und die Zusammensetzung solcher Substanzen mit größter Genauigkeit zu messen gestatten [1]).

Außer den im vorstehenden beschriebenen Methoden ist noch eine große Reihe anderer Methoden zur Bestimmung der Dichte von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern entwickelt worden. Die meisten von diesen dienen für spezielle Zwecke; zum größten Teil ist das ihnen zugrunde liegende Prinzip mit dem einer der hier beschriebenen Methoden identisch.

In den Anmerkungen ist meist auf neuere Literatur hingewiesen. Ältere Literatur findet man in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, (Leipzig, 1908) und zusammengestellt in dem Lehrbuch der Physik von Chwolson, 2. Aufl. Vgl. auch Anmerkung S. 1191.

---

[1]) F. Löwe, Ein tragbares Interferometer für Flüssigkeiten und Gase. Zeitschr. f. Instrkde. **30**, 321, 1910; Chem.-Ztg. **45**, 405, 1921.

Vierzehntes Kapitel.

Sonderausführungen über Luftpumpen und Apparate zur Druckmessung [Manometer und Barometer][1]).

I. Luftpumpen.

§ 1. Allgemeines. Die Evakuierung eines mit Gas gefüllten Raumes ist auf verschiedenen Wegen möglich. Die prinzipiell einfachste und zuerst in Anwendung gekommene Methode ist die Verdrängung des Gases durch einen festen oder flüssigen Körper. Sie wird auch heute noch in den meisten Fällen gebraucht, in denen keine sehr weitgehende Gasverdünnung erzielt werden soll. Andere Methoden, die besonders in den letzten Jahren zur Erreichung sehr hoher Vakua verwandt werden, beruhen auf den Gesetzmäßigkeiten, welchen die Gase bezüglich ihrer Reibung und ihrer Diffusion unterworfen sind.

Für die Wirkung jeder Luftpumpe ist der Außendruck, gegen welchen sie zu arbeiten hat, von Wichtigkeit. Darunter ist der Druck zu verstehen, auf den das Gas, welches dem zu evakuierenden Raume entnommen wird, komprimiert werden muß, um aus der Pumpe hinausbefördert zu werden. Ist der Außendruck, wie in den meisten Fällen, der Atmosphärendruck, und soll eine weitgehende Gasverdünnung erreicht werden, so schaltet man häufig mehrere Pumpen hintereinander. Die Aufgabe der „Vorpumpen" ist es, den Außen- oder Gegendruck für die nächstfolgende Pumpe zu erniedrigen und dadurch deren Wirkung zu erleichtern (in vielen Fällen überhaupt erst zu ermöglichen). Häufig verwendet man für die verschiedenen Druckstufen ganz verschiedene Pumpentypen, deren jede der von ihr verlangten Leistung entsprechend konstruiert ist.

Unter der „Sauggeschwindigkeit" einer Pumpe oder eines Pumpenaggregates versteht man die Zahl der Kubikzentimeter des Gases, die von der Pumpe einem Gefäß in der Zeiteinheit entnommen wird. — Die „Saugleistung" dagegen ist die gesamte Gasmenge, die in der Zeiteinheit gefördert wird. Sie ist bestimmt durch das Produkt aus dem Gasvolumen und dem Druck, bei dem dies dem Gefäß entnommen wird.

Das „Grenzvakuum", d. h. der kleinste Druck, bis zu dem eine Pumpe ein Gefäß zu evakuieren vermag, ist ebenso wie die Sauggeschwindigkeit bei den einzelnen Pumpentypen ganz verschieden. Bei den in § 2 bis 5 beschriebenen Pumpen ist prinzipiell stets ein durch die Konstruktion der

[1]) Bearbeitet von Prof. Dr. H. Senftleben in Breslau.

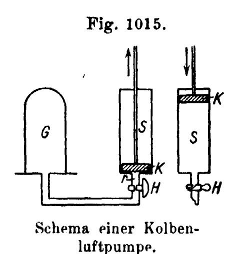
Pumpe bedingtes Grenzvakuum vorhanden, während bei den „Diffusionspumpen" (§ 6) theoretisch die Sauggeschwindigkeit unabhängig von dem Druck in dem zu evakuierenden Gefäß ist und daher ein Grenzvakuum nicht existiert (vgl. hierzu § 6).

Infolge der großen Zahl der im Laufe der Zeit angegebenen Pumpenkonstruktionen ist es nicht möglich, hier auf alle diese Konstruktionen einzugehen. Es sollen im folgenden nur diejenigen behandelt werden, welche besonders typisch sind und weitere Verbreitung gefunden haben.

§ 2. Kolbenluftpumpen. a) Einfache Stiefelluftpumpen. Die Wirkungsweise einer Luftpumpe, welche auf der eingangs genannten Verdrängungsmethode beruht, ist in Kapitel X, § 7 ausführlich auseinandergesetzt worden. In Fig. 1015 ist eine einfache, nach diesem von Otto von Guericke im Jahre 1650 erfundenen Prinzip arbeitende Pumpe schematisch dargestellt.

G ist das zu evakuierende Gefäß (Rezipient), das durch den Hahn *H* mit der eigentlichen Pumpe in Verbindung steht. *S* ist der sogenannte Stiefel, in dem der Kolben *K* luftdicht schließend auf und ab bewegt werden kann. Der Hahn *H* ist ein Dreiweghahn, durch den sowohl der Rezipient *G* wie auch der Stiefel *S* mit der äußeren Luft in Verbindung gesetzt werden kann (vgl. die Nebenfigur). Zum Auspumpen des Gefäßes *G* wird zunächst der Hahn in der aus der Figur ersichtlichen Weise eingestellt, während sich der Kolben *K* in der gezeichneten Stellung befindet. Wird der Kolben in die Höhe gezogen, so entsteht unter ihm ein luftverdünnter Raum, und infolgedessen tritt ein Teil der in *G* befindlichen Luft in den Stiefel ein. Wenn der Kolben am oberen Ende von *S* angelangt ist, wird der Hahn *H* gegen den Rezipienten abgeschlossen und gleichzeitig der Stiefel *S* durch eine dritte Durchbohrung des Hahnes in Verbindung mit der äußeren Luft gesetzt. Durch Herabdrücken des Kolbens wird sodann die im Stiefel befindliche Luft aus diesem herausgedrückt. Sobald der Kolben auf dem Boden des Stiefels angekommen ist, wird der Hahn *H* wieder zum Gefäß *G* geöffnet und der Kolben wieder gehoben. Jetzt tritt wiederum Luft aus *G* in *S* über, und es kann auf diese Weise das Gefäß durch mehrfache Wiederholung des Vorganges mehr und mehr evakuiert werden. Um das beständige Öffnen und Schließen des Hahnes zu vermeiden, kann man ihn durch zwei Ventile ersetzen. Eins derselben, welches sich beim Herabgehen des Kolbens schließt, an der Stelle des Hahnes *H*, und ein zweites, das sich gerade in umgekehrter Weise öffnet und schließt, im Kolben *K*.

Fig. 1015.

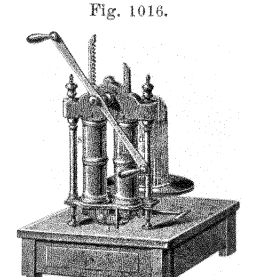


Schema einer Kolbenluftpumpe.

Der Grad der Verdünnung, der durch einen Kolbenzug erreicht wird, ist abhängig vom Verhältnis des Kolbenvolumens V zum Gefäßvolumen v. Da das Volumen der Luft sich von v auf $v + V$ vergrößert, so sinkt der Druck

im Verhältnis $v:(v+V)$. Ist der Druck ursprünglich Atmosphärendruck, d. h. 760 mm Quecksilber gewesen, so ist er also nach n Kolbenzügen $\left(\frac{v}{v+V}\right)^n \cdot 760$. Durch eine große Zahl von Kolbenzügen müßte also eine immer weitergehende Verdünnung der Luft im Rezipienten G zu erzielen sein. Aber selbst bei gänzlich luftdichtem Abschluß von Kolben und Rezipienten ist durch Vergrößerung der Zahl n die Verdünnung nicht beliebig weit zu treiben. Denn selbst wenn der Kolben in seiner tiefsten Stellung ganz dicht an den Boden des Stiefels S anstößt, so bleibt doch in dem Raume r zwischen Kolben und Hahn bzw. Ventil Luft vom Drucke der Umgebung zurück. Beim Hochgehen des Kolbens wird diese Luft expandiert bis zu einem Druck, der gleich r/V multipliziert mit dem äußeren Druck ist. Ist der Druck im Rezipienten bis auf diesen Wert gesunken, so wird beim Öffnen des Hahnes keine Druckdifferenz mehr vorhanden sein und infolgedessen keine Luft mehr aus dem Rezipienten in den Stiefel überströmen. Damit ist also die Grenze der Leistungsfähigkeit der Pumpe, das „Grenzvakuum", erreicht. Diese Grenze hängt also ab von der Größe des sogenannten „schädlichen Raumes" (r), der unterhalb des Kolbens mit Luft von höherem Druck gefüllt zurückbleibt. Selbst wenn der Kolben bis unmittelbar an den Hahn herangeführt werden kann, so bleibt doch immer die Bohrung des Hahnes als schädlicher Raum übrig. Der nachteilige Einfluß desselben läßt sich dadurch vermindern, daß man nicht Luft von atmosphärischer Dichte, sondern nur stark verdünnte Luft in den schädlichen Raum eindringen läßt. Zu diesem Zwecke sind verschiedene Konstruktionen angegeben worden, von denen die zweistiefeligen Luftpumpen große Verbreitung gefunden haben. Bei diesen wird die Luft, die beim Heruntergehen des Kolbens aus dem Hahn herausgedrückt wird, von einem zweiten Stiefel mit hochgehendem Kolben angesaugt, so daß der schädliche Raum stets nur mit stark verdünnter Luft gefüllt ist. An Stelle des Hahnes H treten besonders konstruierte Hähne (Babinet), auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, da derartige Pumpen heute nur noch selten Verwendung finden. Fig. 1016 zeigt eine solche zweistiefelige Pumpe[1]).

Fig. 1016.



Zweistiefelige Kolbenpumpe.

b) Ölluftpumpen[2]). Einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den beschriebenen Pumpen bedeuten die Ölluftpumpen, bei welchen die Wirkung des schädlichen Raumes dadurch vermieden wird, daß man ihn mit einer Flüssigkeit füllt. Hierfür kommt natürlich nur eine solche mit geringem Dampfdruck in Frage, wie z. B. Quecksilber oder Öl.

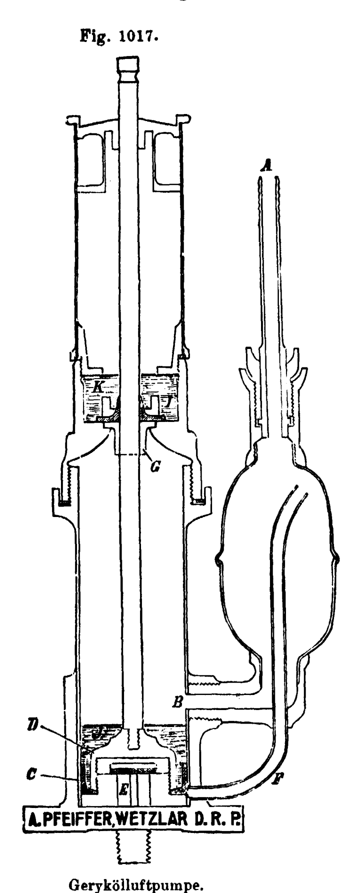
---

[1]) Näheres über Stiefelpumpen in der 10. Auflage dieses Buches, I, S. 471—481, und in Winkelmanns Handbuch der Physik I, 2, S. 1316—1321. Leipzig 1908.
[2]) ZS. f. phys. und chem. Unterr. 14, 285, 1901.

Mit der letztgenannten Flüssigkeit arbeitet die Geryköllluftpumpe, welche in Fig. 1017 abgebildet ist.

Das Saugrohr *A*, an welches der Rezipient angeschlossen wird, steht durch die Öffnung *B* und das Rohr *F* mit dem inneren Stiefelraum in Verbindung. Der Kolben *D*, der durch die Ledermanschetten *C* gegen die Stiefelwandung abgedichtet ist, hat ein sich nach oben öffnendes Ventil *E* und ist oben mit einer Schicht *J* von Öl bedeckt. Beim Anheben des Kolbens wird durch *F* Luft unter denselben gesaugt; solange er unterhalb *B* ist, herrscht unter- und oberhalb des Kolbens der gleiche Druck. Ist der Kolben oberhalb von *B*, so saugt er durch *B* Luft an; gleichzeitig wird die oberhalb des Kolbens abgesperrte Luft durch ein Ventil *G* herausgedrückt und zwar so weit, daß die Ölfüllungen *J* und *K* sich vereinigen, also keine Luft mehr im Stiefel zurückbleibt und der schädliche Raum mit Öl gefüllt wird. Beim Herabgehen des Kolbens entsteht oberhalb desselben ein luftverdünnter Raum, in den durch das sich öffnende Ventil *E* Luft einströmen kann. Ist der Kolben unten angelangt, so herrscht in dem ganzen Stiefel derselbe Druck wie in dem Rezipienten, und es kann durch einen neuen Kolbenhub wiederum der Stiefelinhalt durch *G* herausgedrückt werden. Um die Wirkung weiter zu steigern, kann man mehrere derartige Pumpen hintereinander schalten, wobei die eine ein Vorvakuum für die nächste schafft.

Fig. 1017.



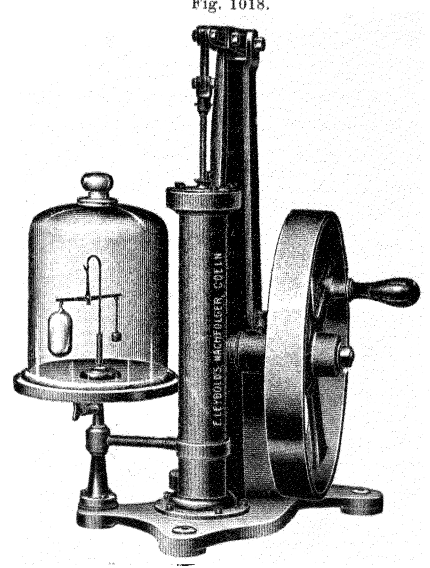
Geryköllluftpumpe.

Ein Nachteil dieser Pumpen war ursprünglich die Tatsache, daß ihre Wirkung von Wasserdampf beträchtlich beeinträchtigt wurde. Derselbe wurde nämlich nicht mit dem anderen Gas herausgedrückt, sondern kondensierte sich beim Komprimieren und verdampfte wieder beim Expandieren, blieb also stets innerhalb des Stiefels. Um dies zu vermeiden, ist die Pumpe von Gaede[1]) derart abgeändert worden, daß das Wasser sich außerhalb des Pumpenraumes absetzt und beim Zurückgehen des Kolbens nicht wieder

[1]) W. Gaede, Physik. Zeitschr. 14, 1238, 1913.

in den Stiefel hinein expandieren kann. Eine solche Pumpe ist in Fig. 1018 abgebildet. Ihre Leistung ist recht groß; sie kann Vakua bis 0,00005 mm Quecksilberdruck erzeugen.

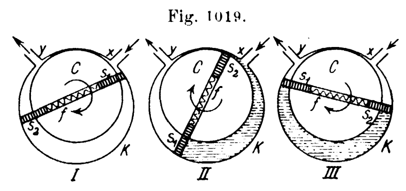
Fig. 1018.



Ölkolbenpumpe nach Gaede.

c) Rotierende Pumpen. Kapselpumpen. Die Pumpgeschwindigkeit der bisher beschriebenen Pumpen hängt, wie aus den oben erwähnten Überlegungen folgt, vom Volumen des Stiefels und der Zahl n der Kolbenhübe pro Sekunde ab. Diese Zahl ist durch die Geschwindigkeit der Auf- und Abbewegung des Kolbens bedingt, welche sich nicht sehr weit steigern läßt; man muß also, um große Sauggeschwindigkeiten zu erzielen, die Größe der Pumpen erhöhen. Dies läßt sich vermeiden, und gleichzeitig lassen sich eine Reihe von Vereinfachungen anbringen, wenn man Pumpen benutzt, in denen die beweglichen Bestandteile nicht hin und her gehen, sondern rotieren. Solche Pumpen sind in verschiedenen Formen ausgeführt worden [1]). Das Prinzip ist für die meisten Typen das gleiche und nur in der speziellen Einzelkonstruktion verschieden. In einem Hohlkörper K (Fig. 1019) rotiert exentrisch ein Zylinder C, der mit einem Schlitz f versehen ist. In diesem sind zwei Metallschieber s_1 und s_2 beweglich, die durch eine zwischen ihnen liegende Feder auseinander gepreßt werden. Der Zylinder C ist so angebracht, daß er den Hohlkörper gerade an einer Stelle berührt. Auch vorn und hinten schließt der Zylinder möglichst luftdicht an die Wände des Hohlkörpers an. Durch Rotation von C wird Luft bei x angesaugt und bei y herausgedrückt. Die Wirkungsweise der Pumpe folgt aus den drei Zeichnungen. I entspricht der Stellung des Kolbens einer Stiefelluftpumpe nahe

Fig. 1019.

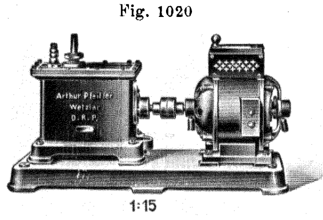


Schematische Darstellung der Wirkungsweise einer Kapselpumpe.

[1]) Vgl. z. B. G. Meyer, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 753, 1908.

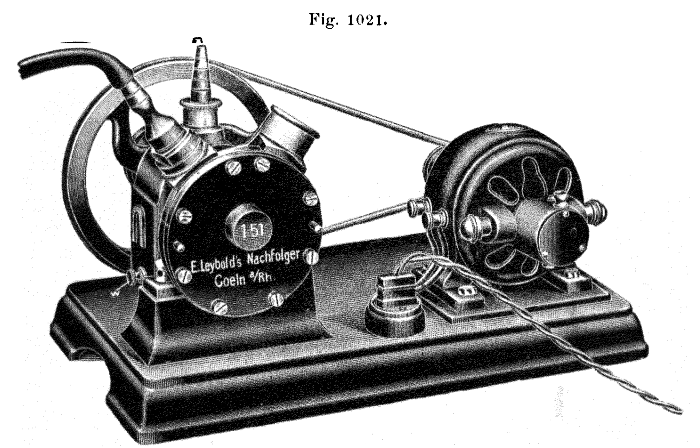
am Boden. Der mit angesaugter Luft erfüllte Raum (bei x) ist noch klein. In Stellung II ist dieser Raum (schraffiert) schon erheblich vergrößert; in Stellung III ist er durch den Schieber s_2 bereits von x abgesperrt, und bei weiterer Drehung wird sein Inhalt bei y herausgedrückt werden. Die Pumpe ist also sowohl als Saug- wie als Druckpumpe zu verwenden. Fig. 1020 und 1021 zeigen zwei moderne Ausführungen solcher Kapselpumpen. Die Sauggeschwindigkeit ist außerordentlich groß. Das erreichbare Vakuum liegt in der Größenordnung von einigen Tausendstel Millimetern Quecksilber.

Fig. 1020



1:15
Rotierende Ölluftpumpe nach Pfeiffer.

Fig. 1021.



Kapselpumpe nach Gaede.

§ 3. Quecksilberluftpumpen. Schon früh hat man versucht, Quecksilber als Sperrflüssigkeit in Luftpumpen zu benutzen und das Torricellische Vakuum[1]) zum Auspumpen zu verwenden. Das Prinzip aller Quecksilberpumpen besteht darin, daß man den Rezipienten R (Fig. 1022), aus welchem die Luft entfernt werden soll, mit dem Torricellischen Vakuum v in Verbindung setzt. Die Luft aus R wird dann in das Vakuum überströmen, das ursprünglich bis p stehende Quecksilber wird sinken, bis der Druck sich ausgeglichen hat. Dann schließt man den Hahn h und stellt das Torricellische Vakuum wieder her. Je nach der Art, wie man das letztere bewerkstelligt, unterscheidet man zwei verschiedene Systeme von Quecksilberpumpen. Bei dem ersten (System Geissler) nimmt man die Neufüllung mit Quecksilber

1) Näheres hierüber vgl. Kapitel X, § 16.

von unten nach oben vor und drückt die Luft am oberen Ende des Rohres hinaus. Zu diesem Zwecke kann man, wie Fig. 1023 schematisch andeutet, das untere Ende des Barometerrohres p durch einen Schlauch mit einem Gefäß m verbinden und durch Heben dieses Gefäßes das Quecksilber auch in p zum Steigen bringen. Die oberhalb des Quecksilbers befindliche Luft wird durch den Hahn h' herausgedrückt, bis zu dem oder über den hinaus man das Quecksilber steigen läßt. Schließt man h' und senkt m, so stellt sich ein neues Torricellisches Vakuum her, das durch Öffnen des Hahnes h wieder

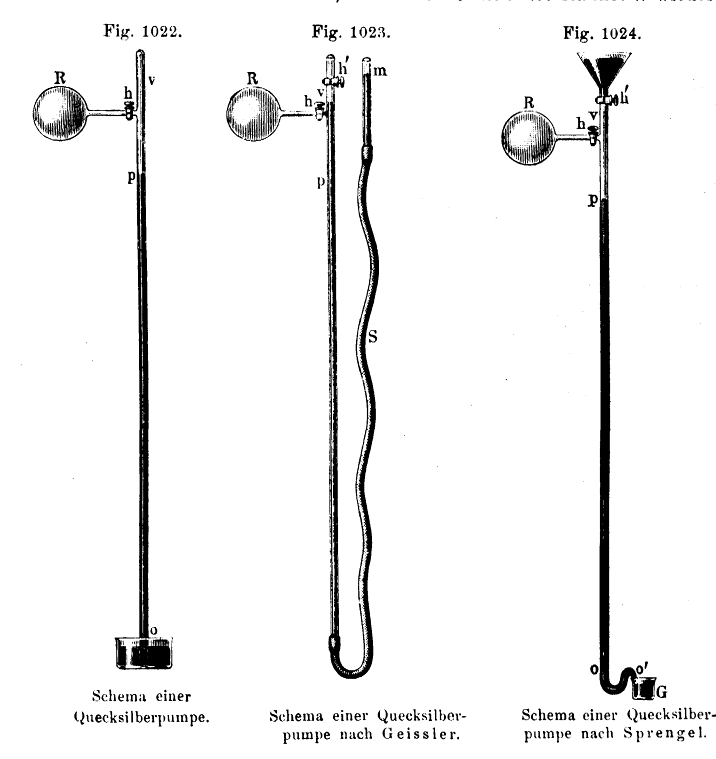


Fig. 1022. Schema einer Quecksilberpumpe.

Fig. 1023. Schema einer Quecksilberpumpe nach Geissler.

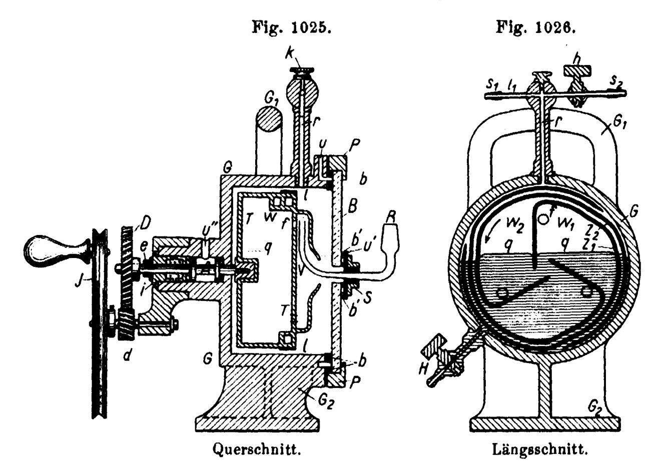
Fig. 1024. Schema einer Quecksilberpumpe nach Sprengel.

mit R in Verbindung gesetzt werden kann. Durch mehrfaches Wiederholen dieses Prozesses kann R weitgehend evakuiert werden. — Bei dem zweiten System von Quecksilberpumpen (Sprengel) wird die Luft am unteren Ende aus der Barometerröhre geschafft. Fig. 1024 zeigt schematisch die dazu nötige Anordnung. Das Quecksilber fließt aus dem Trichter durch den Hahn h' in den Raum oberhalb p, drängt die Luft vor sich her nach dem unteren Ende und von dort durch die Öffnung o' hinaus. Das dabei ausfließende Quecksilber wird im Gefäß G aufgefangen. Es ist bei diesem Prinzip nicht nötig, die Hähne h und h' wechselweise zu öffnen und zu schließen. Die Luftmengen,

welche sich zwischen dem herabfließenden Quecksilber befinden, werden während des Pumpens kleiner und kleiner.

Die hier schematisch beschriebenen Apparate sind weitgehend vervollkommnet worden; besonders ist es gelungen, kontinuierlich wirkende Pumpen zu konstruieren, bei denen das Heben des Quecksilbers automatisch unter Zuhilfenahme einer Wasserstrahlpumpe (vgl. § 4) geschieht. Näher auf die verschiedenen Typen einzugehen [1]), soll hier unterlassen werden, weil diese Pumpen heutzutage von schneller wirkenden Pumpen verdrängt sind und nur noch selten Verwendung finden. Zwar ist es möglich, mit ihnen sehr hohe Vakua zu erzielen, aber die Handhabung der Pumpen ist umständlich, und es

Fig. 1025. Fig. 1026.



Querschnitt. Längsschnitt.

Rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede.

sind verhältnismäßig sehr große Quecksilbermengen zum Betriebe erforderlich. Andererseits haben diese Pumpen den Vorteil, daß man die abgesaugten Gase verhältnismäßig leicht wieder auffangen kann. Aus diesem Grunde finden sie auch heute noch zu Spezialzwecken Verwendung [2]).

Auch bei den Quecksilberpumpen war es ein großer Fortschritt, als es gelang, die auf und ab gehende Bewegung zunächst durch eine schaukelnde [3]) und dann durch eine rotierende zu ersetzen. Zu den letzteren gehört die von Kaufmann [4]) konstruierte Pumpe, bei der in eine rotierende Spirale Luft eingesaugt, von Quecksilber abgeschlossen und in einen Raum gedrückt wird, der durch eine Vorpumpe bis zu einem mäßigen Vakuum ausgepumpt wird.

[1]) Ausführliche Beschreibungen finden sich in der 10. Auflage dieses Buches, I, S. 484 bis 501, sowie in Winkelmanns Handbuch der Physik I, 2, S. 1321 bis 1331. Leipzig 1908.

[2]) A. Beutell, Chem. Ztg. 1910, Nr. 150; McLaughlin und F. E. Brown, Journ. Amer. Chem. Soc. 47, 613, 1925.

[3]) U. von Rheden, Physik. Zeitschr. 10, 316, 1909.

[4]) W. Kaufmann, Zeitschr. f. Instrkde. 25, 129, 1905.

Sehr große Verbreitung hat eine von Gaede [1]) konstruierte Quecksilberpumpe mit rotierender Trommel gefunden, die in den Fig. 1025 und 1026 im Quer- und Längsschnitt abgebildet ist. Sie wird von verschiedenen Firmen in etwas abgeänderten Konstruktionen ausgeführt, deren Grundgedanke aber in wesentlichen Punkten mit dem der im folgenden beschriebenen Pumpe identisch ist.

Das Prinzip der Pumpe besteht darin, daß in einem Quecksilberbade innerhalb eines Hohlraumes ein System von Kammern rotiert, welche abwechselnd in Quecksilber eingetaucht und wieder herausgehoben werden. Die herausgehobenen Kammern schließen in sich ein Torricellisches Vakuum ab, das mit dem Rezipienten verbunden wird. Bei dem darauf folgenden Wiedereintauchen wird das aus dem Rezipienten eingeströmte Gasquantum durch das Quecksilber nach außen gedrängt. Das System hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Gasuhr, nur daß bei dieser das bewegte Gas die Rotation bewirkt, während bei der Pumpe die Rotation durch äußere Kraft erfolgt und das Gas in Bewegung setzt.

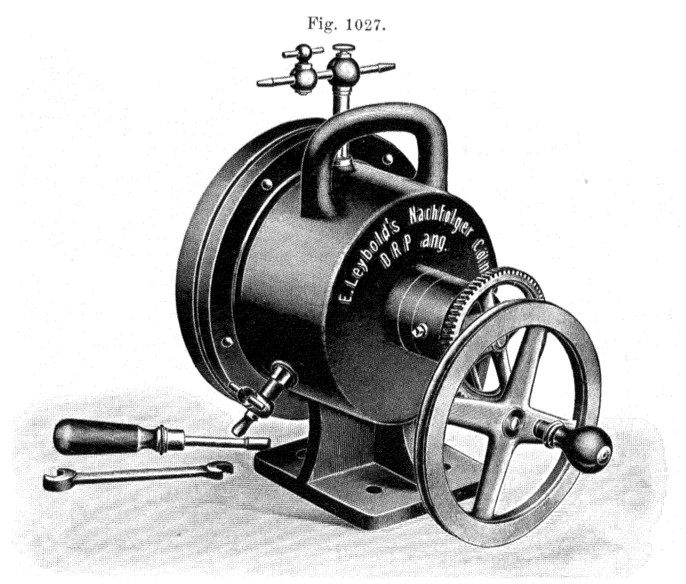
Das zylindrische Gehäuse G aus Gußeisen ist bei P durch eine dicke Glasplatte B verschlossen und bis q mit Quecksilber gefüllt. In diesem rotiert eine Porzellantrommel T um die Achse A und wird von außen durch Drehen eines auf der Achse sitzenden Rades angetrieben. An das Rohr R, das durch die Glasplatte hindurch in den Vorraum V der Porzellantrommel führt, wird mittels Schliff der auszupumpende Rezipient angesetzt. Bei s_2 wird eine Vorpumpe angeschlossen, welche Rezipienten und Pumpe bis zu einem Druck von einigen Millimetern Quecksilber auszupumpen gestattet. Ist dies geschehen, so wird durch Drehen der Trommel das Vakuum bis zu sehr hohen Verdünnungsgraden gesteigert. Die Wirkung der Trommel beruht darauf, daß dieselbe durch Zwischenwände in Kammern unterteilt ist, und daß diese Kammern über dem Quecksilberspiegel Räume abschließen, welche sich bei der Drehung abwechselnd vergrößern und verkleinern. Die Kammern mit den sich vergrößernden Räumen (in Fig. 1026: W_1) füllen sich durch R und f mit der Luft des Rezipienten. Die wieder in das Quecksilber eintauchenden Kammern geben das aufgenommene Gasvolumen an das mit der Hilfspumpe erzeugte Vorvakuum ab. In welcher Weise die Zwischenwände in der Trommel angeordnet sind, damit die Pumpenwirkung zustande kommt, zeigt Fig. 1026, in der die Wände, die in Wirklichkeit spiralig nebeneinander verlaufen, übereinander gezeichnet sind, um die Zeichnung zu ermöglichen. Der Raum W_1 vergrößert sich bei einer Rotation der Trommel (entgegen dem Sinne des Uhrzeigers) und saugt durch die im vorderen Trommelboden befindliche Öffnung f Luft aus dem Rezipienten an. Kommt durch Drehen der Trommel die Öffnung f unter die Quecksilberoberfläche, so haben wir die Verhältnisse wie in der linken Kammer W_2. Das in diesem Raume befindliche Gas ist vom Rezipienten abgeschlossen und wird bei der Drehung der Trommel durch die als Kolben wirkende Quecksilberoberfläche aus dem Raume W_2 unter Kompression in den Raum zwischen den Wänden Z_1 und Z_2 gedrängt und von hier aus bei fortgesetzter Drehung an das Vorvakuum abgegeben. — Zwischen R und den eigentlichen Rezipienten wird ein Glasapparat geschaltet, welcher so konstruiert ist, daß der Rezipient erst dann mit der eigentlichen Pumpe kommuniziert, wenn die Hilfspumpe das nötige Vorvakuum geschaffen hat. Dies muß einige Millimeter betragen, damit der Höhenunterschied des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Trommel gering bleibt, wenn der Rezipient weitgehend evakuiert ist. Bei geringerem Vorvakuum müßte die Pumpe sehr große Dimensionen haben. Die Leistungsfähigkeit dieser Pumpe ist größer als die aller bisher beschriebenen Typen. Man erreicht mit ihr ein Vakuum von 10^{-5} mm Quecksilber. Leicht kondensierbare Dämpfe saugt die Pumpe nicht ab, da sie sich beim Komprimieren kondensieren und beim Expandieren wieder verdampfen, ohne in das Vorvakuum zu gelangen. Solche Dämpfe müssen auf anderem Wege (Ausfrieren, Absorption) beseitigt werden. Fig. 1027 zeigt die Pumpe mit Glasansatz und Antriebsvorrichtung.

---

[1]) W. Gaede, Physik. Zeitschr. 6, 758, 1905.

Alle bisher besprochenen Pumpen arbeiten im wesentlichen nach demselben Prinzip wie die schon von Guericke erfundene Kolbenpumpe und können als Vervollkommnungen derselben betrachtet werden. Sie lassen sich zum Teil auch als Kompressionspumpen verwenden. Die weiterhin zu beschreibenden Pumpen beruhen auf anderen Grundgedanken.

Fig. 1027.



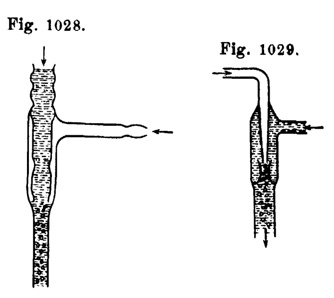
Rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede.

§ 4. Wasserstrahlpumpen. Bei diesen Pumpen wird die Tatsache benutzt, daß der Druck in einer strömenden Flüssigkeit dort am niedrigsten ist, wo die Geschwindigkeit am größten ist und bei Verzögerung der Strömung wieder steigt, wenn die Strömungsverluste klein genug bleiben (vgl. Kap. XI, § 3 und Kap. XII, § 10).

Tritt durch ein Rohr, welches an einer Stelle verengt und dann wieder erweitert ist, ein Wasserstrahl hindurch, so wird an dieser Stelle die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers größer als an der Austrittsstelle sein. Hier ist der Druck gleich dem äußeren Luftdruck; an der Verengung muß er daher kleiner sein. Bringt man an dieser Stelle also ein seitliches Rohr an, so wird die Luft, welche hier an den Strahl herantritt, in denselben hineintreten und mitgerissen werden, so daß auf diese Weise eine Saugwirkung zustande kommt. Durch geeignete Wahl der Strömungsgeschwindigkeit und der Stärke der Verengung kann die Saugwirkung soweit gesteigert werden, daß ein Gefäß bis zu dem Dampfdruck des Wassers herab (d. h. 10 bis 20 mm, je nach der Wassertemperatur) evakuiert wird. In Fig. 1028 und Fig. 1029 sind zwei

Ausführungsformen der Wasserstrahlpumpe wiedergegeben. Bei der in Fig. 1028 gezeichneten Pumpe tritt die Luft von außen, bei der in Fig. 1029 wiedergegebenen Pumpe von innen an den verengten Wasserstrahl heran. Auf die außerordentlich vielen Einzelkonstruktionen, welche gerade von Wasserstrahlpumpen ausgeführt worden sind, kann hier nicht eingegangen werden.

Die Wasserstrahlpumpen haben überall da, wo es nicht auf sehr hohes Vakuum ankommt, große Verbreitung gefunden und werden auch häufig als Vorpumpen zu Hochvakuumpumpen benutzt. Wenn konstanter, nicht zu niedriger Wasserdruck zur Verfügung steht, so ist ihre Verwendung äußerst bequem. Es ist ratsam, zwischen Pumpe und Rezipienten stets ein Rückschlagventil, welches ein Zurücktreten des Wassers in den Rezipienten unmöglich macht, einzuschalten; denn bei einer unvorhergesehenen Abnahme des Wasserdrucks tritt häufig ein „Zurückschlagen“, d. h. ein Einsaugen des Wassers in die Vakuumleitung ein.


Fig. 1028. Fig. 1029.

Wasserstrahlpumpen.

Fängt man den mit Luft gemischten Wasserstrahl in einem Gefäß auf, das oben geschlossen ist, so sammelt sich die Luft über dem Wasser. Da das zuströmende Wasser dauernd Luft mitbringt, bildet sich im Gefäß ein Überdruck aus. Eine solche Vorrichtung kann als Gebläse Verwendung finden, wenn man die Luft aus einer Öffnung des Gefäßes ausströmen läßt.

§ 5. Molekularluftpumpe. Diese Pumpe beruht auf einer technischen Ausnutzung der Gesetzmäßigkeiten, die für die Reibung der Gase gelten. Die eingehende Theorie der Molekularpumpe ist im III. 2. Bande dieses Buches enthalten, und es erübrigt sich daher ein genaues Eingehen auf dieselbe. Es soll hier nur das zugrunde liegende Prinzip kurz erläutert werden, und zwar an Hand von Fig. 1030.

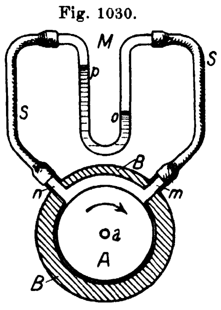


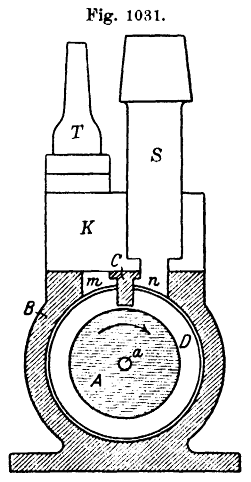
Fig. 1030.

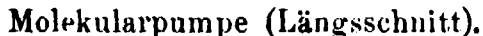
Schema der Molekularluftpumpe.

In dem Gehäuse *B* dreht sich um die Achse *a* der Zylinder *A* im Sinne des Pfeiles. Der Abstand zwischen *A* und *B* ist auf dem unteren Teile des Zylinders möglichst gering und nur auf dem Stück zwischen *n* und *m* etwas größer. Bei *n* und *m* ist ein Manometer *M* angeschlossen. Rotiert der Zylinder *A*, so wird durch Reibung Luft von *n* nach *m* befördert, und das Manometer zeigt einen Überdruck bei *m* an, der mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders wächst. Außer von dieser hängt der Überdruck von der Reibung des Gases ab. Da diese vom Druck des Gases, solange derselbe nicht sehr klein wird, unabhängig ist,

ist es auch die Druckdifferenz *op*, wenn man das Gehäuse *B* mit einer Hilfspumpe allmählich evakuiert. Solange das mit dieser Pumpe erzeugte Vorvakuum nicht sehr hoch ist, hat man also auf der linken Seite des Manometers *M* einen Druck, der um *op* kleiner ist als das Vorvakuum. Steigt dieses aber soweit, daß die innere Reibung druckabhängig wird, so werden die Verhältnisse komplizierter. Bei Drucken unterhalb einiger Tausendstel Millimeter werden die Moleküle von den Wänden des Zylinders, solange er ruht, in völliger Unordnung zurückgeworfen, ohne daß eine Richtung bevorzugt ist. Rotiert der Zylinder *A*, so addiert sich zu der Eigengeschwindigkeit der reflektierten Moleküle die Oberflächengeschwindigkeit des Zylinders, und die reflektierten Moleküle erhalten eine Zusatzgeschwindigkeit in Richtung der Zylinderrotation, d. h. von *n* nach *m*. Es

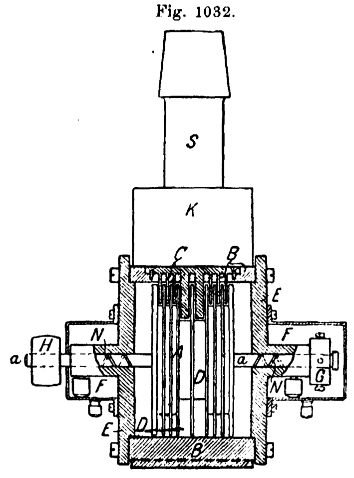
Fig. 1031.





Molekularpumpe (Längsschnitt).

Fig. 1032.



Molekularpumpe (Querschnitt).

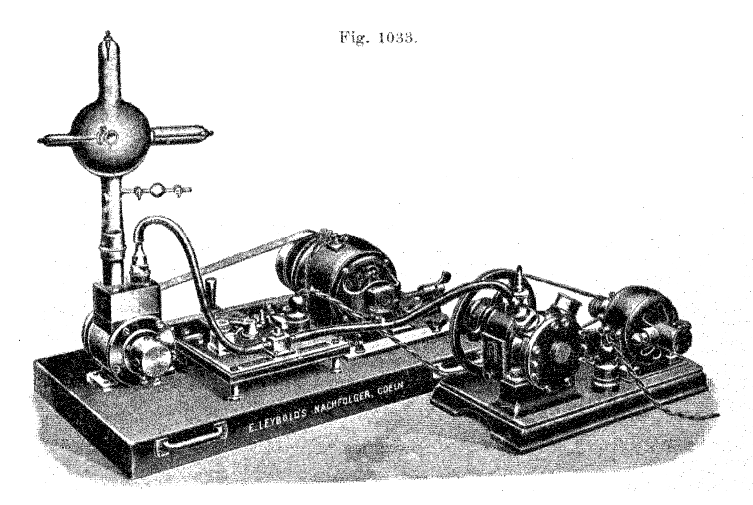
wird also bei *n* ein Vakuum entstehen, das um so besser sein wird, je weniger Moleküle von *m* nach *n* zurückgelangen, je größer also die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders im Verhältnis zur Molekulargeschwindigkeit sein wird. Es ist auf diese Weise möglich, bei *n* ein hohes Vakuum zu erzielen, wenn durch eine Vorpumpe im Gehäuse *B* ein so niedriger Druck erzeugt wird, daß die eben besprochenen Gesetzmäßigkeiten Gültigkeit haben. Die Konstruktion der auf diesen Überlegungen beruhenden Molekularpumpe geht aus Fig. 1031 und Fig. 1032 hervor, die einer Arbeit von Gaede[1]) entnommen sind, ebenso wie die folgenden sie beschreibenden Zeilen.

„In dem Gehäuse *B* rotiert der Zylinder *A* um die Welle *a*, welche in den luftdicht aufgeschraubten Scheiben *E* gelagert ist. In dem Zylinder sind die Nuten *D* eingeschnitten. In die Nuten ragen die am Gehäuse befestigten Lamellen *C* hinein. *F* sind die Ölbehälter und *G* ist eine Stellvorrichtung, welche verhindert, daß die

[1]) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41, 359, 1913.

Lamellen C an die Nutenwandungen des rotierenden Zylinders anstreifen. H ist die Riemenscheibe. Dreht sich A im Sinne des Uhrzeigers, so wird das Gas bei m verdichtet, bei n verdünnt. Auf dem Gehäuse B ist der Aufsatz K luftdicht aufgeschraubt. S ist das Saugrohr für das Hochvakuum und ist, wie Fig. 1031 zeigt, mit n verbunden, wobei D eine Nut in der Mitte sein soll. Die Drucköffnung m ist durch Kanäle in dem Aufsatz K mit der Saugöffnung n einer benachbarten Nut verbunden, die Drucköffnung m dieser Nut ist dann wieder mit der Saugöffnung n der nächsten Nut verbunden usw., so daß die Wirkungen der einzelnen Nuten sich addieren. Der Druck in der mittleren Nut ist am kleinsten und steigt gleichmäßig nach den beiden Enden des Zylinders bis zu dem Gasdruck, den die Hilfspumpe in dem Gehäuse erzeugt. Die Hilfspumpe ist durch einen Schlauch mit der Düse T verbunden und steht mit dem Innern des Gehäuses B in Verbindung. Die Abdichtung an der Durchführungsstelle der Welle ist durch Ölabschluß erreicht. Das Eindringen des Öles in das Pumpengehäuse ist durch eine in die Welle eingeschnittene Spiralnut N verhindert, welche während der Rotation das Öl dynamisch entgegen dem äußeren atmosphärischen Überdruck zurückdrängt. Diese einfache Vorrichtung hat sich bei Dauerbetrieb ausgezeichnet bewährt. Die Spiralnut hat nur dann eine Wirkung, wenn die Welle rasch rotiert. Daraus ergibt sich als wesentlichste Vorschrift für die Bedienung der Pumpe, daß die Pumpe zuerst in Rotation versetzt und dann mit der Vorpumpe verbunden wird. Beim Abstellen muß zuerst Luft in die Pumpe eingelassen und dann der Motor, der die Pumpe antreibt, abgestellt werden.“ Um eine gute Saugwirkung zu erzielen, muß die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders möglichst groß sein. Die gebräuchlichen Pumpen arbeiten mit einer Umdrehungszahl von 6000 bis 8000 pro Minute.

Fig. 1033.



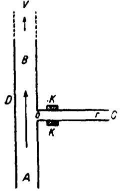
Molekularpumpe mit Kapselpumpe als Vorpumpe.

Fig. 1033 zeigt die äußere Ansicht einer Molekularpumpe mit einer Kapselpumpe als Vorpumpe. Einer der Hauptvorzüge der Molekularpumpe ist in ihrer großen Sauggeschwindigkeit zu sehen, welche diejenige der bisher beschriebenen Pumpen bei weitem übertrifft. Außerdem erreicht die Pumpe sehr hohe Vakua bis zu 10^{-7} mm und hat weiterhin den großen Vorteil, alle Gase und Dämpfe abzusaugen, so daß irgendwelche Vorrichtungen zur Entfernung von Dämpfen überflüssig sind. Allerdings ist die Sauggeschwindigkeit für Gase verschiedenen Molekulargewichts verschieden. Dies folgt aus den

oben wiedergegebenen Überlegungen, aus denen hervorgeht, daß die Saugleistung der Pumpe von dem Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit des rotierenden Zylinders zur Molekulargeschwindigkeit abhängt. Infolge ihrer geringeren Molekulargeschwindigkeit werden also schwere Gase schneller abgesaugt als leichte. Ein Nachteil der Molekularpumpe ist außer ihrer schwierigen Herstellung die etwas heikle Handhabung der Pumpe; sie ist darum nicht so in Aufnahme gekommen wie die im folgenden Paragraphen zu beschreibenden Diffusionspumpen, die ebenfalls eine hohe Leistungsfähigkeit haben. Trotzdem ist in manchen Fällen, z. B. wenn jede Spur von Dämpfen in einer Apparatur vermieden werden muß, die Anwendung einer Molekularpumpe erforderlich.

§ 6. Diffusions- und Dampfstrahlpumpen [1]). Die Konstruktion der Diffusionspumpen, welche eine überaus große Verbreitung gefunden haben, ist ebenso wie die Konstruktion der Molekularluftpumpe erst durch die Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten, die für die Gase, besonders bei geringen Drucken, gelten, möglich geworden. Der Gedanke, durch Diffusion ein hohes Vakuum zu erzeugen, ist von Gaede in die Praxis umgesetzt worden. Das Prinzip der Diffusionspumpe beruht auf der Tatsache, daß ein Gas von Stellen höheren Partialdruckes nach solchen niederen Partialdruckes diffundiert, auch wenn es mit anderen Gasen oder Dämpfen gemischt ist. Fig. 1034 zeigt schematisch das Prinzip der Pumpen.

Fig. 1034.



Schema einer Diffusionspumpe.

D ist ein Rohr, durch welches in Richtung *AB* ein Dampfstrom streicht, der praktisch gasfrei hergestellt werden kann. Durch das Ansatzrohr *r* steht das Dampfrohr mit dem zu evakuierenden Gefäß in Verbindung. Bei *K* ist ein Kühler angebracht, an dem sich Dampf, der durch die Öffnung *o* in das Rohr *r* tritt, kondensiert, so daß dies Rohr hinter dem Kühler von Dampf frei ist. Da im Dampfstrom *AB* der Partialdruck der Luft Null ist, so wird diese von *C* nach *o* diffundieren und von dem Dampfstrom in ein Vorvakuumgefäß *V* mitgerissen werden, in dem der Dampf kondensiert und das Gas durch eine Vorpumpe abgesaugt wird. Die Luft muß also auf dem Stück *o K* durch den ihr entgegenkommenden Dampfstrom hindurchdiffundieren. Dies ist nur möglich, wenn dieser nicht zu stark ist. Wird durch geeignete Wahl der Öffnung *o* die Dampfgeschwindigkeit genügend klein, so wird die Luft aus dem Rezipienten in den Dampfstrom *AB* hineindiffundieren, mit diesem in das Vorvakuum gelangen und dort abgesaugt werden. Dies wird so lange vor sich gehen, bis der gesamte Luftdruck im Rezipienten gleich dem Partialdruck der Luft im Dampfstrom ist. Da dieser Partialdruck

[1]) Betr. Einzelheiten, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, sowie betr. ausführlicher Literaturangaben vgl. z. B. A. Gehrts, Zeitschr. f. techn. Phys. **1**, 61, 1920, sowie W. Gaede, Zeitschr. f. techn. Phys. **4**, 337, 1923, ferner die S. 1225 angegebenen Bücher.

beliebig klein gemacht werden kann, so bietet die beschriebene Anordnung die Möglichkeit, beliebig hohe Vakua zu erzeugen[1]). Der Dampfstrom saugt also die Luft (oder ein anderes im Rezipienten befindliches Gas) an, auch wenn dessen Druck viel kleiner als der des Dampfes ist, und zwar aus dem Grunde, weil für die Diffusion eines Gases nur dessen Partialdruck maßgebend ist.

Wie schon erwähnt, ist von ausschlaggebender Bedeutung für das Zustandekommen der Saugwirkung die Größe der Öffnung *o*. Diese muß von derselben Größenordnung sein wie die freie Weglänge, die von den Gasmolekülen bei der Diffusion durch den Dampf zurückgelegt wird, ohne daß sie mit einem Dampfmolekül zusammenstoßen. Dies kann man nach Gaede durch folgende Überlegung einsehen: Ein aus dem Rezipienten kommendes Gasmolekül wird, solange es sich noch in größerer Entfernung von der Öffnung *o* befindet, nur wenig Zusammenstöße mit Dampfmolekülen erleiden. In der Nähe von *o* aber werden diese Zusammenstöße häufiger. Ist die freie Weglänge hier klein, so kann das Gasmolekül gar nicht bis *o* gelangen, sondern wird zurückgedrückt. Ist aber die freie Weglänge groß, etwa von der Größenordnung der Öffnung *o*, so werden viele Gasmoleküle ohne Zusammenstoß in das Rohr AB gelangen können und dort mit dem Dampfstrom in das Vorvakuum gerissen. — Aus diesen Überlegungen folgt, daß Pumpen, welche mit großem Drucke des arbeitenden Dampfes betrieben werden, kleine Diffusionsöffnungen (*o*) haben müssen. Umgekehrt sind Pumpen, bei denen der Druck des Dampfes gering gehalten wird, mit großen Öffnungen zu versehen. Praktisch kommen nur Pumpen der letztgenannten Art in Frage, da bei kleinen Diffusionsöffnungen die Sauggeschwindigkeit zu gering wird.

Um weite Öffnungen verwenden und dementsprechend den Dampfdruck genügend klein erhalten zu können, muß für ein ausreichendes Vorvakuum gesorgt werden. Als Dampf kommt im allgemeinen nur Quecksilberdampf in Frage, dessen Druck bei leicht erreichbaren Temperaturen die für die gebräuchlichen Diffusionspumpen erforderlichen Werte (von Bruchteilen eines Millimeters bis zu einigen Millimetern) hat.

Von Gaede ist eine Theorie der Vorgänge in der Diffusionspumpe angegeben worden[2]), auf die aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann[3]). Es sollen nur einige der Hauptresultate angeführt werden. Die Theorie fordert nämlich, daß die Sauggeschwindigkeit einer Diffusionspumpe unabhängig von dem Verdünnungsgrade des Gases sein soll; und es hat sich auch bei der experimentellen Prüfung gezeigt, daß in der Tat das pro Zeiteinheit abgesaugte Gasvolumen sich in weiten Druckbereichen nicht mit dem Drucke ändert. Für die Diffusionspumpe darf es also im Prinzip ein „Grenzvakuum" (vgl. S. 1207) nicht geben. Wenn ein solches dennoch

---

1) Vgl. hierzu W. Molthan, Zeitschr. f. Phys. **39**, 1, 1926.
2) W. Gaede, Ann. d. Phys. **46**, 357, 1915.
3) Vgl. auch Band III, 2, S. 111 dieses Buches.

auftritt, so liegt dieses entweder an Undichtigkeiten in der Apparatur oder an der Gasabgabe der Wände der benutzten Gefäße und Rohre. An diesen haften immer adsorbierte Gasschichten, welche nur schwer entfernt werden können. Sind die auf diese Weise in die Apparatur gelangenden Gasmengen ebenso groß wie die in der gleichen Zeit von der Pumpe weggesaugten Mengen, so ist ein Grenzvakuum erreicht, das also nicht durch die Eigenschaften der Pumpe, sondern durch die der zu evakuierenden Gefäße bestimmt ist.

Was die Sauggeschwindigkeit der Diffusionspumpen betrifft, so hängt diese außer von der Breite des Diffusionsspaltes sehr wesentlich von der Natur des abzusaugenden Gases ab. Aus den obigen Überlegungen über die Wirkungsweise der Pumpen ist ohne weiteres einzusehen, daß Gase mit geringem Molekulargewicht infolge ihrer größeren Diffusionsgeschwindigkeit schneller abgesaugt werden als Gase mit großem Molekulargewicht. Diese Unterschiede in der Saugwirkung sind auch experimentell beobachtet; so wird Wasserstoff um das mehrfache schneller abgesogen als Luft. (Im Gegensatz zur Molekularpumpe, welche die schwereren Gase schneller absaugt.)

Die Vorbedingung für das Zustandekommen der Saugwirkung der Diffusionspumpe ist nach den obigen Ausführungen darin zu sehen, daß das Gas die Möglichkeit haben muß, gegen den aus der Öffnung *o* (vgl. Fig. 1034) austretenden Dampfstrom zu diffundieren. Ist die Größe der Diffusionsöffnung *o* oder der Druck des Dampfes zu groß, so kann der Fall eintreten, daß die Pumpe nur so lange saugt, bis ein Teil des Gases aus dem Rezipienten entfernt ist und der Druck in demselben nicht mehr ausreicht, um einen weiteren Transport von Gasmolekülen gegen den bei *o* austretenden Dampfstrom zu ermöglichen. In diesem Falle kann also die Pumpe den Rezipienten nur bis zu einem Gasdruck evakuieren, der gleich dem Druck des Dampfes an der Stelle *o* ist. Die Pumpe ist dann im wesentlichen eine „Dampfstrahlpumpe" [1]), die wie ein Dampfinjektor wirkt. Der Dampfstrahl reißt, solange der Druck im Rezipienten noch groß genug ist, um ein Durchtreten des Gases durch *o* zu ermöglichen, die Gasmoleküle mit in das Vorvakuum, wo der Dampf kondensiert, das Gas angestaut und von einer Vorpumpe abgesaugt wird. Je größer die Wucht des Dampfstrahles, desto größer ist die Stauung des Dampf-Luftgemisches im Vorvakuum, um so größer ist also die Differenz des Druckes zwischen Saugdüse *o* und Vorvakuum.

Die Wirkung einer Pumpe wird gesteigert werden, wenn der Weg, auf dem das Gas gegen den Dampf diffundieren muß, möglichst verkleinert wird. Bei den „Kondensationspumpen" [2]) wird dies dadurch erreicht, daß der Dampf unmittelbar, nachdem er die Diffusionsöffnung passiert hat, an einem Kühler kondensiert wird. Dadurch soll bewirkt werden, daß möglichst wenig

---

[1]) Dies Wort wird von manchen Autoren nicht in dem hier dargelegten Sinne gebraucht, sondern manchmal auch als Bezeichnung für einige Formen von Diffusionspumpen verwandt.

[2]) Solche sind speziell von I. Langmuir konstruiert worden. Betr. Literatur vgl. die Anmerkung auf S. 1220.

Moleküle des Dampfstrahls dem angesaugten Gase entgegenfliegen und sein Herantreten an den Dampfstrom verhindern.

Eine strenge Entscheidung darüber, ob eine Pumpe eine Dampfstrahl-, Diffusions- oder Kondensationspumpe ist, läßt sich bei den einzelnen Konstruktionen schwer treffen. In den meisten Fällen wirken die verschiedenen Prinzipe gleichzeitig mit. Eine allen diesen Pumpen gemeinsame Eigentümlichkeit ist es, daß sie Dampf derselben Art, wie er zum Betrieb der Pumpe verwandt wird — in den meisten Fällen also Quecksilberdampf — nur bis zu dem an der Öffnung *o* herrschenden Drucke absaugen; denn für eine weitere Saugwirkung ist kein Druckgefälle mehr vorhanden. Solche Dampfreste müssen vermittelst besonderer Kühlvorrichtungen (mit flüssiger Luft oder ähnlichem) durch Kondensation aus dem Rezipienten entfernt werden.

Im folgenden soll eine Reihe der gebräuchlichsten Pumpentypen besprochen werden. Es sind nur wenige aus der großen Zahl der in den letzten Jahren ausgeführten Konstruktionen. Eine bis 1923 ziemlich vollständige Zusammenstellung der wichtigsten Typen hat Gaede[1]) gegeben.

Um eine genügende Sauggeschwindigkeit zu erzielen, müssen die Diffusionsspalte verhältnismäßig groß (einige Millimeter) sein; da andererseits die Spalte, wie oben auseinandergesetzt ist, von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge sein müssen, so können Diffusionspumpen erst ganz zur Wirksamkeit kommen, wenn das Vorvakuum ziemlich hohe Werte (etwa 0,01 bis 0,001 mm) erreicht hat. Dampfstrahlpumpen dagegen arbeiten bereits bei geringeren Werten des Vorvakuums und werden darum häufig als Vorpumpen zu Diffusionspumpen benutzt. Man schaltet zwei oder mehr Dampfstrahl- und Diffusionspumpen hintereinander und erzielt dadurch den Vorteil, daß man als Vorpumpe zur ersten Dampfstrahlpumpe eine weniger weit saugende Pumpe, z. B. eine Wasserstrahlpumpe benutzen kann. Die Vorpumpen ergeben dann ein so gutes Vorvakuum, daß die Hauptdiffusionspumpe in Tätigkeit treten kann. Häufig werden die Pumpen direkt neben- oder übereinander gebaut; man hat dann sogenannte Stufenstrahlpumpen. Bei diesen wird also die ganze Druckdifferenz zwischen Vorpumpe und Hochvakuum in mehrere Stufen geteilt.

Fig. 1035 stellt schematisch die Innenkonstruktion einer derartigen ganz aus Stahl hergestellten Pumpe dar, die mit drei Stufen arbeitet. Der unterste Raum steht mit der Vorpumpe durch das Rohr *r* in Verbindung. Das unten bei *Q* befindliche Quecksilber wird durch Gas- oder elektrische Heizung zum Sieden gebracht. Der Dampf steigt in dem mittleren Rohre hoch und tritt durch die Düsen 1, 2 und 3 aus. An den Metallwänden, welche durch einen bei *e* eintretenden und bei *a* wieder austretenden Wasserstrom gekühlt werden, wird er kondensiert, und das Quecksilber fließt nach *Q* zurück. Auf diese Weise ist ein kontinuierlicher Betrieb ermöglicht. Beim Austritt aus den Düsen diffundiert das in den einzelnen Abteilungen der Pumpe befindliche

[1]) W. Gaede, Zeitschr. f. techn. Phys. 4, 337, 1923.

Gas in den Dampf hinein und wird in den nächstunteren Raum befördert, aus dem es die Vorpumpe absaugt. Im obersten Raum, an den vermittelst eines Schliffes der Rezipient angeschlossen wird, entsteht das Hochvakuum, welches bei dieser Pumpe höher als 10^{-6} mm ist. Fig. 1036 zeigt die äußere Ansicht der von Gaede konstruierten, ganz aus Metall (Stahl) hergestellten Pumpe.

In letzter Zeit sind verschiedene Typen von Dampfstrahl- und Diffusionspumpen aus Metall konstruiert worden. Diese haben den Vorteil

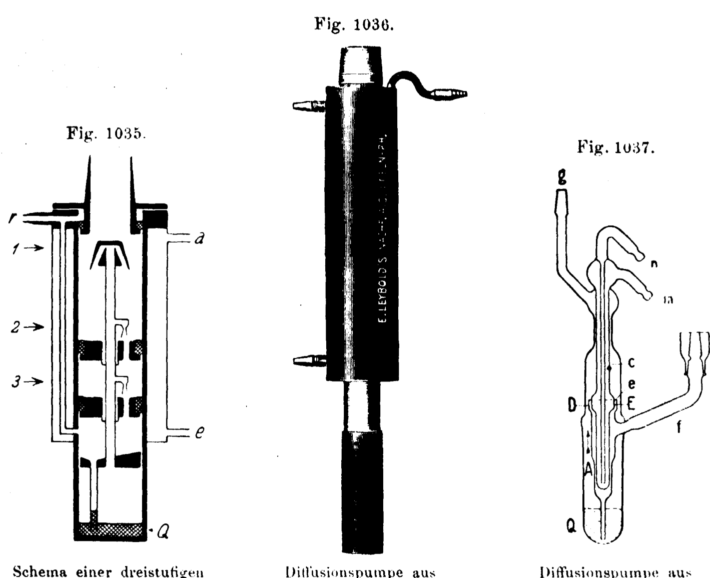


Fig. 1035. Schema einer dreistufigen Diffusionspumpe.

Fig. 1036. Diffusionspumpe aus Stahl nach Gaede.

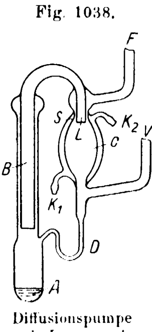
Fig. 1037. Diffusionspumpe aus Glas nach Gaede.

großer Widerstandsfähigkeit gegen mechanische und chemische Einflüsse, gestatten andererseits nicht, den Pumpvorgang dauernd zu kontrollieren, was bei Pumpen aus Glas oder Quarz möglich ist. Die letztgenannten Pumpen lassen sich auch meist bequemer reinigen und haben den Vorteil erheblich einfacherer Herstellung. In Fig. 1037 ist eine von Gaede konstruierte, einstufige, ganz aus Glas bestehende Pumpe abgebildet.

Das Quecksilber Q wird mit einer Flamme oder einem elektrischen Ofen erhitzt. Der Quecksilberdampf steigt in dem Rohr A hoch und spült die Luft, die aus dem Hochvakuum bei e in den Dampfstrom hinein diffundiert, zu dem Kühler c in das Vorvakuum. e ist ein von D und E begrenzter ringförmiger Spalt, dessen Dimensionen von der Größenordnung der freien Weglänge der Gasmoleküle bei dem erforderlichen Vorvakuum von etwa 0,1 mm sind. Bei f wird der Rezipient, bei g die Vorpumpe angeschlossen. m und n sind Zu- und Abfluß für einen Wasserstrom, der zur Kühlung dient.

Eine von Langmuir konstruierte Pumpe ist in Fig. 1038 abgebildet. Der im Rohr B hochsteigende Quecksilberdampf tritt durch L in das Kondensationsgefäß C, das durch V mit der Vorpumpe in Verbindung steht. Das kondensierte Quecksilber fließt durch D wieder nach A zurück. Durch K_1 und K_2 wird

Fig. 1038.

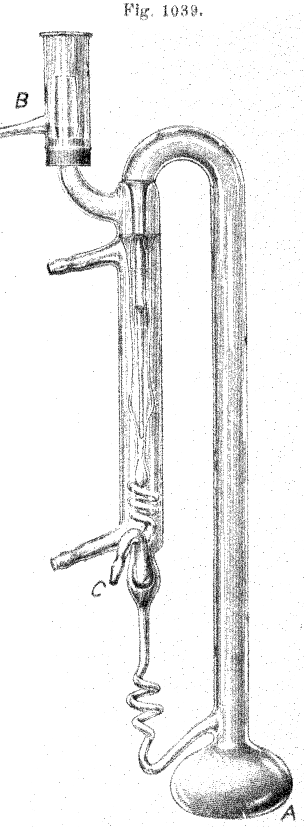


Diffusionspumpe nach Langmuir.

ein Strom von Kühlwasser um das Gefäß C geleitet. Das Hochvakuum wird bei F angeschlossen, kommuniziert also mit dem Vorvakuum durch den Spalt S; die starke Kühlung von C bewirkt starke Kondensation des Quecksilberdampfes, so daß eine Störung des Sauggvorganges durch an den Wänden reflektierte Dampfmoleküle möglichst verhindert wird.

Fig. 1039 stellt eine Diffusionsstufenpumpe aus Glas (nach Volmer) dar. Der in A durch Gas- oder elektrische Heizung erzeugte Quecksilberdampf tritt von oben nach unten durch die verschiedenen Düsen hindurch und erzeugt bei B ein Hochvakuum. Als Vorpumpe (bei C anzuschließen) genügt eine Wasserstrahlpumpe, da das Vorvakuum nur etwa 15 mm zu betragen braucht. Die beiden seitlichen Ansätze dienen zum Zu- und Abfluß des Kühlwassers.

Fig. 1039.



Diffusionspumpe nach Volmer.

Außer den hier beschriebenen Pumpen gibt es eine große Reihe anderer Konstruktionen, deren Wirkungsweise aber auf den Prinzipien beruht, welche hier besprochen wurden, und aus diesen leicht verständlich ist[1]). Die Saug-

[1]) Näheres hierüber und ausführliche Literaturangaben sind zu finden z. B in A. Goetz, Physik und Technik des Hochvakuums, Braunschweig 1926; ferner S. Dushmann, Die Grundlagen der Hochvakuumtechnik, Berlin 1926; H. Ebert, Handbuch der Physik (Springer) 2, 1926.

geschwindigkeit der beschriebenen Typen von Diffusionspumpen liegt zwischen einigen Zehnteln und mehreren Litern pro Sekunde.

§ 7. Weitere Methoden der Vakuumerzeugung[1]**.** Außer durch die bisher angeführten Pumpen kann man die Evakuierung eines Raumes auch auf ganz anderen Wegen erreichen, die hier nur kurz erwähnt werden sollen.

Eine Methode, die zur Erzeugung sehr hohen Vakuums nach vorhergegangenem Auspumpen mit einer Vorpumpe verwandt wird, beruht auf der Eigenschaft gewisser Substanzen (Holzkohle, Kieselsäuregel u. a.), bei starker Abkühlung große Gasmengen zu adsorbieren und beim Erwärmen wieder abzugeben.

Um diese Eigenschaft zum Evakuieren zu benutzen, bringt man die Substanz in ein mit dem Rezipienten in Verbindung stehendes Ansatzrohr. Sodann evakuiert man, soweit die vorhandenen Pumpen es erlauben (unter gleichzeitigem Erwärmen der Adsorptionssubstanz), und bringt dann das Ansatzrohr in ein Kältebad (Feste Kohlensäure-Äthergemisch, flüssige Luft oder ähnliches). Durch die dann einsetzende Adsorption erzielt man außerordentlich hohe Vakua. Diese Methode ist auch heute noch trotz der Erfindung der stark wirkenden Hochvakuumpumpen von großer Bedeutung geblieben.

Von weiteren Evakuierungsmethoden seien diejenigen erwähnt, bei denen die im Rezipienten befindlichen Gase durch Kondensation oder durch chemische Reaktionen beseitigt werden. Näheres hierüber ist in den oben angegebenen Büchern zu finden, die auch genaue Angaben über die experimentellen Einzelheiten enthalten, welche bei Vakuumarbeiten zu beachten sind. Hier sei nur erwähnt, daß man meist mit Glasrohren und Gefäßen arbeitet, die bei niedrigem Vakuum mit dickwandigem Gummischlauch verbunden werden können, zur Erreichung größerer Verdünnungsgrade aber durch Aneinanderschmelzen vereinigt werden müssen. Um der Apparatur eine, wenn auch begrenzte Beweglichkeit zu sichern, verwendet man manchmal Glasspiralen oder die von Kundt eingeführten Glasfedern, d. h. an geeigneten Stellen gebogene Glasröhren; lösbare und drehbare Verbindungen erzielt man mit Schliffen, Absperrungen mit Hähnen, wie sie (für Hochvakuum geeignet) in Fig. 1040 abgebildet sind. In die obere Rinne kann zur besseren Dichtung Quecksilber oder Öl gefüllt werden. Als Schmiermittel verwendet man am besten Gummifett.

Fig. 1040.

Hahn für Hochvakuumleitungen.

Zur Übersicht ist im folgenden eine Tabelle wiedergegeben, in der die Leistungsfähigkeit einer Reihe von heute gebräuchlichen Pumpen angeführt ist.

---

[1]) Vgl. die eben angegebenen Bücher.

Pumpe	Grenzvakuum ungefähr	
Ölpumpe	$5 \cdot 10^{-5}$ mm	Die Sauggeschwindigkeit hängt bei den verschiedenen Pumpen stark von der Konstruktion und Größe ab, so daß von Zahlenangaben in dieser kurzen Übersicht abgesehen werden muß.
Kapselpumpen	10^{-3} mm	
Quecksilberpumpen (rotierend)	10^{-5} mm	
Wasserstrahlpumpen	10—20 mm (Dampfdruck des Wassers)	
Molekularpumpe	10^{-7} mm	
Diffusionspumpen	0	

II. Apparate zur Druckmessung.

Apparate, die zur Messung des Druckes von Gasen, Dämpfen oder Flüssigkeiten dienen, nennt man Manometer. Als Barometer bezeichnet man die speziell zur Messung des atmosphärischen Luftdrucks verwendeten Instrumente. Im folgenden sollen zunächst die wichtigsten Typen von Manometern, und daran anschließend die Barometer besprochen werden.

A. Manometer [1]).

§ 8. Allgemeines. Wie bereits in Kap. X, S. 1001 auseinandergesetzt ist, benutzt man als Einheit des Druckes die „Atmosphäre", d. h. das auf ein Quadratzentimeter wirkende Gewicht einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° und normaler Erdbeschleunigung (980,665 cm/sec²). Dies Gewicht beträgt, bei Zugrundelegung eines Wertes von 13,596 für das spezifische Gewicht des Quecksilbers 1,0333 kg. In der Technik rechnet man der Einfachheit halber häufig mit der Einheit des Druckes von 1 kg pro Quadratzentimeter. Im absoluten Maßsystem ist die Einheit des Druckes 1 Bar gleich 1 Dyne pro Quadratzentimeter. 10^6 Bar bezeichnet man als Megabar. Zwischen diesen Einheiten [2]) bestehen die Beziehungen:

1 Atmosphäre = 1,03328 kg/qcm = 1,01325 Megabar,
1 Megabar = dem Druck einer Quecksilbersäule von 750,06 mm Höhe,
1 kg/qcm = „ „ „ „ „ 735,52 mm „
1 Bar = „ „ „ „ „ $0{,}75 \cdot 10^{-3}$ mm Höhe.

Apparate zur Druckmessung sind auf Grund sehr verschiedener Prinzipien hergestellt worden. Zu einem großen Teile beruhen sie darauf, daß der Druck des Gases mit dem Gewichte einer mit ihm kommunizierenden Flüssigkeitssäule oder mit dem eines festen Körpers verglichen wird (§ 9). Bei anderen Meßmethoden werden die elastischen Deformationen, die die Gefäßwände durch den Druck erleiden, zur Messung desselben verwandt (§ 10). Weiterhin werden die Gesetze, denen die Gase selbst folgen, Druckmessungen zugrunde gelegt; und zwar die eigentlichen Gasgesetze (§ 12), wie auch die-

[1]) Ausführliche Literaturangaben, welche über die in den Anmerkungen zu findenden hinausgehen, findet man z. B. in den bereits mehrfach angegebenen Büchern von Winkelmann, Goetz und Dushmann, sowie in Chwolson, Lehrb. d. Physik, Braunschweig 1918.

[2]) Betreffs anderer gebräuchlicher Einheiten vgl. Kap. X, S. 1027—1028.

jenigen Gesetzmäßigkeiten, die für die Reibung und Wärmeleitung der Gase gelten (§ 13). Auch auf der Abhängigkeit, die der elektrische Widerstand mancher Körper vom äußeren Druck zeigt, läßt sich eine Methode zur Druckmessung aufbauen (§ 11). Schließlich kann aus der Art und Stärke des Durchgangs von elektrischem Strom durch Gase auf den Druck derselben geschlossen werden (§ 14)[1].

§ 9. Flüssigkeitsmanometer. Kolbenmanometer. a) Flüssigkeitsmanometer. Die Methode der Druckmessung durch das Gewicht von Flüssigkeitssäulen ist bereits in Kap. X, § 15 näher beschrieben worden. Durch Flüssigkeiten von geeignetem spezifischen Gewicht (Quecksilber, Schwefelsäure, Glycerin, Wasser, Xylol, Alkohol u. a.) lassen sich derartige Manometer für ziemlich große Druckintervalle verwenden.

Zur Messung sehr großer Drucke sind aber selbst bei der Verwendung von Quecksilber beträchtliche Höhen der Manometer erforderlich. So brachte Cailletet ein 300 m langes Quecksilbermanometer aus Stahlrohr am Eiffelturm an, mit dem Drucke bis zu 400 Atmosphären gemessen werden können. Auch an Hauswänden und dergleichen werden solche Manometer angebracht. Um derartig große, unbequem zu handhabende Instrumente zu vermeiden, ist man dazu übergegangen, die Flüssigkeitssäule zu unterteilen. Schematisch ist ein solches Instrument[2] in Fig. 1041 dargestellt.

In zwei horizontale Röhren ist eine Reihe von vertikalen Röhren eingesetzt. Eine Anzahl von Hähnen gestattet oben und unten die Kommunikation zwischen den Röhren herzustellen oder aufzuheben. Der Apparat wird teils mit Quecksilber, teils mit Wasser gefüllt. Das linksseitige Ende der oberen Stahlröhre kommuniziert mit dem Raume, dessen Druck gemessen werden soll, das rechtsseitige mit der Atmosphäre. Der Gesamtdruck setzt sich dann zusammen aus der Summe aller Differenzen der Quecksilberhöhen weniger der Summe aller Differenzen der Wasserhöhen. Für verschiedene Druckintervalle kann man durch geeignete Einstellung der Hähne einzelne Rohre aus- und einschalten. So ist in der Fig. 1041 der Hahn oben zwischen 5 und 6 und unten zwischen 10 und 11 geöffnet, so daß sich hier der Niveauunterschied ausgleichen kann.

Fig. 1041.

Manometer für hohe Drucke nach Thiesen.

Flüssigkeitsmanometer der in Fig. 1042 gezeichneten Form sind z. B. zur Kontrolle des Gasdruckes in Gasentwicklungsgefäßen sehr geeignet. Aus der Höhe der in dem langen Rohre aufsteigenden Flüssigkeitssäule erkennt man die Größe des Überdruckes in der Flasche; analog wie in Fig. 1043 die Säule *AB* den Wert des Unterdruckes — gegenüber dem äußeren Luftdruck — erkennen läßt.

Zur Messung kleiner Druckdifferenzen kann die Genauigkeit des gewöhnlichen Flüssigkeits-U-Rohr-Manometers dadurch gesteigert werden, daß man ihm die in Fig. 1044 gezeichnete Form[3] gibt, und es mit zwei sich nicht mischenden Flüssig-

---

[1] Auf die Methoden der Druckmessung, welche auf der Änderung des Brechungsquotienten mit dem Drucke beruhen, soll hier nicht näher eingegangen werden. Betreffs einer interferometrischen Messung hoher Drucke vgl. L. van Doren, H. K. Parker und P. Lotz, Journ. Amer. Chem. Soc. **43**, 2497, 1921.

[2] M. Thiesen, Zeitschr. f. Instrkd. **1**, 114, 1881.

[3] Kretz, Dinglers Journ. **190**, 16, 1868.

keiten geeigneten spezifischen Gewichtes füllt. Ist die zwischen A und B herrschende Druckdifferenz a mm Wassersäule, so ist die beobachtete Verschiebung v der Stelle S

$$v = \frac{a}{\varrho_a - \varrho_b + \frac{q}{Q}(\varrho_a + \varrho_b)},$$

wo ϱ_a und ϱ_b die Dichten der beiden Flüssigkeiten, q und Q die Querschnitte des U-Rohres und der Erweiterungen sind. Durch passende Wahl der Flüssigkeiten (z. B. Terpentinöl, Alkohol-Wasser-Gemisch) kann die Verschiebung v sehr groß gemacht werden.

Häufig benutzt man zur Messung kleiner Drucke auch eine sogenannte Barometerprobe, d. h. ein abgekürztes Barometer, wie es in Fig. 1045 dargestellt ist.

Bei sehr kleinen Drucken bzw. Druckdifferenzen sind die gewöhnlichen Flüssigkeitsmanometer zur Messung nicht geeignet, da die Verschiebung der

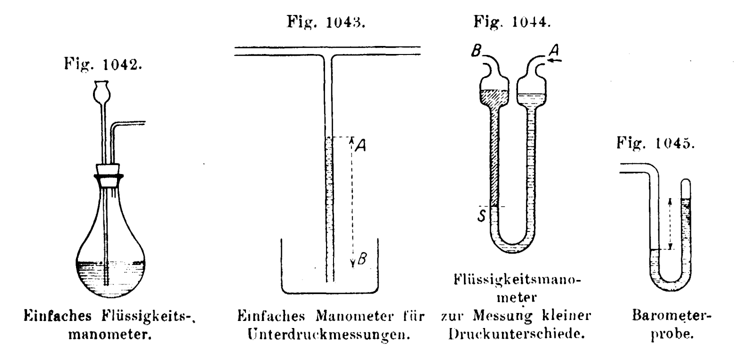


Fig. 1042. Einfaches Flüssigkeits-manometer.

Fig. 1043. Einfaches Manometer für Unterdruckmessungen.

Fig. 1044. Flüssigkeitsmanometer zur Messung kleiner Druckunterschiede.

Fig. 1045. Barometerprobe.

Flüssigkeitssäule zu gering ist, um eine genaue Ablesung zu gestatten. Neigt man das Rohr aber gegen die Vertikale, so entspricht einer kleinen Höhendifferenz eine größere Verschiebung des Flüssigkeitsspiegels längs des Rohres. Die auf dieser Überlegung beruhende Toeplersche Drucklibelle ist in Kap. X, § 15 näher beschrieben.

Ein anderer Apparat[1]) zur Messung kleiner Druckdifferenzen ist in Fig. 1046 abgebildet.

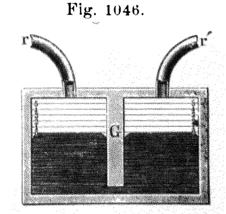


Fig. 1046. Manometer zur Messung kleiner Druckdifferenzen nach Thiesen und Scheel.

Das aus zwei kommunizierenden Kammern bestehende Gefäß ist durch aufgelegte Glasplatten, deren hintere eine Skala trägt, verschlossen. Die Röhren r und r' führen zu den Räumen, deren Druckdifferenz gemessen werden soll. Mittels zweier Mikroskope beobachtet man von vorn die Stellung der Quecksilbermenisken oder besser die der Mitte zwischen der nächsten sichtbaren Teilungslinie und ihrem Spiegelbild im Quecksilber. Etwaige Unsymmetrieen des Apparates, die die Ablesung fälschen

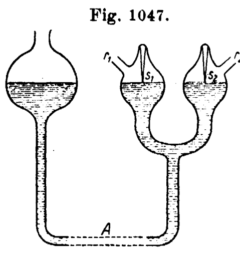
[1]) M. Thiesen und K. Scheel, Zeitschr. f. Instrkde. **21**, 175, 1901.

könnten, eliminiert man durch zwei Messungen, bei denen durch Vertauschung der Zuleitungen r und r' auch die Einstellungen in den beiden Kammern vertauscht werden.

Ein von Rayleigh[1]) angegebenes Manometer für kleine Druckdifferenzen ist in Fig. 1047 dargestellt.

Der ganze Apparat ist um eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Achse drehbar. Er wird zunächst, während in beiden Gefäßen der gleiche Druck herrscht, so eingestellt, daß die beiden Spitzen s_1 und s_2 gerade die Quecksilberoberfläche berühren, welche durch ein bei A angeschlossenes Vorratsgefäß reguliert werden kann. Werden die bezüglich ihres Druckes zu vergleichenden Räume bei r_1 und r_2 angeschlossen, so muß, damit wiederum beide Spitzen die Oberfläche gerade berühren, der Apparat etwas geneigt werden. Die hierzu erforderliche Drehung läßt sich, eventuell mit Spiegelablesung, sehr genau bestimmen und aus ihr die gesuchte Druckdifferenz ermitteln. Eine Abänderung dieses Apparates, durch die auch eine Erweiterung des Meßbereiches erreicht wurde, ist von Scheel und Heuse[2]) angegeben worden. Die Meßgenauigkeit kann noch dadurch erhöht werden, daß die Feststellung der Berührung der Quecksilberoberfläche durch die Spitzen vermittelst Schließens eines elektrischen Kontaktes erfolgt[3]).

Fig. 1047.



Manometer zur Messung kleiner Druckdifferenzen nach Rayleigh.

Für die Messung außerordentlich kleiner Druckdifferenzen, bei denen eine Verschiebung der Flüssigkeitsoberflächen nicht mehr meßbar ist, kann man in der Weise verfahren, daß man in einem Flüssigkeitsfaden kleine Teilchen zum Schweben bringt, deren Bewegung (eventuell mit einem Mikroskop) beobachtet werden kann[4]). Eine Druckdifferenz auf den beiden Seiten des Flüssigkeitsfadens macht sich durch eine Verschiebung der Teilchen bemerkbar. — Noch empfindlicher läßt sich dieses Manometer dadurch machen, daß man schwebende Teilchen nicht in einer Flüssigkeit, sondern in einem Gase beobachtet[5]) (z. B. Rauchteilchen) und aus ihrer Bewegung auf die Drucke schließt. Auf diese Weise kann man bei Drucken von der Größenordnung einer Atmosphäre noch Druckänderungen bis 10^{-8} mm Quecksilber messen.

Die Ablesung der Höhe der Flüssigkeitssäulen erfolgt entweder, wie schon bei Gelegenheit des in Fig. 1047 gezeichneten Manometers besprochen wurde, mit feinen Spitzen oder, wenn nicht äußerste Genauigkeit erstrebt wird, durch Ablesen an einem hinter dem Manometer angebrachten Maßstab, der oft, um Parallaxe zu vermeiden, auf einen Spiegel geritzt ist. Genauer

---

1) Lord Rayleigh, Zeitschr. f. phys. Chem. **37**, 713, 1901.
2) K. Scheel und W. Heuse, Zeitschr. f. Instrkde. **29**, 344, 1909.
3) Z. B. E. Hering, Ann. d. Phys. **21**, 319, 1906; vgl. auch W. Gaede, Habilitationsschrift, Freiburg i. B. 1910.
4) F. Michaud, Ann. de phys. **17**, 382, 1922.
5) O. E. Frivold, Physik. Zeitschr. **22**, 605, 1921.

wird die Messung durch Benutzung eines Kathetometers. Eine exakte Ablesung kann auch dadurch erreicht werden, daß ringförmige Visiere um die Manometerröhre geschoben und so eingestellt werden, daß die Flüssigkeitsoberfläche und der untere Visierrand sich gerade tangieren[1]) (vgl. z. B. Fig. 1059, S. 1239).

Bei den meisten Ablesungen an Flüssigkeitsmanometern ist die in manchen Fällen sehr beträchtliche Einwirkung der Kapillarität zu berücksichtigen. Diese ruft eine Krümmung der Oberfläche hervor, die, je nachdem die Flüssigkeit die Rohrwände benetzt oder nicht, nach oben konkav bzw. konvex ist. Man stellt immer auf den Scheitel des Meniskus, also beim Quecksilber (Kapillardepression) auf die obere, bei den meisten anderen Flüssigkeiten auf die untere Tangentialebene des Meniskus ein. In jedem Falle tritt zu dem Druck der Flüssigkeit noch der Einfluß der Kapillarwirkung hinzu. Dieser ist sehr schwer genau zu berücksichtigen. Am besten ist es, die Manometer so zu konstruieren, daß die Messung an Stellen erfolgt, wo die Rohrweite so beträchtlich ist, daß die Oberfläche als eben betrachtet werden kann. Dies ist nicht immer möglich; denn z. B. bei Quecksilber beträgt die Kapillardepression bei 15 mm Rohrweite noch etwa 0,1 mm. Für engere Röhren wächst sie stark an. Wäre die Depression bei gleicher Röhrenweite immer dieselbe, so könnte sie in Rechnung gebracht werden; sie hängt aber außer von der Rohrweite noch von der Höhe des Meniskus ab, die ihrerseits wiederum durch die Art der Wand- und Flüssigkeitsoberfläche sowie durch das darüber befindliche Gas bestimmt ist. Läßt sich die Höhe des Meniskus ermitteln, so kann für Quecksilber aus Tabellen[2]) der Wert der Kapillardepression wenigstens angenähert entnommen werden, wenn außerdem noch der innere Rohrdurchmesser bekannt ist.

b) Kolbenmanometer. Bei den bisher beschriebenen Manometern wurde der Druck durch das hydrostatische Gewicht einer Flüssigkeitssäule gemessen, die ihm das Gleichgewicht hält. Zur Messung hoher Drucke ist aber, selbst bei Verwendung des schweren Quecksilbers, eine sehr große Höhe der Flüssigkeitssäule erforderlich. Um diese zu vermeiden, hat man Manometer konstruiert, bei denen nicht das Gewicht einer Flüssigkeit, sondern das eines festen Körpers dem zu messenden Druck das Gleichgewicht hält. Bei diesen Manometern (Kolbenmanometern oder Druckwaagen) wird der Druck durch eine Flüssigkeit auf einen Kolben von bekanntem Querschnitt übertragen, der in einem senkrecht stehenden Zylinder frei beweglich ist. Durch Gewichte, mit denen dieser Kolben belastet wird, kann die Größe des Druckes gemessen werden; und zwar dadurch, daß so lange Gewichte aufgelegt werden, bis der Kolben seine Stellung beibehält. Die Dichtung des Kolbens gegen den Zylinder erfolgt bei verschiedenen Ausführungsformen in verschiedener Weise; teils dadurch, daß eine zähe Flüssigkeit zur Übertragung benutzt wird, die nur ganz langsam an dem Kolben vorbeitritt, teils durch Leder-

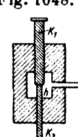
---

[1]) Über andere Ablesemethoden vgl. z. B. K. Prytz, Ann. d. Phys. **16**, 735, 1905.
[2]) Z. B. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik.

dichtungen. Zur Verringerung der Reibung kann der Kolben in Rotation versetzt werden. Um bei der Messung sehr hoher Drucke die Verwendung sehr großer Gewichte bzw. sehr dünner Kolben zu vermeiden, läßt man die Gewichte indirekt durch Vermittlung eines Hebels auf den Kolben wirken, [z. B. bei der Stückrathschen Druckwaage] [1]). Auf andere Weise kann dasselbe dadurch erreicht werden, daß man den zu messenden Druck nach dem Prinzip einer umgekehrt wirkenden hydraulischen Presse reduziert [Desgoffesches oder Amagatsches Manometer] [2]). Wirkt der Druck p auf einen Kolben vom Querschnitt q, und drückt dieser Kolben auf einen größeren Kolben vom Querschnitt Q und dieser wiederum auf eine Flüssigkeit, so herrscht in dieser der Druck $\frac{p \cdot q}{Q}$. Dieser Druck kann leichter, unter Umständen mit einem Quecksilbermanometer, ermittelt werden. Zur Festlegung des Wertes von p muß also q/Q bekannt sein. Dies wird entweder durch direkte Ausmessung oder bei nicht zu großen Drucken durch Vergleich mit einem Quecksilbermanometer bestimmt. Bei höheren Drucken muß die Deformation von Kolben und Zylinder berücksichtigt werden [3]).

Eine Verringerung der zur Messung hoher Drucke erforderlichen Gewichte läßt sich auch durch Verkleinerung des Kolbenquerschnittes erzielen; jedoch ist dem durch die notwendige Stabilität eine Grenze gesetzt. Diese ist aber durch Verwendung von Differentialkolben sehr stark zu erweitern. Bei dem schematisch in Fig. 1048 dargestellten Differentialkolbenmanometer wirkt der Druck durch eine im Hohlraum h befindliche durch b mit dem zu messenden Druckraum kommunizierende Flüssigkeit auf die beiden miteinander verbundenen Kolben K_1 und K_2. Die beiden Kolben haben verschiedenen Querschnitt, und wirksam ist infolgedessen nur die Differenz der Querschnitte, so daß also ein solches Instrument ein Manometer mit sehr dünnem Kolben ersetzen kann.

Fig. 1048.



Schema eines Differentialkolbenmanometers.

§ 10. Elastische Manometer. Für viele Zwecke hat es sich als praktisch erwiesen, den zu messenden Druck nicht, wie bei den bisher beschriebenen Manometern, durch ein Gewicht zu kompensieren, sondern ihn durch die elastischen Kräfte zu messen, die beim Deformieren der Gefäßwandungen durch den wirkenden Druck auftreten. Man benutzt meist die Deformationen von Platten oder von gebogenen Röhren [4]). Das Prinzip der letzteren (Bourdonsche Federn) ist folgendes: Eine aus dünnem Metallblech hergestellte Röhre von ovalem Querschnitt und der in Fig. 1049 angedeuteten Form wird ihre Krümmung ändern, wenn der Druck im Innern

---

1) H. F. Wiebe, Zeitschr. f. Instrkde. 30, 205, 1910.
2) E. H. Amagat, Ann. de chim. et phys. 29, 70, 1893.
3) Näheres vgl. z. B. P. P. Koch und E. Wagner, Ann. d. Phys. 31, 31, 1910, und L. Holborn, Ann. d. Phys. 54, 503, 1917.
4) Über die Theorie derselben vgl. H. Lorenz, Physik. Zeitschr. 18, 117, 1917.

ein anderer ist als im Außenraum. Wird durch das Röhrchen *r* Luft aus der Röhre entfernt, so wird sie sich stärker krümmen, umgekehrt streckt sie sich, falls der Innendruck größer ist als der äußere. Wird das eine Ende des Rohres festgehalten, so kann die Verbiegung des andern auf ein Zeigerwerk übertragen werden. Falls man den Apparat bei *r* luftdicht verschließt, so zeigt er die Veränderungen des äußeren Druckes an; andererseits kann er, wenn *r* mit dem Raum, in dem der Druck gemessen werden soll, verbunden wird, die Druckänderungen dieses Raumes gegenüber dem Außenraum angeben. Statt einer solchen einfachen Bourdonfeder kann man, wenn es sich um Messungen sehr kleiner Drucke handelt, eine spiralförmig gewundene (vgl. Fig. 1050) benutzen, deren Drehung — eventuell mit einem Spiegel — festgestellt wird.

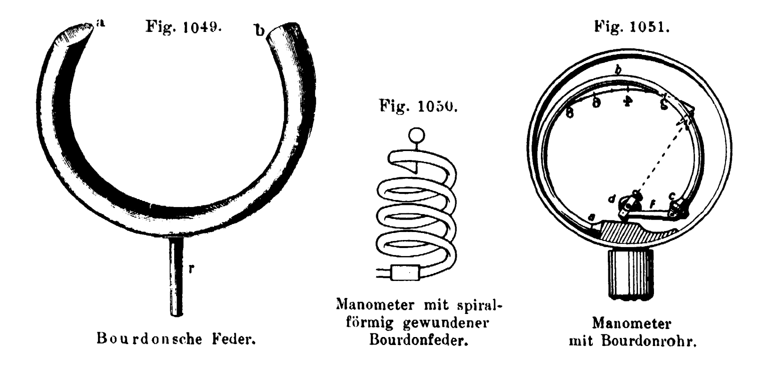


Fig. 1049. Bourdonsche Feder.

Fig. 1050. Manometer mit spiralförmig gewundener Bourdonfeder.

Fig. 1051. Manometer mit Bourdonrohr.

Fig. 1051 zeigt ein solches Instrument mit einfacher Feder, das wohl keiner Erläuterung mehr bedarf. Die Eichung erfolgt empirisch mit Quecksilber- oder andern Manometern. Derartige Instrumente werden speziell für technische Druckmessungen sehr häufig verwandt.

Nach dem Prinzip der Bourdonfeder ist von E. Ladenburg und Lehmann ein Manometer aus Quarzglas konstruiert worden [1]). Dies bietet hauptsächlich den Vorteil, daß es gegen chemische Einflüsse der Gase, deren Druck gemessen werden soll, weitgehend unempfindlich ist. Die erreichbare Empfindlichkeit läßt sich durch Spiegelablesung vergrößern, aber kaum höher als bis 10^{-3} mm bringen.

Wie schon erwähnt, lassen sich auch die Durchbiegungen von Platten, die einen Teil der Wände des Druckgefäßes bilden, zur Druckmessung verwenden [2]). Von Scheel und Heuse [3]) ist ein empfindliches Instrument nach dieser Methode konstruiert worden, das sehr kleine Druckdifferenzen (bis zu

---

1) E. Ladenburg und E. Lehmann, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **8**, 20, 1906; vgl. auch M. Bodenstein, Chem. Ber. **51**, 1640, 1918.

2) Betreffs eines Membranmanometers aus Quarz vgl. auch H. Braune, Zeitschr. f. phys. Chem. **102**, 480, 1922.

3) K. Scheel und W. Heuse, Zeitschr. f. Instrkde. **29**, 14, 1909.

10^{-4} mm) zu messen gestattet; die Messung der Plattendurchbiegung erfolgt mit einer empfindlichen Interferenzmethode.

Betreffs einer andern Form eines Membranmanometers sei noch auf das später (§ 23) beschriebene Barometer von Vidi hingewiesen.

Ein Membranmanometer ist auch das Königsche Flammenmanometer, bei dem die zu messenden Druckschwankungen (z. B. Schallschwingungen) durch eine Membran auf einen Leuchtgasstrom übertragen werden. Eine durch diesen gespeiste Flamme gibt dann die Druckschwankungen durch entsprechende Längenänderungen wieder[1]).

§ 11. Widerstandsmanometer. Nur für sehr hohe Drucke anwendbar ist eine Methode, welche die Abhängigkeit des Widerstandes eines Metalles vom äußeren Druck zur Messung desselben verwendet. Man benutzt hierzu Metalle, deren Widerstand möglichst wenig temperaturabhängig ist, und überträgt den Druck durch eine Flüssigkeit auf den Körper, dessen Widerstandsänderungen bestimmt werden sollen. Da diese sehr klein sind, so sind sehr genaue Widerstandsmessungen erforderlich[2]).

Fig. 1052.

Kompressionsmanometer für hohe Drucke.

§ 12. Kompressionsmanometer. Eine Reihe von wichtigen Meßmethoden sowohl für große wie auch für kleine Drucke beruht auf der Anwendung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes. Ein für größere Drucke verwendbares Manometer zeigt Fig. 1052. Bei diesem wird ein bestimmtes Gasvolumen von einer Sperrflüssigkeit (Quecksilber), auf welche der zu messende Druck wirkt, je nach der Größe desselben mehr oder weniger komprimiert. Durch den Kanal *a* verbreitet sich der Druck in den Raum *b*. In demselben steht ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß, in welches eine mit Luft gefüllte Glasröhre eintaucht. Der Druck treibt das Quecksilber in das Rohr, wodurch die eingeschlossene Luft komprimiert wird. Wenn sie auf $^1/_2$, $^1/_4$ usw. ihres ursprünglichen Volumens zusammengedrückt ist, so übt sie einen Überdruck von 2, 4 usw. Atmosphären aus. Da mit höheren Drucken die Ablesegenauigkeit kleiner wird, benutzt man häufig Glasrohre, die sich nach oben zu verjüngen, so daß eine gleichmäßige Ablesegenauigkeit ermöglicht wird. Bei großen Drucken müssen die Abweichungen des komprimierten Gases vom Boyleschen Gesetz berücksichtigt werden.

Zur Messung sehr kleiner Drucke wird sehr häufig das nach Mac Leod genannte Kompressionsmanometer benutzt, dem ebenfalls das Boylesche Gesetz zugrunde liegt. Im Gegensatz zu dem eben beschriebenen Manometer,

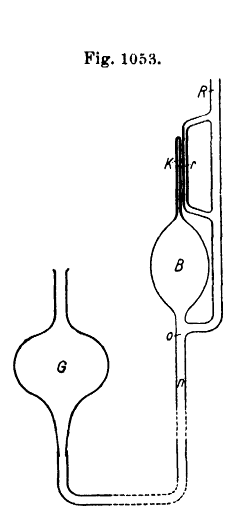
[1]) R. König, Quelques expériences d'acoustique. Paris 1882.

[2]) E. Lisell, Diss. Upsala 1902 und P. W. Bridgman, Proc. Nat. Ac. Sc. **3**, 10, 1917.

bei dem man das Volumen einer konstanten Menge Gas mißt, wird bei diesem Apparat ein bestimmtes Volumen des Gases, dessen Druck gemessen werden soll, durch Quecksilber abgesperrt und soweit komprimiert, bis der Druck deutlich meßbar ist. Aus dem Werte dieses Druckes und dem Kompressionsverhältnis, das bekannt sein muß, kann der unbekannte Gasdruck ermittelt werden.

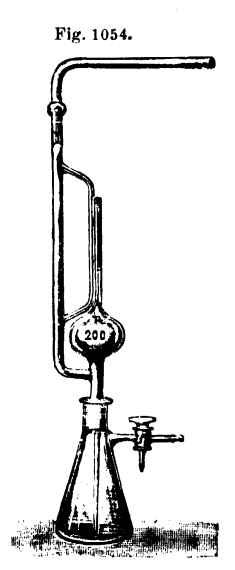
Fig. 1053 zeigt ein solches Manometer. Die Glasbirne *B*, deren Volumen *V* genau bekannt ist, kommuniziert durch das Rohr *R* mit dem Raum, dessen Gasdruck gemessen werden soll. Nach oben ist an die Birne eine kalibrierte Kapillare *K* angeschmolzen; durch das Rohr *n*, welches mindestens Barometerhöhe haben muß, steht *B* mit einem Quecksilbergefäß *G*, welches gehoben und gesenkt werden kann, in Verbindung. Ist das Gefäß *G* soweit gesenkt, daß das Quecksilber unterhalb der Öffnung *o* steht, so herrscht in *B* derselbe Druck wie in dem zu messenden

Fig. 1053.



Kompressionsmanometer für niedrige Drucke (Mac Leod).

Fig. 1054.



Abgekürztes Mac Leod sches Manometer.

Raum. Durch Heben von *G* steigt das Quecksilber in *B* hoch und sperrt in der Birne *B* ein bekanntes Gasvolumen *V* ab. Durch weiteres Heben von *G* wird dies Gas in die Kapillare zusammengedrückt, bis sein Druck so groß geworden ist, daß er durch eine Höhendifferenz des Quecksilbers in dem Rohr *r* und der Kapillare meßbar ist. Ist diese Differenz *h* und ist das Volumen der Kapillare, in welches das Gas zusammengedrückt ist, *v*, so ist der unbekannte Gasdruck $h \cdot v / V$. Die Teilung des Rohres *R* in ein weiteres und ein engeres *r*, welches denselben Durchmesser wie die Kapillare hat, ist zu dem Zwecke vorgenommen, um den Einfluß der Kapillardepression auf die Messung von *h* zu vermeiden. Zur Vergrößerung des Meßbereiches des Apparates verwendet man häufig Kapillaren, die in bekanntem Verhältnis abgestuft sind. Das Mac Leodsche Manometer bietet die Möglichkeit, Drucke bis zu sehr kleinen Werten (10^{-7} mm) zu messen. Wie aus der Wirkungsweise des Instrumentes hervorgeht, zeigt es den Druck des Quecksilberdampfes nicht an, da dieser im Apparat immer gesättigt ist. Ebenso ist es zur Messung des Druckes leicht kondensierbarer Gase nicht brauchbar. Über die Fehlerquellen

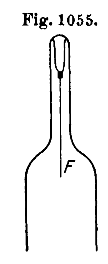
dieses Manometers und deren Vermeidung liegt eine Reihe von Untersuchungen vor[1]). Für spezielle Zwecke ist es vielfach abgeändert worden, besonders hat man versucht, ihm eine möglichst handliche Form zu geben[2]). Eine solche, bei der das lange Rohr *n* dadurch vermieden wird, daß über dem Quecksilbergefäß *G* ein luftverdünnter Raum (z. B. mit einer Wasserstrahlpumpe) erzeugt wird, zeigt Fig. 1054.

Man hat auch das Mac Leodsche Manometer mit andern Manometern kombiniert, und zwar in der Weise, daß man den Druck des abgeschlossenen komprimierten Volumens, wenn derselbe zur direkten Messung zu klein ist, auf anderm Wege feststellt. [Durch Wärmeleitung [3]) (§ 13) oder durch elektrische Entladungen[4]) (§ 14)]. Man kann auf diesem Wege den Meßbereich des Instrumentes bis etwa 10^{-10} mm erweitern.

§ 13. Manometer für sehr kleine Drucke. Die weiteren noch zu besprechenden Methoden der Druckmessung beruhen auf den Gesetzmäßigkeiten, denen die Gase bei kleinen Drucken folgen, und sind infolgedessen auch nur zur Messung geringer Gasdrucke[5]) brauchbar. Die Theorie dieser Meßmethoden ist in Band III, 2 dieses Buches behandelt. Hier sollen nur die prinzipiellen Grundlagen der einzelnen Methoden erwähnt werden, während die genaueren Einzelheiten der verschiedenen Konstruktionen bei den angegebenen Literaturstellen nachgesehen werden können.

Eine Reihe von Meßmethoden ist auf Grund der Gesetze der Gasreibung entwickelt worden. Bei dem Manometer von Hogg[6]) mißt man die Dämpfung, die eine in dem Gase schwingende Scheibe erfährt und benutzt das Abklingen der Schwingungsamplitude als Maß für den Druck des umgebenden Gases. Häufiger als dieses Instrument ist das von Langmuir[7]), Haber und Kerschbaum[8]) angegebene Quarzfadenmanometer benutzt worden. Bei diesem wird aus der Dämpfung, die ein schwingender Quarzfaden in dem Gase, dessen Druck gemessen werden soll, erfährt, auf den Druck des Gases geschlossen. Die Konstruktion geht aus Fig. 1055 hervor. In die Kuppe eines Glasrohres ist (mit Hilfe von Zwischengläsern mit abgestuften Ausdehnungskoeffizienten) ein dünner Quarzfaden *F* eingeschmolzen. Dieser Faden wird durch leichte Schläge an die Glaswand in Schwingungen versetzt und das Abklingen der Amplituden beobachtet. Ein großer Vorteil dieses Manometers ist der, daß es keine Metallteile enthält, welche bei hohem Vakuum Gas abgeben könnten, und daß es sehr widerstandsfähig gegen chemische Einwirkungen ist.

Fig. 1055.



Quarzfadenmanometer.

Ebenfalls auf der Gasreibung und ihrer Veränderlichkeit mit dem Druck (bei geringen Werten desselben) beruht ein von Langmuir[9]) angegebenes Manometer. Bei diesem sind in einem Gefäß zwei runde Scheiben in geringem

---

1) K. Scheel und W. Heuse, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **10**, 785, 1908 und **11**, 13, 1909.
2) Zum Beispiel H. J. Reiff, Zeitschr. f. Instrkde. **34**, 97, 1914.
3) A. H. Pfund, Phys. Rev. **18**, 78, 1921.
4) H. Stintzing, Zeitschr. f. phys. Chem. **108**, 70, 1924.
5) Siehe auch § 12.
6) J. L. Hogg, Proc. Am. Ac. **45**, 3, 1909.
7) I. Langmuir, J. Am. Chem. Soc. **35**, 1907, 1913.
8) F. Haber und F. Kerschbaum, Zeitschr. f. Elektrochem. **20**, 296, 1914.
9) I. Langmuir, Phys. Rev. **1**, 337, 1913.

Abstand übereinander angebracht. Von diesen kann die untere in schnelle Rotation versetzt werden, die obere ist an einem Quarzfaden aufgehängt. Rotiert die untere Scheibe, so wird je nach dem Gasdruck in dem Gefäß durch die Reibung der Gasmoleküle ein mehr oder minder großes Drehmoment auf die obere Scheibe übertragen, welche sich dementsprechend um einen mehr oder minder großen Winkel drehen wird. Die Größe dieses Winkels, welche (eventuell mit Spiegelablesung) gemessen werden kann, ist ein Maß für den Gasdruck. Dies Instrument gestattet Druckmessung bis zu Drucken von 10^{-7} mm herab.

Auf Grund seiner Untersuchungen über das Verhalten der Gase bei geringen Drucken[1]) hat Knudsen ein „absolutes Manometer" konstruiert. Die Wirkungsweise desselben beruht darauf, daß zwei Platten, die, auf verschiedener Temperatur befindlich, sich in einem Gase von geringem Druck einander gegenüberstehen, mechanische Kräfte aufeinander ausüben. Denn die Moleküle, welche von der Oberfläche der heißeren Platte reflektiert werden, haben im Durchschnitt eine größere Geschwindigkeit als die von der kälteren zurückgeworfenen. Diese Geschwindigkeitsdifferenz ruft eine Bewegung der Platten hervor, durch deren Messung der Gasdruck ermittelt werden kann. In Band III, 2 dieses Buches ist die Theorie dieses Manometers behandelt; dort sind auch einzelne Konstruktionsbeispiele angeführt. Auf ähnlichen Überlegungen wie das Knudsensche Manometer beruht eine Reihe anderer Manometertypen[2]).

Da bei geringen Drucken das Wärmeleitvermögen eines Gases, ebenso wie seine Reibung, vom Drucke abhängig ist, kann auch eine Messung der Wärmeleitfähigkeit zur Druckbestimmung verwandt werden. Auf diesem Gedanken beruht das Manometer von Pirani[3]), das später von Hale[4]) verbessert worden ist[5]). In dem Gase, dessen Druck bestimmt werden soll, wird ein dünner Draht ausgespannt und durch elektrischen Strom auf eine gegen die Gefäßwände erhöhte Temperatur gebracht. Der vom Draht zu den Wänden übergehende Wärmestrom hängt vom Druck des umgebenden Gases ab. Je größer derselbe ist, um so mehr wird der Draht gekühlt werden, um so mehr wird sein elektrischer Widerstand abnehmen. Durch Messung des Drahtwiderstandes kann also auf den Druck des umgebenden Gases geschlossen werden. Die Eichung solcher Manometer erfolgt meist empirisch; die Meßgenauigkeit ist sehr groß und gestattet Druckmessungen bis zu 10^{-7} mm herab.

Ebenfalls auf der Wirkung der mit dem Druck variierenden Wärmeleitung beruht ein bei Heraeus konstruiertes Manometer. Bei diesem wird von einem Wärmestrahler (Glühlampe) ein Thermoelement, welches in dem zu untersuchenden Gase angebracht ist, durch Strahlung erwärmt. Die Temperatur, die dieses Element annimmt, und entsprechend die von ihm erzeugte Thermokraft hängt von der Wärmeleitfähigkeit des umgebenden Gases ab.

---

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 32, 809, 1910.
2) Vgl. die S. 1225 angegebenen Bücher.
3) M. v. Pirani, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8, 686, 1906.
4) C. F. Hale, Trans. Am. Electrochem. Soc. 20, 243, 1911.
5) Nähere Angaben auch bei M. Knudsen, Ann. d. Phys. 83, 385, 1927.

Diese Thermokraft kann also zur Messung des Druckes verwandt werden. Ähnliche Manometer sind von Voege[1]) und Rohn[2]) angegeben worden.

§ 14. Elektrische Manometer. Die letzten noch zu besprechenden Methoden der Druckmessung beruhen auf der Beobachtung von elektrischen Entladungsvorgängen in Gasen. Legt man an ein nicht zu enges zylindrisches Glasrohr, in das zwei Elektroden eingeschmolzen sind, die Spannung eines mittelgroßen Funkeninduktors, so ist von einem Gasdruck von etwa 4 cm abwärts eine leuchtende Entladung zu beobachten. Das Aussehen dieser Entladung erlaubt unmittelbar einen Schluß auf die Größenordnung des in dem Gefäß herrschenden Druckes zu ziehen[3]).

Bei sehr geringen Drucken (unterhalb 10^{-5} mm) setzt die selbständige Entladung aus. Durch Schaffung künstlicher Elektronenquellen (Glühdraht u. ä.) ist aber auch bei diesen und noch erheblich kleineren Drucken ein Stromübergang zu erzielen. Aus der Messung der Stärke des fließenden Stromes, welche vom Druck des Gases sehr wesentlich abhängig ist, kann auf die Größe dieses Druckes geschlossen werden. Man kann mit solchen „Ionisationsmanometern" noch äußerst geringe Drucke bis zu Werten von 10^{-15} mm herab nachweisen[3]).

B. Barometer.

§ 15. Allgemeines. Wie bereits oben erwähnt, bezeichnet man diejenigen Manometer, welche speziell zur Messung des atmosphärischen Luftdruckes dienen, als Barometer. Wegen der großen Bedeutung der Barometer sollen diejenigen Manometerformen, welche als Barometer Verwendung finden, in den folgenden Paragraphen gesondert behandelt werden. Es kommen hierfür im wesentlichen spezielle Formen der Flüssigkeits- sowie der Metallmanometer (vgl. § 9 und 10) in Frage.

§ 16. Gefäßbarometer. Dies Instrument ist dem ursprünglichen Torricellischen Versuche (vgl. Kap. X, S. 1029) entsprechend gebaut. Seine einfachste Form ist in Fig. 1056 dargestellt. Der Luftdruck wird durch die Höhendifferenz zwischen der unteren Quecksilberoberfläche und der Quecksilberkuppe in der Röhre gemessen.

Um die eigentlich in jedem Falle notwendige Messung beider Oberflächen zu umgehen, hat man bei manchen Konstruktionen das untere Gefäß so groß gemacht, daß die durch die Luftdruckschwankungen auftretenden Schwankungen der Höhe seines Spiegels unterhalb der Meßgenauigkeit des Apparates bleiben. In diesem Falle genügt die Ablesung des Quecksilberstandes im Rohr zur Messung. In anderer Weise hat man die doppelte Höhenmessung dadurch umgangen, daß man die veränderliche Höhe des Quecksilbers im unteren Gefäß aus dem Durchmesserverhältnis zwischen Gefäß und Rohr berechnet hat. Um die Rechnung zu vermeiden, benutzt man häufig Instrumente, bei denen die Teilung, an der der Quecksilberstand abgelesen wird, in dem angegebenen Verhältnis verkleinert ist [Fig. 1057][4]). Eine sehr verbreitete Form des Gefäßbarometers ist von Fortin an-

---

[1]) W. Voege, Physik. Zeitschr. 7, 498, 1906.
[2]) W. Rohn, Zeitschr. f. Elektrochem. 20, 539, 1914.
[3]) Näheres siehe z. B. in den Seite 1225 angegebenen Büchern.
[4]) Die Fig. 1057 und 1068 sind mit freundlicher Erlaubnis des Verlags Gustav Fischer, Jena, dem Handbuch der Naturwissenschaften Bd. I entnommen.

gegeben worden. Fig. 1058 zeigt den unteren, Fig. 1059 den oberen Teil und Fig. 1060 das ganze Instrument samt Stativ.

Der Boden des Quecksilbergefäßes, das in Fig. 1058 dargestellt ist, wird durch einen Lederbeutel gebildet, gegen welchen von unten her der abgerundete Kopf der Schraube *s* drückt. Durch eine Drehung der Schraube *s* wird also der Quecksilberspiegel gehoben oder gesenkt. Am Deckel des Gefäßes ist ein Stift *r* befestigt, dessen untere Spitze der Nullpunkt der Barometerskala ist. Durch Drehen der Schraube *s* ist es möglich, die Oberfläche des Quecksilbers gerade so hoch zu heben, daß sie die Spitze des Stiftes berührt, d. h. daß sie genau am Nullpunkt der Skala steht. Ist diese Einstellung geschehen, so kann der Barometerstand ohne weiteres an der Stellung der Quecksilberkuppe abgelesen werden. Dies geschieht mit der in Fig. 1059 gezeichneten Vorrichtung. Man stellt die Messinghülse *aa*, welche auf dem Barometerrohr verschiebbar ist, so ein, daß die obere Kante des Schlitzes, durch den man beobachten kann, gerade die Quecksilberkuppe tangiert. Zur genaueren Ablesung ist ein Nonius angebracht. Ein geeignetes Stativ mit cardanischer Aufhängung zeigt Fig. 1060. Klappt man es zusammen, so bilden die Füße ein Gehäuse, in welchem das Instrument verpackt und transportiert werden kann.

Fig. 1056. Fig. 1057.

Gefäßbarometer.

Fig. 1058. Fig. 1059. Fig. 1060.

unterer Teil — oberer Teil — in Stativ

Gefäßbarometer nach Fortin.

§ 17. Heberbarometer. Bei diesen Barometern endigt das Barometerrohr nicht in einem Gefäß, sondern biegt unten heberförmig um und endet in einem kurzen Schenkel, wie es in Fig. 1062 dargestellt ist. An den Stellen der unteren und oberen Quecksilberkuppe muß das Rohr, um den Einfluß der Kapillardepression möglichst zu vermeiden, gleichen Durchmesser haben. Falls dies vollkommen erreicht würde und die Temperatur ganz konstant bliebe, so würde bei Schwankungen des Luftdruckes das Quecksilber in dem einen Schenkel um ebensoviel steigen, wie es im andern fällt; es würde also eine Ablesung an einer Kuppe genügen. Da aber die beiden Voraussetzungen nie erfüllt sein können (vgl. S. 1231 und 1242), so ist die Beobachtung beider Kuppen unerläßlich.

Fig. 1061.

Heberbarometer.

Dies geschieht bei den einzelnen Konstruktionen der Heberbarometer in verschiedener, aber meist leicht ersichtlicher Weise. Fig. 1061 zeigt ein solches häufig benutztes Instrument.

Fig. 1062 stellt eine von Gay-Lussac angegebene Form des Barometers dar. Der offene Schenkel hat nur die kapillare Öffnung *a*, groß genug, um Luft frei eintreten zu lassen, aber zu klein, als daß das Quecksilber auslaufen könnte. Man hat dadurch erstens den Vorteil, daß das Quecksilber gegen das Eindringen von Staub usw. geschützt ist, und ferner den, daß man es leicht transportieren kann; denn selbst bei völligem Umkehren (Fig. 1063) kann kein Quecksilber auslaufen. Damit man das Barometer wieder in die normale Stellung bringen kann, ohne daß Luft in den längeren Schenkel eintritt, hat Bunten die in Fig. 1064 abgebildete Einrichtung getroffen. Diese „Buntensche Spitze" ist eine Art Luftfalle, welche auch sonst häufig Anwendung findet. Bei den Gay-Lussacschen Barometern ist die Teilung meist auf das Glas geätzt.

Fig. 1062. Fig. 1063. Heberbarometer nach Gay-Lussac.

Fig. 1064. Buntensche Spitze.

Fig. 1065. Gefäßheberbarometer (Wild-Fuess).

§ 18. Gefäßheberbarometer. Diese Instrumente vereinigen die Vorteile des Gefäßbarometers mit denen des Heberbarometers. Die Gefäßheberbarometer besitzen vom Fortinschen Instrumente den anhebbaren Boden, sind aber doch doppelschenklig, wie die Heberbarometer.

Fig. 1065 zeigt ein solches Instrument nach dem System Wild-Fuess[1]), links die obere Hälfte desselben mit Skala und Ablese-

[1]) H. Wild, Bulletin de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg, T. XXVIII, S. 292, 1883.

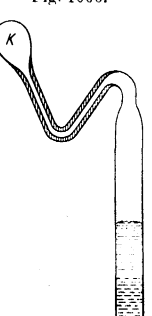
vorrichtung, rechts in etwas größerem Maßstab den unteren Teil, wobei durch teilweise Wegnahme der Wände die Verbindung der beiden Schenkel und die Einrichtung des Quecksilbergefäßes sichtbar gemacht sind. *A* und *B* sind die beiden Schenkel, in denen die Höhe der beiden Quecksilberkuppen bestimmt wird. Sie reichen beide in das Gefäß *C* hinein, dessen Boden mittels der Schraube *G* gehoben oder gesenkt werden kann. Der Schenkel *B* kommuniziert mit der Atmosphäre durch einen Ansatz, welcher durch die Schraube *S* verschlossen werden kann. Die Ablesung kann entweder mit einer sehr genauen Ablesevorrichtung *N* an beiden Kuppen erfolgen, oder man stellt mittels der Schraube *G* die untere Quecksilberkuppe genau auf die Höhe eines am Skalennullpunkt angebrachten Visiers ein und liest dann den Stand der oberen Kuppe ab. Das Instrument läßt sich so einstellen, daß man es auf größere Strecken transportieren kann, ohne daß eine Neufüllung des Barometerrohres erforderlich ist.

Da diese Instrumente eine sehr genaue Ablesung gestatten und auch die in dem nächsten Paragraphen zu besprechenden Korrektionen anzubringen erlauben, so werden sie häufig als „Normalbarometer“ benutzt[1]), an denen die Angaben anderer einfacherer Instrumente geprüft werden.

§ 19. Prüfung der Barometer. Um mit den beschriebenen Quecksilberbarometern genaue Werte des Luftdruckes erhalten zu können, müssen die Instrumente eine Reihe von Bedingungen erfüllen.

Zunächst ist zu prüfen, ob das Quecksilber eine blanke Oberfläche und einen wohlausgebildeten Meniskus zeigt, d. h. ob es ganz rein ist. Man benutzt zur Barometerfüllung entweder direkt, z. B. aus rotem Oxyd hergestelltes Quecksilber oder solches, das nach den besten Reinigungsmethoden gereinigt und destilliert ist[2]). Schon ein Fehler von $^1/_{7600}$ in der Dichte des Quecksilbers genügt, um die Angaben des Barometers um 0,1 mm zu fälschen.

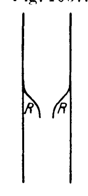
Fig. 1066.



Luftfalle.

Weiterhin muß über dem Quecksilber möglichst vollkommenes Vakuum herrschen. Die Torricellische Leere darf keine Spur von Gas oder irgendwelchen Dämpfen enthalten. Da aber am Quecksilber sowie an den Glaswandungen stets beträchtliche Mengen Gas haften, muß das Barometerrohr nach dem Füllen stark erhitzt („ausgekocht“) werden. Die Gefahr, daß das Rohr hierbei springt, ist ziemlich groß; man hat darum eine Reihe von Kunstgriffen ersonnen, um diese Gefahr möglichst zu vermindern[3]). Um das Auskochen nicht jedesmal, wenn durch einen Zufall Gas in das Vakuum gelangt ist, wiederholen zu müssen, ist eine Reihe von Vorrichtungen angegeben worden, mit denen man das eingedrungene Gas in eine abgeschlossene Gasfalle drängen kann. Fig. 1066 zeigt eine solche. Durch Neigen des Barometerrohres drückt man mit dem Quecksilber das Gas in die Kugel *K*; beim Wiederaufrichten des Rohres bleibt es in *K*, weil ein zurückbleibender Quecksilberfaden die Kugel vom Torricellischen Vakuum absperrt. Fig. 1067 zeigt eine Gasfalle, wie sie in Barometerrohren oft angebracht wird. Etwaige von unten eindringende, meist an der Glaswand hochsteigende Gasblasen fangen sich in dem Raum *R* und gelangen nicht in das Vakuum.

Fig. 1067.



Luftfalle.

Die Vollkommenheit des Vakuums kann zunächst annähernd dadurch geprüft werden, daß man das Instrument vorsichtig so neigt, daß das Quecksilber mit mäßiger Stärke an das verschlossene Ende anschlägt. Entsteht dabei ein heller klingender Ton, so ist dies ein gutes Zeichen; dagegen zeigt ein dumpfer Ton an, daß Luft vorhanden ist, welche den Stoß elastisch aufnimmt. Man kann das Vorhandensein von Gas genauer auch auf anderem Wege feststellen, falls es möglich ist, bei dem betreffenden Barometer durch Heben oder Senken des Quecksilbers den Raum des Vakuums merklich zu verändern. Hebt

---

1) Über andere Normalbarometer vgl. z. B. Winkelmann, Handb. der Physik.
2) Näheres hierüber vgl. z. B. Kohlrausch, Lehrbuch d. praktischen Physik.
3) Sehr geeignet ist eine wohl zuerst von H. Wild (Repert. f. Meteorol. 2, 115, 1872) verwandte Methode, bei der man das Quecksilber unter vermindertem Druck zum Sieden bringt und in das Barometerrohr hineindestilliert.

man nämlich die untere Quecksilberkuppe um eine gewisse Höhe (durch Heben des Gefäßbodens, Zufüllen von Quecksilber oder ähnliches), so muß, falls das Vakuum gut ist, die obere Kuppe um dieselbe Höhe steigen. Tut sie dies nicht, so ist das ein Zeichen, daß Gas in das Vakuum eingedrungen ist; der hierdurch hervorgerufene Fehler läßt sich aber aus Druckmessungen bei verschiedener Größe des Torricellischen Raumes durch einfache Rechnung auf Grund des Boyleschen Gesetzes ermitteln[1]).

Ein anderes Kriterium für die Güte des Torricellischen Vakuums und für die Größenordnung etwa eingedrungener Gasmengen ist das Aussehen von elektrischen Entladungen, die man in dem Raume über dem Quecksilber erzeugt (vgl. § 14).

Die Ablesung der Barometer geschieht in der früher bei den Manometern (§ 9) besprochenen Weise mit möglichster Genauigkeit. Es ist praktisch, vor jeder Ablesung durch Heben des Quecksilbers oder Klopfen gegen das Instrument etwaige Einstellungsfehler, die durch Reibung des Quecksilbers an der Wand entstehen können, zu vermeiden. Auch ist vor jeder Beobachtung darauf zu achten, daß das Barometer genau vertikal hängt; sehr geeignet ist darum eine Aufhängung, wie sie in Fig. 1060 abgebildet ist.

§ 20. Korrektionen. Sind alle im vorigen Paragraphen angegebenen Vorsichtsmaßregeln getroffen, so ist an dem abgelesenen Barometerstand noch eine Reihe von Korrektionen anzubringen.

1. Es ist üblich, den Barometerstand auf 0° C zu beziehen, so daß bei anderer Temperatur abgelesene Werte auf 0° reduziert werden müssen. Dabei ist die Ausdehnung des Quecksilbers und die Ausdehnung der Skala des Instruments zu berücksichtigen. Hat die Höhe der Quecksilbersäule bei ϑ^0 den Wert h, so hat sie bei 0° den Wert $h_0 = \frac{h}{1+\alpha\vartheta}$, wo α für Quecksilber den Wert 0,000181 hat. Ist β der Ausdehnungskoeffizient des Materials, aus dem die Skala hergestellt ist, so ist die beobachtete Höhe noch mit $1+\beta t$ zu multiplizieren. Beide Korrektionen zusammengefaßt ergeben für die Reduktion des Barometerstandes auf 0° die Formel:

$$h_0 = h\,\frac{1+\beta\vartheta}{1+\alpha\vartheta} \quad (h_0 \text{ reduzierte Höhe, } h \text{ beobachtete Höhe})$$

oder, da α und β kleine Größen sind,

$$h_0 = h\,[1-(\alpha-\beta)\vartheta].$$

Diese Temperaturkorrektion kann häufig recht beträchtlich werden; darum ist sehr darauf zu achten, daß man die Temperatur des Quecksilbers richtig bestimmt. Ein neben oder an dem Barometer angebrachtes Thermometer ist vor störenden Einflüssen, welche seine Temperatur anders als die des Quecksilbers beeinflussen könnten, zu schützen.

2. Eine weitere Korrektion, die an den Angaben eines Barometers anzubringen ist, besteht in der Berücksichtigung der starken Kapillardepression des Quecksilbers. Das Wesentliche über diese Korrektion ist bei der allgemeinen Behandlung der Flüssigkeitsmanometer (§ 9) gesagt worden. Es könnte scheinen, als ob bei Anwendung des Heberbarometers, bei welchem beide Schenkel gleich weit sind, die Kapillardepression gänzlich eliminiert werden könnte. Das ist aber nicht der Fall, weil die Höhe des Meniskus im Vakuum stets eine andere ist als im offenen Schenkel, wo das Quecksilber und das Glas mit feuchter Luft in Berührung und mehr oder weniger verunreinigt ist. Wenn möglich, vermeidet man den Einfluß der Kapillardepression durch Verwendung weiter Rohre; jedoch ist dies nicht immer durchzuführen, da die Kapillardepression selbst bei Rohren von 20 mm Durchmesser noch 0,01 mm übersteigt.

3. Wegen des Druckes des Quecksilberdampfes, mit dem ja das Torricellische Vakuum stets erfüllt ist, braucht man eine Korrektion der Barometerablesung nur selten anzubringen, weil sie erst bei höheren als den normalen Meßtemperaturen merkbar wird[2]).

---

[1]) A. T. Kupffer, Pogg. Ann. **26**, 450, 1832; vgl. auch Zeitschr. f. Instrkde. **6**, 380 und 392, 1886.

[2]) Der Dampfdruck des Quecksilbers beträgt erst bei etwa 80° 0,1 mm.

4. Wichtiger ist die Korrektion der Barometerablesung, welche die Änderung der Fallbeschleunigung mit der Höhe über dem Meeresspiegel und mit der geographischen Breite erfordert. Infolge der Änderung der Fallbeschleunigung ist die Höhe der Quecksilbersäule kein konstantes Maß des Luftdrucks. Man reduziert darum diese Höhe immer auf die Normalschwere in 45° Breite und auf Meereshöhe. Die Reduktion erfolgt nach der Formel:

$$h_{\text{red}} = h\,(1 - 0{,}0026\,.\,\cos 2\,\varphi - 0{,}000\,000\,3\,s),$$

wobei φ die geographische Breite des Beobachtungsortes und s die Seehöhe desselben in Metern ist. Danach bewirkt eine Abweichung um 5° von der Breite 45° oder eine Erhebung von 1500 m über das Meeresniveau bei einem Barometerstand von 760 mm bereits eine Korrektion von etwa 0,34 mm. Diese Korrektion ist also keineswegs eine Größe, die man vernachlässigen kann.

§ 21. Barometer zur vergrößerten Angabe der Luftdruckschwankungen. Da die Änderungen des Barometerstandes an einem Orte meist nicht sehr bedeutend sind, hat man verschiedene Apparate erdacht, um die Schwankungen deutlicher beobachtbar zu machen. Von Huyghens ist ein Barometer konstruiert worden, bei dem die Bewegung der Quecksilberoberfläche im offenen Ende eines Heberbarometers auf eine spezifisch leichtere Flüssigkeit, etwa Wasser oder gefärbten Weingeist, übertragen wird. Diese füllt das Ende des Barometerrohres (Querschnitt q_1) sowie ein dünnes, an dieses angesetztes Glasrohr (Querschnitt q_2). Wenn die Quecksilberoberfläche steigt oder fällt, so steigt oder fällt die Flüssigkeit in dem engen Rohr um q_1/q_2 mal soviel. Auch die absolute Größe der Luftdruckänderungen läßt sich, wenn das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bekannt ist, leicht bestimmen. Ein solches Barometer ist sehr zweckmäßig, wenn es sich nur um die Beobachtung der Barometerschwankungen und nicht um die genaue Ermittlung der Barometerhöhe handelt. Zu demselben Zwecke hat man verschiedentlich Instrumente konstruiert, sogenannte Variometer[1]. Diese bestehen im wesentlichen aus einem empfindlichen Flüssigkeitsmanometer, dessen einer Schenkel mit einem abgeschlossenen Luftvolumen in Verbindung steht, während auf den anderen Schenkel der äußere Luftdruck wirkt. Schwankungen desselben werden von dem Manometer angezeigt, das häufig nur aus einem Flüssigkeitsfaden in einem Rohre besteht.

Um die Bewegung eines Quecksilberbarometers stark vergrößert[2] abzulesen, kann man auch in der Weise verfahren, daß man auf dem Quecksilber im offenen Schenkel eines Heberbarometers ein schwimmendes Gewicht anbringt. Dessen Bewegung wird auf einen langen Zeiger übertragen, welcher einen großen Ausschlag gibt, wenn das Quecksilber nur wenig steigt oder fällt (Hookes Radbarometer).

Eine Vergrößerung der Niveauschwankung gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers ist auch dadurch zu erzielen, daß man statt des Quecksilbers im Barometer eine spezifisch leichtere Flüssigkeit nimmt, die dann im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte größere Schwankungen aufweist. So sind z. B. bei einem Glycerinbarometer (Jordan) die Niveauänderungen mehr als zehnmal größer als die gleichzeitigen eines Quecksilberbarometers. Solche Instrumente haben aber den Nachteil sehr großer Dimensionen (Glycerin: 8,2 m) und sind unter Umständen Störungen infolge Absorption von Gasen durch die Flüssigkeiten ausgesetzt.

§ 22. Waagebarometer. Von anderen Flüssigkeitsbarometern sind noch die Waagebarometer zu nennen, deren Konstruktion aus Fig. 1068 ohne weiteres hervorgeht. Die Änderungen des Luftdruckes bewirken ein mehr oder weniger starkes Eintreten des Quecksilbers in das Rohr und damit eine Veränderung der Einstellung der Waage, deren einer Hebelarm gezeichnet ist. Die Ablesung des Instruments erfolgt entweder durch Auflegen von Gewichten auf

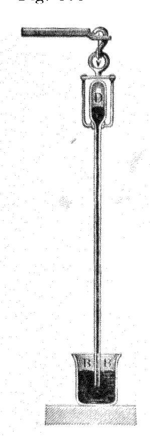
---

[1]) Zum Beispiel F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **150**, 423, 1873 u. F. v. Hefner-Alteneck, Wied. Ann. **57**, 468, 1896; ferner vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. **12**, 787, 1903.

[2]) Derartige Ablesungen sind auch bei anderen Flüssigkeitsmanometern verwandt worden.

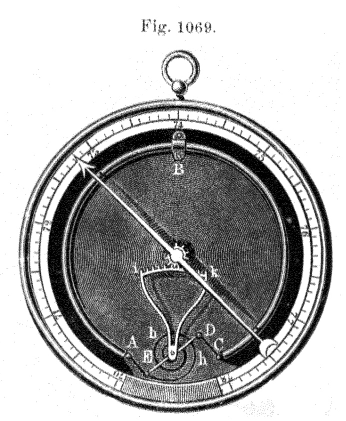
den anderen Waagebalken oder durch Messung der Neigung desselben. Diese Instrumente werden auch zu Registrierzwecken (vgl. § 24) verwandt.

Fig. 1068.



Waagebarometer.

Fig. 1069.



Aneroidbarometer mit Bourdonscher Feder.

§ 23. Metallbarometer [Aneroide, Holostericbarometer] [1]).

Die geringe Handlichkeit sowie die Zerbrechlichkeit des Quecksilberbarometers haben zur Konstruktion von Luftdruckmessern Anlaß gegeben, welche keine Flüssigkeiten enthalten, sondern nur aus festen Metallteilen bestehen. Am häufigsten werden dazu Instrumente benutzt, welche auf dem Prinzip der Bourdonschen Federn (§ 10) oder der Durchbiegung elastischer Platten beruhen.

Fig. 1069 stellt ein möglichst einfach konstruiertes Barometer (Aneroid) mit Bourdonscher Röhre dar. Die nahezu kreisförmige, luftleer gemachte Röhre ist nur in ihrer Mitte bei *B* auf der Bodenplatte des Gehäuses befestigt. Wenn der Luftdruck schwankt, so bewirken die beiden freien Enden *A* und *C* durch die dann auftretende Krümmung vermittelst der Stäbchen *CD* und *AE* eine Drehung des gezahnten Bogens *ik* und damit eine Drehung des Zeigers. Die Skala des Instruments wird durch Vergleich mit einem Quecksilberbarometer geeicht.

Häufiger noch als die eben besprochenen Instrumente werden die Aneroide von Vidi (von Breguet vervollkommnet) benutzt, bei denen die mehr oder minder starke Durchbiegung einer Metallplatte zur Messung des Luftdrucks verwandt wird.

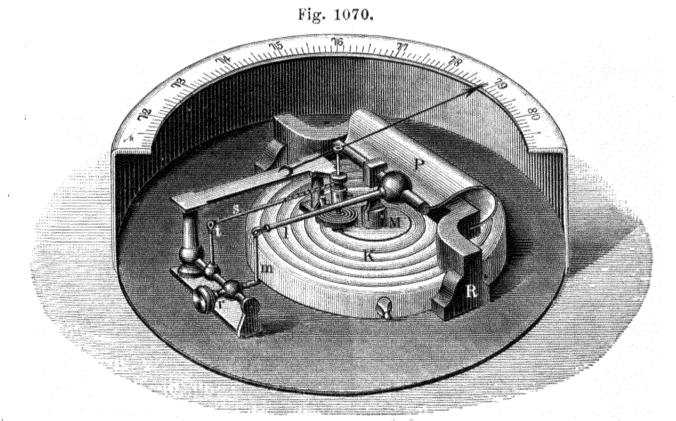
Fig. 1070 stellt einen solchen Apparat dar. Der Hauptbestandteil ist eine luftleere Metalldose *K*, deren Deckplatte zum Zwecke größerer Beweglichkeit kreisförmig gewellt ist; die an der Bodenplatte des Apparats mittels der Träger *R* befestigte breite Metallfeder *P* ist mit der Mitte des Dosendeckels bei *M* fest verbunden. Der Luftdruck sucht die Dose einzudrücken, die Feder *P* wirkt diesem Drucke entgegen. Zwischen beiden kommt es zum Gleichgewicht, wobei der Deckel desto stärker niedergedrückt bleibt, je größer der Luftdruck ist. Der übrige Mechanismus dient dazu, die Bewegungen der Mitte des Dosendeckels bzw. des Bügels *P* in geeignetem Maßstabe sichtbar zu machen. Die Übertragung dieser Bewegung auf den Zeiger ist aus Fig. 1070 ersichtlich. Auch bei diesen Instrumenten wird die Skala empirisch an einem Quecksilberbarometer geeicht.

---

[1]) Vgl. den zusammenfassenden Artikel von E. Warburg und W. Heuse, Zeitschr. f. Instrkde. **39**, 41, 1919.

Die Angaben solcher Metallbarometer sind infolge von Temperatureinflüssen und infolge der elastischen Nachwirkungen der Metallteile unter Umständen korrekturbedürftig. Zum Beispiel geht beim Vidischen Aneroid die luftleere Dose infolge der einseitigen Inanspruchnahme nach und nach etwas zusammen, so daß die Eichung eventuell fehlerhaft werden kann. Was den Temperatureinfluß betrifft, so sucht man dem Nachgeben der Dose bei höherer Temperatur dadurch entgegenzuwirken, daß man noch etwas Luft in derselben läßt, deren Ausdehnung mit wachsender Temperatur dann jenes Nachgeben kompensiert. Bei sehr schnellen Änderungen des Luftdruckes, z. B. bei Aufstiegen im Ballon u. dgl., hinken infolge der elastischen Nachwirkungen

Fig. 1070.



Aneroiddosenbarometer.

die Angaben der Aneroide häufig hinter dem Luftdruck nach; die Instrumente sind dann nur mit besonderen Vorsichtsmaßregeln brauchbar.

Im allgemeinen ist bei Aneroiden eine Prüfung auf Temperatureinfluß und Richtigkeit der Druckangaben ratsam, und eventuell sind Korrektionen anzubringen. Es ist jedoch gelungen, Instrumente zu konstruieren, die von den genannten Fehlern weitgehend frei sind[1]). Vor der Ablesung müssen alle Metallbarometer durch Klopfen leicht erschüttert werden, um einen etwaigen Einfluß der Reibung zu vermeiden.

§ 24. Barographen (registrierende Barometer). Zum Zwecke der dauernden Kontrolle der Luftdruckschwankungen hat man Barometer konstruiert, welche die Barometerstände kontinuierlich selbst aufschreiben, sogenannte Barographen.

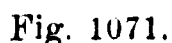
Zum Aufzeichnen der Angaben eines Quecksilberbarometers kann z. B. ein Mechanismus dienen, der ähnlich dem auf S. 1243 beschriebenen Radbaro-

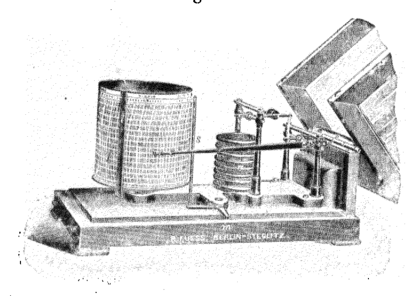
---

[1]) Eine Schwerekorrektion ist bei diesen Instrumenten nicht erforderlich. Infolgedessen ist es möglich, aus Differenzen der Angaben von Aneroid- und Quecksilberbarometern, welche an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche gemessen werden können, auf die Größe der Änderung der Schwerkraft zu schließen.

meter von Hooke ist. Die Bewegungen des Quecksilbers werden anstatt auf einen Zeiger einem Schreibstift übertragen, der sich dadurch hin und her bewegt. Senkrecht zu dieser Bewegungsrichtung wird kontinuierlich, meist durch ein Uhrwerk, ein Papierstreifen bewegt, auf dem sich dann die Barometerstellungen dauernd aufzeichnen.

Bei anderen Instrumenten befindet sich auf der Vakuumseite des Quecksilberbarometers ein Schwimmer; dieser trägt einen Magnet, welcher einen anderen außerhalb des Rohres befindlichen Magnet beeinflußt. Die Bewegungen des letzteren werden aufgezeichnet.


Fig. 1071.


Aneroidbarograph.

Auch das Waagebarometer kann, wie schon erwähnt, zu Registrierzwecken verwandt werden, indem die Bewegungen des Waagebalkens auf einen Schreibstift übertragen werden[1]). Ein sehr vollkommenes Instrument dieser Art ist der Sprung-Fuesssche Laufgewichtsbarograph.

Sehr gebräuchlich sind diejenigen Barographen geworden, die nach dem Prinzip der Metallmanometer gebaut sind. Fig. 1071 zeigt einen solchen. Die Wirkungsweise bedarf keiner Erläuterung. Die Aufzeichnung erfolgt auf Papierstreifen, welche auf eine Trommel gewickelt sind, die sich in bestimmter Zeit, z. B. einer Woche, gerade einmal herumdreht. Diese Barographen haben natürlich alle Vorzüge und Nachteile der Metallbarometer, die oben erwähnt worden sind.

§ 25. Anderweitige Methoden zur Bestimmung des Luftdruckes.

Es gibt eine große Reihe von anderen Erscheinungen, hauptsächlich thermischer Art, die vom Luftdruck abhängen und deren gesetzmäßiger Zusammenhang mit demselben bekannt ist. Alle diese können zur Messung des Luftdruckes benutzt werden. Am meisten kommt hierfür die Abhängigkeit des Siedepunkts einer Flüssigkeit vom äußeren Druck in Frage. Ein für solche Messungen geeigneter Apparat ist das Thermohypsometer, bei welchem der Dampf in einem doppelwandigen Mantel das Thermometer umspült, welches die Siedetemperatur bis auf Hundertstel Grade oder noch genauer abzulesen gestattet. Aus dieser Temperatur folgt mit ziemlicher Genauigkeit (etwa 0,1 mm) der Barometerstand[2]).

Über weitere indirekte Methoden vgl. z. B. Winkelmanns Handbuch der Physik, S. 1305. Leipzig 1908.

---

[1]) K. Scheel, Zeitschr. f. Instrkde. **15**, 133, 1895.
[2]) Näheres vgl. z. B. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik.

Namen- und Sachverzeichnis

zum ersten und zweiten Teil des ersten Bandes